

X
ATTI 24-25

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLV

1958

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

VOLUME XXIV

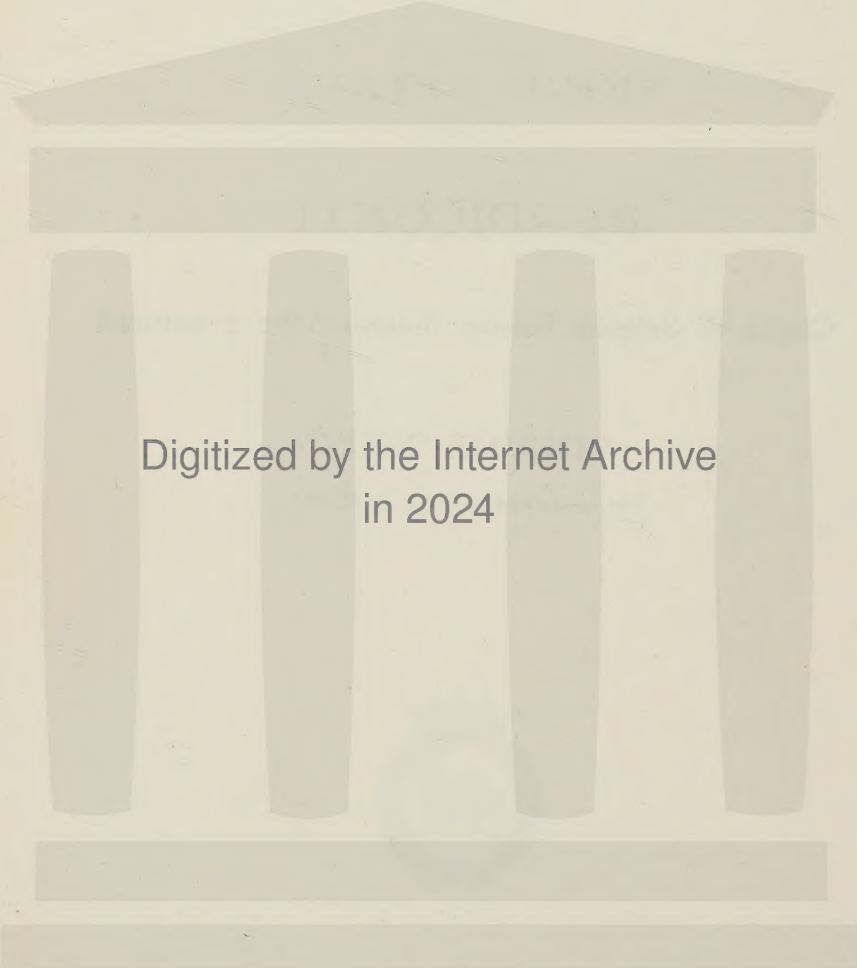
(1° semestre 1958)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1958



Digitized by the Internet Archive
in 2024

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'11 gennaio 1958

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico.* Nota II di CARLO PUCCI, presentata^(*) dal Socio M. PICONE.

Indaghiamo sulla possibilità di ridurre le ipotesi del teorema precedente per provare il loro carattere essenziale ed anche per renderne più chiaro il significato.

Sia $m = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x^0 = (0, 0)$,

$L(u) = u_{xx} + y u_{yy} - u_y$,

$$(10) \quad S = \{(x, y) / x^2 + (y - 1)^2 < 1\}.$$

Posto $u = y^2$ le ipotesi del teorema sono soddisfatte eccettuato la condizione (A), la tesi non è verificata; infatti si ha $u_y(0, 0) = 0$. Pertanto la condizione (A) non può essere soppressa.

Nel piano x, y consideriamo il cerchio S definito dalla (10) e l'operatore differenziale

$$(11) \quad L(u) = u_{xx} + u_{yy} + \frac{k}{y} u_y,$$

considerato nella Teoria del potenziale a simmetria assiale generalizzato (A. Weinstein [13]). Posto $u = y^{1-k}$, risulta $L(u) = 0$ e, se $k < 0$, u ha un minimo nell'origine. Le ipotesi del teorema sono verificate eccettuato la

(*) Nella seduta del 9 novembre 1957.

condizione (B) ma la tesi non è verificata avendosi $u_y(0, 0) = 0$. Osserviamo che se il coefficiente di u_y fosse $k y^\alpha$ con $\alpha > -1$, invece di $\alpha = -1$ come nella (11), la condizione (B) sarebbe verificata. Questo mostra il carattere essenziale anche da un punto di vista quantitativo di tale condizione⁽¹⁰⁾.

Analogamente si prova il carattere essenziale della condizione (C) per il coefficiente c . Consideriamo nel cerchio S definito dalla (10) l'operatore

$$L(u) = u_{xx} + u_{yy} + \frac{k - k^2}{y^2} u, \quad k > 1;$$

posto $u = y^k$ risulta $L(u) = 0$, un minimo nell'origine, e le ipotesi del teorema sono tutte soddisfatte eccettuata la condizione (C). La tesi del lemma non è verificata. Anche in tale caso osserviamo che se il coefficiente di u fosse $(k - k^2)/y^\alpha$ con $\alpha < 2$ invece di $\alpha = 2$, la condizione (C) sarebbe verificata.

2. - MASSIMI E MINIMI IN PUNTI INTERNI.

Sia T un insieme aperto connesso di $R^{(m)}$, H un insieme contenuto in T e chiuso su T , a_{ji} , b_i , c funzioni reali in $T - H$. Ad ogni punto x° di H siano associate due ipersfere aperte contenute in $T - H$, prive di punti comuni e aventi x_0 sulla loro frontiera. Indichiamo con L l'operatore differenziale definito dalla (1).

II. - *Le funzioni a_{ij} siano continue e limitate in $T - H$, le funzioni b_i , c siano limitate in ogni insieme chiuso contenuto in $T - H$. Indicato con x° un qualsiasi punto di H e con S una qualsiasi delle due ipersfere associate ad x° , le funzioni a_{ij} , b_i , c soddisfino rispettivamente alle condizioni (A), (B), (C). Supponiamo inoltre che in $T - H$ la forma quadratica $\sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$ sia definita positiva e $c \leq 0$. Indicata con u una funzione non costante, continua e dotata di derivate prime in T e di classe $C^{(2)}$ in $T - H$, se*

$$L(u) \leq 0, \quad [L(u) \geq 0] \quad \text{in } T - H,$$

e se esiste il minimo [massimo] di u in T , tale minimo è positivo [tale massimo è negativo].

Supponiamo per assurdo che esista il minimo di u in T ed esso sia non positivo. Indichiamo con E l'insieme dei punti di T ove u assume tale valore minimo; risulta $E \neq T$ perché u non è costante e quindi $\mathfrak{F} E \neq \mathfrak{F} T$.

(10) Vogliamo notare alcune interessanti proprietà di massimo e minimo delle funzioni $u(x, y)$ di classe $C^{(2)}$ per $y < 0$, di classe $C^{(1)}$ per $y \geq 0$, verificanti le condizioni $u_y(x, 0) = 0$, $L(u) = 0$ ove L è definito dalla (11). Se $k \geq 0$ A. WEINSTEIN ha provato in [12] che u non ha massimi e minimi sull'asse x . Ciò segue anche dal teorema precedente perché se vi fosse un minimo in $(x_0, 0)$ dovrebbe essere $u_y(x_0, 0) > 0$. Nel caso $k = -1$ A. HUBER ha provato in [5] che se u ha un minimo in $(x_0, 0)$ $\lim_{y \rightarrow 0} y^{-1} u_y(x_0, y) > 0$. Un teorema

analogo per un operatore differenziale più generale di quello definito dalla (11) è stato provato da J. SERRIN in [11] e da D. GILBARG e M. SHIFFMAN in [1]. Fondandosi sulla stessa funzione ausiliaria h impiegata nella dimostrazione precedente si possono perfezionare ed estendere i teoremi di Huber, Serrin, Gilbarg e Shiffman.

Si possono presentare due casi: vi sono punti di $\mathfrak{F} E$ non contenuti in $H + \mathfrak{F} T$ oppure $\mathfrak{F} E \subset H + \mathfrak{F} T$. Consideriamo dapprima il primo caso. Esiste un punto y di $\mathfrak{F} E$ con distanza positiva dall'insieme chiuso $H + \mathfrak{F} T$. Indicata tale distanza con 3δ esiste un punto η in $T - E$ con $y\eta \leq \delta$. Indicata con r_0 la distanza di η da E , la ipersfera aperta S di raggio r_0 e centro η è contenuta in $T - (E + H)$; inoltre $\bar{S} \subset T - H$ ed esiste un punto x^0 con $x^0 \in \mathfrak{F} S$ e $x^0 \in \mathfrak{F} E$ (l'insieme E è chiuso su T). Si ha pertanto

$$(12) \quad u(x) > u(x^0), \quad L(u) \leq 0, \quad x \in S, \quad u(x^0) \leq 0,$$

ed in \bar{S} i coefficienti a_{ij}, b_i, c sono limitati. In S le ipotesi del teorema I sono verificate e quindi qualche derivata prima di u in x^0 deve essere diversa da zero il che è assurdo essendo x^0 un punto di minimo per u interno a T .

Consideriamo il secondo caso: $\mathfrak{F} E \subset H + \mathfrak{F} T$. Esiste un punto y di $\mathfrak{F} E$ con distanza positiva 3δ da $\mathfrak{F} T$, ed esiste un punto η in $T - E$ con distanza δ da y . Indicata con v la distanza di η da E la ipersfera aperta S_1 di raggio v e centro η è contenuta in $T - E$ ed esiste un punto x^0 appartenente ad H , ad E e ad $\mathfrak{F} S_1$. Una delle due ipersfere associate ad x^0 deve avere punti in comune con S_1 e pertanto contiene punti di $T - E$ e, non contenendo punti di H e di $\mathfrak{F} T$ e quindi neanche di $\mathfrak{F} E$, tale ipersfera S è contenuta in $T - E$. Relativamente a tale ipersfera S ed al punto x^0 di $\mathfrak{F} E$ che è sulla sua frontiera sussistono le (14) e le altre ipotesi del teorema I. Pertanto come nel caso precedente è provato l'assurdo.

Osservazioni. - Nel teorema II la ipotesi che u sia dotata di derivate prime anche nei punti di H non può essere rimossa anche supponendo i coefficienti continui o costanti in T . Consideriamo il seguente esempio:

$m = 2$, $L = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, H la retta $x_2 = 0$, $u = x_1^2 - (x_2 - 1)^2$ per $x_2 \geq 0$, $u = x_1^2 - (x_2 + 1)^2$ per $x_2 \leq 0$. La funzione u è continua in tutto il piano e di classe $C^{(2)}$ per $x_2 \neq 0$, risulta $L(u) = 0$ per $x_2 \neq 0$ e la funzione u ha un minimo negativo nell'origine.

Osserviamo anche che la ipotesi della continuità dei coefficienti a_{ij} in $T - H$ può essere rimossa supponendo invece

$$\sum a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geq \alpha(x) |\lambda|^2 \quad \text{in } T - H$$

con $\alpha(x)$ funzione continua positiva in $T - H$.

3. - DUE COROLLARI.

Enunciamo ora due corollari dei teoremi precedenti.

III. - *Assumiamo le ipotesi del teorema I ad eccezione della condizione $u(x) > u(x^0)$ in S sostituita dalla meno restrittiva $u(x) \geq u(x^0)$ in S ; inoltre supponiamo che le funzioni a_{ij}, b_i, c soddisfino (relativamente all'insieme*

aperto S) le ipotesi del teorema II. Si possono presentare due casi: o u è costante in S , oppure sussiste la (3).

Infatti se in qualche punto ξ di S $u(\xi) = u(x^0)$, ξ è un punto di minimo non positivo interno ad S e per il teorema II u è costante. Se invece $u(x) > u(x^0)$ in S per il teorema I si ha la (3).

Osserviamo anche che nei precedenti teoremi si può eliminare le condizioni relative al segno dei minimi o massimi se si suppone il coefficiente c identicamente uguale a zero. Si ha ad esempio:

IV. - *Assumiamo le ipotesi del teorema II ed inoltre $c \equiv 0$ in $T - H$. Se $L(u) \leq 0$, $[L(u) \geq 0]$ in $T - H$, u non è dotata di minimi [massimi] in T .*

Supponiamo per assurdo che u abbia un minimo in un punto x^0 di T . Esiste in tale caso, un insieme aperto T_0 contenuto in T , contenente x^0 e tale che $u(x) \geq u(x^0)$ in T_0 . Considerando la funzione $u(x) - u(x^0)$ invece di $u(x)$ e l'insieme T_0 invece di T le ipotesi del teorema II sono verificate e quindi $u(x) - u(x^0)$ non può avere in T_0 un minimo uguale a zero. Ciò invece avviene e l'assurdo è provato.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] D. GILBARG, M. SHIFFMAN, *On Bodies Achieving Extreme Value of the Critical Mach Number*, « Journ. Rat. Mech. An. », 3, pp. 209, 230 (1954).
- [2] G. GIRAUD, *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique*, « Bull. Sc. Math. », 56, pp. 316-352 (1932).
- [3] E. HOPF, *Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus*, « Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften », 19, pp. 147-152 (1927).
- [4] E. HOPF, *A remark on linear elliptic differential equations of second order*, « Proc. Am. Math. Society », 3, pp. 791-794 (1952).
- [5] A. HUBER, *On the Uniqueness of Generalized Axially Symmetric Potential*, « Ann. of Math. », 60, pp. 351-358 (1954).
- [6] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.
- [7] L. NIRENBERG, *A Strong Maximum Principle for Parabolic Equations*, « Comm. Pure Applied Math. », pp. 167-177, (1953).
- [8] M. PICONE, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo*, « Math. Annalen », 101, pp. 701-712 (1929).
- [9] M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Napoli, 1940.
- [10] C. PUCCI, *Alcune limitazioni per gli integrali delle equazioni differenziali a derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico-parabolico*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8, II, pp. 334-339 (1951).
- [11] J. SERRIN, *Comparison theorems for subsonic flows*, « Journ. Math. Phys. », 33 (1954-55).
- [12] A. WEINSTEIN, *Discontinuous Integrals and Generalized Potential Theory* « Trans. Am. Math. Soc. », 63, pp. 342-354 (1948).
- [13] A. WEINSTEIN, *Generalized Axially Symmetric Potential Theory*, « Bull. Am. Math. Soc. », pp. 20-38 (1953).

Analisi matematica. — *Sur la position des extrêmes relatifs de certaines fonctions composées par des fonctions surharmoniques ou sousharmoniques.* Nota (*) di MIÉCISLAS BIERNACKI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. — Le produit positif de fonctions harmoniques peut avoir un maximum relatif à l'intérieur de son domaine de définition. C'est ainsi que le produit des fonctions xy et $(2-x)(2-y)$ harmoniques et positives dans le carré $0 < x < 2, 0 < y < 2$ atteint son maximum dans l'intérieur de ce carré et que le produit des fonctions harmoniques $(PA_i)^{-1}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) où A_i sont les sommets d'un cube et P un point variable de l'espace a un maximum relatif au centre de gravité du cube. Or nous allons voir que le produit positif de fonctions harmoniques est toujours dépourvu de minima relatifs à l'intérieur d'un domaine. Plus généralement on a la proposition suivante

THÉORÈME I. — *Considérons le produit*

$$w(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{g(x_1, x_2, \dots, x_n)} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdots h_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

où les fonctions g et h_i sont continues dans un domaine D , g étant surharmonique et chaque fonction h_i ou bien positive et surharmonique ou bien négative et sousharmonique. Si la fonction w ne se réduit pas à une constante elle ne possède à l'intérieur de D ni de minima relatifs positifs ni de maxima relatifs négatifs.

Dans la démonstration du théorème on peut se borner au cas d'un minimum positif, car le cas d'un maximum négatif se ramène au précédent en remplaçant l'une des fonctions h_i par $-h_i$. Nous supposons d'abord que toutes les fonctions g et h_i sont de la classe $C^{(2)}$. Posons

$$u = w^{-1} = e^{-g} (h_1 \cdots h_s)^{-1};$$

x désignant l'une quelconque des variables x_1, x_2, \dots, x_n on a

$$(1) \quad \frac{u_x}{u} = -g_x - \sum_{i=1}^s \frac{h_{ix}}{h_i}$$

$$(2) \quad \frac{u_{xx}}{u} = -g_{xx} - \sum_{i=1}^s \frac{h_{ixx}}{h_i} + \left(\frac{u_x}{u}\right)^2 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{h_{ix}}{h_i}\right)^2,$$

donc, Δu désignant le laplacien,

$$(3) \quad \frac{\Delta u}{u} = -\Delta g - \sum_{i=1}^s \frac{\Delta h_i}{h_i} + \sum_{p=1}^n \left[\left(\frac{u_x}{u}\right)^2 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{h_{ix}}{h_i}\right)^2 \right]_{x=x_p}.$$

(*) Tratta da una conferenza tenuta dal prof. Biernacki il 9 dicembre 1957, all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

Or on a, en vertu de nos hypothèses, $\Delta g \leq 0$, Δh_i sign $h_i \leq 0$ et $u > 0$; il résulte donc de (3) que $\Delta u \geq 0$. Ainsi donc u est sousharmonique, il en résulte que cette fonction est dépourvue de maxima relatifs à l'intérieur du domaine considéré et que w y est dépourvue de minima relatifs.

Si g et h_i sont de la classe $C^{(1)}$ seulement on considère les moyennes g_r et h_{ir} de g et des h_i dans des hypersphères de rayon r fixe comme fonctions des coordonnées du centre de l'hypersphère. Par exemple dans le cas des deux variables indépendantes x et y il s'agit de l'expression

$$g_r(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\xi^2 + \eta^2 < r^2} g(x + \xi, y + \eta) d\xi d\eta$$

et des expressions analogues. On sait [4] p. 11 que les moyennes g_r et h_{ir} sont surharmoniques ou sousharmoniques en même temps que g et h_i respectivement. Si g et h_i sont de la classe $C^{(1)}$ g_r et h_{ir} sont de la classe $C^{(2)}$, par suite la fonction

$$u_r = e^{-g_r} (h_{1r}, \dots, h_{ir})^{-1}$$

est sousharmonique. Or on sait [4] p. 12 que si $r \rightarrow 0$ les fonctions g_r et h_{ir} tendent uniformément vers g et h_i respectivement, donc u_r tend uniformément vers u qui est par suite sousharmonique également. Le théorème est ainsi étendu aux fonctions g et h_i de la classe $C^{(1)}$. Si les fonctions g et h_i sont seulement continues les fonctions g_r et h_{ir} sont de la classe $C^{(1)}$ et par suite leurs moyennes g_{rr} et h_{irr} de la classe $C^{(2)}$, donc en répétant le raisonnement précédent on aboutit à la démonstration du théorème dans le cas général.

2. Je vais m'occuper maintenant de quelques applications du théorème précédent. Je dirai pour abrégé qu'une fonction « possède la propriété M dans un domaine » si elle ne possède pas dans ce domaine ni des minima positifs ni des maxima négatifs. Voici quelques exemples de fonctions jouissant de cette propriété.

a) Si u est le module d'une fonction analytique $f(z)$ et $r = |z|$ la fonction $r \cdot \partial u / \partial r$ possède la propriété M.

En effet, on peut écrire

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = u \cdot \frac{\partial \log u}{\partial \log r}$$

$r \cdot \partial u / \partial r$ est donc le produit d'un module u , c. à d. d'une expression de la forme e^g , g étant harmonique, et d'une fonction harmonique, car $\log f(z)$ est une fonction analytique de $\log z$ et $\partial \log u / \partial \log r$ est la dérivée de la partie réelle de cette fonction par rapport à la partie réelle de $\log z$.

b) Si $h(x, y)$ est une fonction harmonique et r est la distance du point (x, y) à l'origine, alors $\partial h / \partial r$ a la propriété M.

En effet, on peut écrire

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial h}{\partial \log r};$$

$h(x, y)$ pouvant être considérée comme partie réelle d'une fonction analytique de $\log z$ on voit comme tout à l'heure que $\partial h / \partial r$ est le produit d'un module et d'une fonction harmonique.

c) La proposition précédente s'étend au cas de l'espace à trois dimensions. Désignons en effet par ρ la distance du point (x, y, z) à l'origine; on sait que $1/\rho$ est harmonique, donc si $H(x, y, z)$ est harmonique $H(x, y, z)/\rho$ jouit de la propriété M et il en est de même avec $\partial H / \partial \rho$, car on peut écrire

$$\frac{\partial H}{\partial \rho} = \left(\rho \frac{\partial H}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{1}{\rho}$$

et l'on sait que $\rho (\partial H / \partial \rho)$ est harmonique.

d) Supposons que la fonction $f(z)$ soit holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < R$ et que $f(0) = 0$. Si z décrit une circonférence $|z| = r < R$ dans le sens direct, le point $P = f(z)$ décrit une courbe C_r . Le rapport de la vitesse angulaire, pourvue d'un signe, du vecteur OP (O est l'origine des coordonnées dans le plan de $w = f(z)$) à la vitesse numérique du point P possède la propriété M dans le domaine $0 < |z| < R$.

En effet, si $z = re^{i\theta}$ la vitesse angulaire du vecteur OP est égale à

$$\frac{\partial \arg f(z)}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (t \text{ désigne le temps})$$

c. à. d. est égale à une fonction harmonique du point z multipliée par $d\theta/dt$ et la vitesse numérique du point P est égale à $|zf'(z)| \cdot (d\theta/dt)$ c. à. d. à l'inverse d'un module multiplié par le même facteur.

e) Supposons maintenant que la fonction $f(z)$ qui satisfait aux conditions de l'exemple d) représente conformément le cercle $|z| < R$ sur un domaine convexe. Les courbes C_r qui correspondent aux circonférences $|z| = r < R$ limitent aussi des domaines convexes. La courbure $K(z)$ de la courbe C_r au point qui correspond au point z ne possède pas des minima relatifs à l'intérieur du cercle $|z| < R$. Il en résulte de suite que le minimum de $K(z)$ le long d'une circonférence $|z| = r$ est une fonction décroissante de r .

On sait, en effet, [3] III Abschn. Aufgabe 106, que l'on a

$$K(z) = \left[1 + \Re \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) \right] \cdot \frac{1}{|zf'(z)|}.$$

Or le premier facteur est une fonction harmonique et positive et le second est un module.

3. Je vais maintenant étendre le résultat du § 1. Dans ce but je vais utiliser l'énoncé suivant du à G. Ascoli [1] p. 61 et E. Hopf [2].

A. « Considérons l'expression

$$L(u) \equiv \sum_{i,k=1,2,\dots,n} a_{ik}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n) u$$

où tous les coefficients a_{ik} , b_i , c sont continus et bornés dans un domaine D , et $c \leq 0$, tandis que la forme quadratique $\sum_{i,k=1,2,\dots,n} a_{ik} \lambda_i \lambda_k$ est définie positive dans D , de manière que son déterminant y reste supérieur à un nombre positif fixe.

Aucune solution de l'équation $L(u) = 0$, qui est de la classe $C^{(2)}$ dans D , ne peut avoir en un point P intérieur à D un maximum relatif positif u_1 (un minimum relatif négatif u_2) à moins qu'elle ne se réduise pas à une constante dans tout le domaine D' contenant P et contenu dans D où l'on a $u \leq u_1$ ($u \geq u_2$). Si $c(x_1, \dots, x_n) < 0$ dans D , la dernière circonstance ne se présente pas ».

Si l'on se borne à considérer un cas particulier de l'énoncé A on obtient la proposition suivante:

THÉORÈME I'. - Considérons l'expression

$$\Delta^* u \equiv \sum_{p=1}^n a_p(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} + \sum_{p=1}^n b_p(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_p}$$

où les fonctions a_p et b_p sont continues et bornées dans un domaine D et où l'on a $a_p(x_1, \dots, x_n) > 0$ et $\prod_{p=1}^n a_p > \delta > 0$ dans ce domaine. Si $g(x_1, \dots, x_n)$ et $h_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, s$) sont des fonctions de la classe $C^{(2)}$ qui satisfont dans D aux inégalités $\Delta^* g \leq 0$ et $\text{sign } h_i \cdot \Delta^* h_i \leq 0$, alors l'expression

$$w = e^g h_1 \dots h_s$$

ne peut avoir en un point P intérieur à D ni de minimum relatif positif w_1 , ni de maximum relatif négatif w_2 , à moins qu'elle ne se réduise pas à une constante dans tout le domaine D' contenant P et contenu dans D où l'on a $w \geq w_1$ ou $w \leq w_2$ respectivement. Si l'on a de plus $\Delta^* g < 0$ ou $\text{sign } h_i \cdot \Delta^* h_i < 0$ pour une valeur de i dans D , w ne peut avoir à l'intérieur de D ni de minimum relatif positif ni de maximum relatif négatif.

Dans la démonstration il suffit de considérer par exemple le cas d'un minimum positif. En posant $u = e^{-g} (h_1 \dots h_s)^{-1}$ on obtient, en tenant compte des formules (1) et (2) la suivante:

$$(3') \quad \frac{\Delta^* u}{u} = -\Delta^* g - \sum_{i=1}^s \frac{\Delta^* h_i}{h_i} + \sum_{p=1}^n a_p \left[\left(\frac{u_x}{u} \right)^2 + \sum_{i=1}^s \left(\frac{h_{ix}}{h_i} \right)^2 \right]_{x=x_p}$$

En vertu des hypothèses de l'énoncé le second membre de (3'), que l'on peut appeler $-c(x_1, \dots, x_n)$, est non négatif ou même positif si l'on a $\Delta^* g < 0$ ou $\text{sign } h_i \cdot \Delta^* h_i < 0$. Il suffit donc d'appliquer l'énoncé A à la fonction $u = w^{-1}$ pour obtenir le théorème I'.

4. Je signale pour terminer les problèmes suivants:

a) Peut-on étendre le théorème I' au cas plus général envisagé dans l'énoncé A et aussi au cas des fonctions g et h_i qui ne sont pas dérivables comme c'était bien le cas avec l'énoncé I?

b) Peut-on étendre l'énoncé I au cas des expressions de la forme

$$\sum_{k=1}^m e^{g_k} h_{1k}, \dots, h_{s_k k}$$

où les g_k et h_{ik} satisfont aux conditions du théorème I et où l'on suppose de plus que tous les termes de la somme ont le même signe? Tous les termes, supposés par exemple positifs, de la somme sont bien des inverses des fonctions sousharmoniques, mais ils ne sont pas en général surharmoniques.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] G. ASCOLI, P. BURGATTI, G. GIRAUD, *Equazioni di tipo ellittico e parabolico*, « Public. d. R. Scuola Normale Sup. di Pisa », Firenze, G. C. Sansoni, 1936.
- [2] E. HOPF, *Elementare Betrachtungen über die Lösungen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung vom elliptischem Typus*, « Sitzb. Preuss. Akad. Wiss. », 19 pp. 147-152 (1927).
- [3] G. PÓLYA, G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Band I, Berlin, J. Springer, 1925.
- [4] T. RADÓ, *Subharmonic Functions* « Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgeb. », Band 5, Berlin, J. Springer, 1937.

Analisi matematica. — *Le soluzioni generali del problema degli n corpi rappresentate mediante serie di Lie.* Nota (*) di WOLFGANG GRÖBNER, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Consideriamo n punti

$$(1) \quad P_k(x_k, y_k, z_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dotati di masse m_k , e moventisi con le velocità

$$(2) \quad \dot{x}_k = u_k, \quad \dot{y}_k = v_k, \quad \dot{z}_k = w_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

L'energia cinetica di tale sistema di n punti è data da

$$(3) \quad T = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{2} (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2),$$

(*) Da una conferenza tenuta il 5 dicembre 1957 all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

mentre l'energia potenziale, supposto che le sole forze agenti sui punti siano quelle di mutua attrazione, secondo la legge newtoniana, è fornita da

$$(4) \quad U = - \sum_{k < l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}$$

con

$$(5) \quad r_{kl} = r_{lk} = \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2} \quad k, l = 1, 2, \dots, n.$$

Si verificano facilmente le eguaglianze seguenti:

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial z_k} = 0$$

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n \left[x_k \frac{\partial U}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial U}{\partial x_k} \right] = \sum_{k=1}^n \left[y_k \frac{\partial U}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial U}{\partial y_k} \right] = \sum_{k=1}^n \left[z_k \frac{\partial U}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial U}{\partial z_k} \right] = 0.$$

Dalla funzione di Lagrange di questo sistema meccanico

$$L = T - U$$

si traggono le equazioni differenziali per le coordinate x_k, y_k, z_k in dipendenza del tempo t :

$$(8') \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial L}{\partial x_k} = m_k \ddot{x}_k + \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

e analogamente per le coordinate y_k, z_k :

$$(8'') \quad m_k \ddot{y}_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

$$(8''') \quad m_k \ddot{z}_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} = 0,$$

Tenendo conto delle (2), il sistema di equazioni differenziali a cui soddisfano le $6n$ variabili $x_k, y_k, z_k, u_k, v_k, w_k$, si scrive nella forma contenente le sole derivate prime:

$$(9) \quad \begin{cases} \dot{x}_k = u_k, & \dot{y}_k = v_k, & \dot{z}_k = w_k, \\ \dot{u}_k = -\frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial x_k}, & \dot{v}_k = -\frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial y_k}, & \dot{w}_k = -\frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial z_k} \end{cases} \quad k=1, \dots, n.$$

A tale sistema è associato l'operatore differenziale:

$$(10) \quad D = \sum_{k=1}^n \left\{ u_k \frac{\partial}{\partial x_k} + v_k \frac{\partial}{\partial y_k} + w_k \frac{\partial}{\partial z_k} - \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial u_k} - \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial v_k} - \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial w_k} \right\};$$

chiamiamo

$$X_k, Y_k, Z_k, U_k, V_k, W_k$$

le soluzioni delle (9) soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$(11) \quad \begin{cases} (X_k)_{t=0} = x_k & , & (Y_k)_{t=0} = y_k & , & (Z_k)_{t=0} = z_k, \\ (U_k)_{t=0} = u_k & , & (V_k)_{t=0} = v_k & , & (W_k)_{t=0} = w_k, \end{cases} \quad k = 1, \dots, n;$$

esse sono fornite dalle serie di Lie⁽¹⁾:

$$(12) \quad \begin{cases} X_k = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v x_k, & Y_k = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v y_k, & Z_k = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v z_k, \\ U_k = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v u_k, & V_k = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v v_k, & W_k = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v w_k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

e più in generale, per qualsiasi funzione analitica $F(x_k, \dots, w_k)$ vale lo sviluppo secondo la serie di Lie:

$$(13) \quad F(X_k, \dots, W_k) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v F(x_k, \dots, w_k).$$

Tali serie convergono assolutamente, e rappresentano funzioni olomorfe delle variabili x_k, \dots, w_k, t , considerate come variabili complesse, nell'intorno di qualsiasi punto nel quale tutte le distanze r_{kl} sono positive. Il raggio di convergenza T delle serie (12), se non è infinito, è tale che sulla periferia $|t| = T$ esiste almeno un punto in cui le soluzioni (12) forniscono valori le quali rappresentano una singolarità per D , cioè un *punto di collisione*, dove almeno una distanza r_{kl} di due punti distinti P_k, P_l diventa zero. In ogni altro punto le serie (12) possono essere analiticamente prolungate.

È ben noto che le (12) ammettono 10 integrali algebrici⁽²⁾ che si trovano facilmente mediante il metodo qui seguito; basta introdurre nella (13) le funzioni

$$F(x) = \sum_{k=1}^n m_k x_k, \quad F(y) = \sum_{k=1}^n m_k y_k, \quad F(z) = \sum_{k=1}^n m_k z_k,$$

tenendo conto delle (6) si verificano le derivazioni

$$DF(\dot{x}) = \sum_{k=1}^n m_k u_k, \quad D^2 F(x) = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0,$$

e analoghe per $F(y)$ e $F(z)$; allora la (13) ci dà:

$$\sum_{k=1}^n m_k X_k = \sum_{k=1}^n m_k (x_k + tu_k),$$

$$\sum_{k=1}^n m_k Y_k = \sum_{k=1}^n m_k (y_k + tv_k),$$

$$\sum_{k=1}^n m_k Z_k = \sum_{k=1}^n m_k (z_k + tw_k),$$

(1) Si veda la Nota: *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico*, « Rend. Accad. Lincei », vol. XXIII, fasc. 6, pp. 375-379 (1957).

(2) Si veda, per esempio, l'eccellente monografia di C. L. SIEGEL, *Vorlesungen über Himmelsmechanik* (Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1956), che raccoglie i più recenti metodi e risultati.

formole che rappresentano il moto rettilineo ed uniforme del centro di gravità.

Analogamente per le funzioni

$$S_x = \sum_{k=1}^n m_k (y_k w_k - z_k v_k) \quad , \quad S_y = \sum_{k=1}^n m_k (z_k u_k - x_k w_k),$$

$$S_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k v_k - y_k u_k),$$

in conseguenza delle (7), valgono le relazioni

$$DS_x = DS_y = DS_z = 0,$$

e quindi hanno valori costanti gli integrali « superficiali »

$$\sum_{k=1}^n m_k (Y_k W_k - Z_k V_k) = \sum_{k=1}^n m_k (y_k w_k - z_k v_k) = \text{const.}$$

$$\sum_{k=1}^n m_k (Z_k U_k - X_k W_k) = \sum_{k=1}^n m_k (z_k u_k - x_k w_k) = \text{const.}$$

$$\sum_{k=1}^n m_k (X_k V_k - Y_k U_k) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k v_k - y_k u_k) = \text{const.}$$

In ultimo consideriamo l'energia totale del sistema, $T + U$, la quale pure soddisfa alla relazione $D(T + U) = 0$, e quindi rimane costante.

Giova inoltre osservare l'utilità della formola (13) quando interessa conoscere non tanto le soluzioni stesse quanto una certa funzione di esse, per esempio la distanza R_{kl} , variabile col tempo t , di due punti P_k, P_l . Allora non occorre calcolare le (12) ma basta lo sviluppo della (13):

$$R_{kl} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v r_{kl}.$$

Ancora molte modificazioni di serie di questo tipo si possono immaginare le quali, per opportune scelte delle funzioni $F(z)$, possono risultare di più facile calcolo e di più importanti applicazioni.

Giova però un'altra osservazione: tutte le serie finora scritte sono serie di potenze riguardo alla sola variabile t ; ma si possono anche dare gli sviluppi secondo una qualsiasi altra variabile, per esempio secondo la X_k . A tale scopo bisogna invertire il sistema delle funzioni (12) rispetto alla t e X_k . Anche questo problema, cioè il problema dell'inversione di un sistema di funzioni analitiche si risolve agevolmente mediante le serie di Lie come ci proponiamo di dimostrare in una prossima Nota. Qui ci limitiamo a indicare i risultati che si ottengono con questo metodo.

Le soluzioni delle equazioni differenziali (8), ossia (9), soddisfacenti alle condizioni iniziali (11), sviluppate secondo una variabile X_k , arbitrariamente scelta, sono rappresentate dalle serie seguenti, valide e assolutamente convergenti sotto l'ipotesi $u_k \neq 0, r_{jl} \neq 0 (j < l)$:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_j = x_j + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_k - x_k)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{u_k} D \right]^v \frac{u_j}{u_k}, \quad j=1, 2, \dots, n \\ Y_j = y_j + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_k - x_k)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{u_k} D \right]^v \frac{v_j}{u_k}, \quad j=1, 2, \dots, n \\ Z_j = z_j + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_k - x_k)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{u_k} D \right]^v \frac{w_j}{u_k}, \quad j=1, 2, \dots, n \\ U_j = u_j + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_k - x_k)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{u_k} D \right]^v \left(\frac{-1}{m_j u_k} \frac{\partial U}{\partial x_j} \right), \quad j=1, 2, \dots, n \\ V_j = v_j + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_k - x_k)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{u_k} D \right]^v \left(\frac{-1}{m_j u_k} \frac{\partial U}{\partial y_j} \right), \quad j=1, 2, \dots, n \\ W_j = w_j + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_k - x_k)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{u_k} D \right]^v \left(\frac{-1}{m_j u_k} \frac{\partial U}{\partial z_j} \right), \quad j=1, 2, \dots, n; \end{array} \right.$$

qui D significa l'operatore (10). Più in generale, data una funzione analitica arbitraria $F(x_j, y_j, z_j, u_j, v_j, w_j; t)$, per essa vale la serie:

$$(15) \quad F(X_j - x_j, Y_j - y_j, Z_j - z_j, U_j - u_j, V_j - v_j, W_j - w_j; t) = C + \\ + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_k - x_k)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{u_k} D \right]^v F\left(\frac{u_j}{u_k}, \frac{v_j}{u_k}, \frac{w_j}{u_k}, \frac{-1}{m_j u_k} \frac{\partial U}{\partial x_j}, \frac{-1}{m_j u_k} \frac{\partial U}{\partial y_j}, \frac{-1}{m_j u_k} \frac{\partial U}{\partial z_j}; \frac{1}{u_k}\right);$$

in particolare risulta per la variabile t la serie:

$$(16) \quad t = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_k - x_k)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{u_k} D \right]^v \frac{1}{u_k} = \frac{X_k - x_k}{u_k} + \frac{(X_k - x_k)^2}{2!} \frac{1}{m_k u_k^3} \frac{\partial U}{\partial x_k} + \dots$$

Analisi funzionale. — *Généralisation aux groupes quelconques d'un théorème de E. Hille concernant les fonctions facteurs.* Nota di ION CUCULESCU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Nous allons utiliser les notations de [1]. Soit G un groupe topologique abélien localement compact.

Soit \hat{G} le groupe des caractères de G .

Soit \hat{f} une fonction définie sur \hat{G} , intégrable sur \hat{G} par rapport à la mesure de Haar ($\hat{f} \in L^1(\hat{G})$). Sa transformée de Fourier $T\hat{f}$ est définie sur G par la formule

$$(T\hat{f})(x) = \int \hat{f}(\hat{\alpha}) \hat{\alpha}(x) d\hat{\alpha}$$

où l'intégrale est prise par rapport à la mesure de Haar.

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

Soit $\hat{\mu}$ une mesure bornée sur \hat{G} . Sa transformée de Fourier $T\hat{\mu}$ est définie sur G par la formule

$$(T\hat{\mu})(x) = \int \hat{\alpha}(x) d\hat{\mu}(\hat{\alpha})$$

$T\hat{f}$ et $T\hat{\mu}$ sont continues.

DEFINITION. - Une fonction ψ , définie sur G , à valeurs complexes finies, mesurable, par rapport à la mesure de Haar, s'appelle fonction facteur si, pour chaque $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ il existe une fonction $\hat{g} \in L^1(\hat{G})$ telle qu'on a:

$$T\hat{g} = \psi \cdot T\hat{f} \text{ loc. p.p. par rapport à la mesure de Haar.}$$

Dans [2] E. Hille démontre que, si $G = \mathbb{R}$ (où \mathbb{R} est le groupe additif des nombres réels) alors la condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit une fonction facteur est l'existence, sur \hat{G} , d'une mesure bornée $\hat{\mu}$, telle qu'on a:

$T\hat{\mu} = \psi$; loc. p.p. p.r. à la mesure de Haar. Dans cette Note nous allons généraliser ce théorème aux groupes topologiques abéliens localement compacts quelconques.

THÉOREME: Soit G un groupe topologique abélien localement compact et ψ une fonction à valeurs complexes finies, définie sur G . Pour que ψ soit une fonction facteur il faut et il suffit que $\psi = T\hat{\mu}$ (loc. p.p. p. rapport à la mesure de Haar), ou $\hat{\mu}$ est une mesure bornée sur le groupe \hat{G} de caractères de G .

DÉMONSTRATION. - La condition est suffisante. Soit $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ et $\hat{\mu}$ une mesure bornée sur \hat{G} .

Supposons que \hat{f} est nulle en dehors d'une réunion dénombrable de compacts.

Alors $(\hat{f} * \hat{\mu})(\hat{\alpha}) = \int \hat{f}(\hat{\alpha}\hat{\beta}^{-1}) d\hat{\mu}(\hat{\beta})$ existe presque partout (p. rap. à la mesure de Haar), appartient à $L^1(\hat{G})$ et on a

$$T(\hat{f} * \hat{\mu}) = T\hat{f} \cdot T\hat{\mu}.$$

En effet, il suffit de considérer le cas $\hat{f} \geq 0$, $\hat{\mu} \geq 0$. On remarque, que chaque mesure positive et bornée est portée par une réunion dénombrable de compacts.

On a

$$\begin{aligned} \iint \hat{f}(\hat{\alpha}\hat{\beta}^{-1}) d\hat{\mu}(\hat{\beta}) d\hat{\alpha} &= \int d\hat{\mu}(\hat{\beta}) \int \hat{f}(\hat{\alpha}\hat{\beta}^{-1}) d\hat{\alpha} = \\ \int d\hat{\mu}(\hat{\beta}) \|\hat{f}\|_1 &= \|\hat{f}\|_1 \|\hat{\mu}\|. \end{aligned}$$

Donc l'existence p.p. de $\hat{f} * \hat{\mu}$ est une conséquence du théorème de Fubini. On a de plus

$$\|\hat{f} * \hat{\mu}\|_1 \leq \|\hat{f}\|_1 \|\hat{\mu}\|$$

donc $\hat{f} * \hat{\mu} \in L^1(\hat{G})$.

Le même théorème de Fubini donne:

$$\begin{aligned} (T(\hat{f} * \hat{\mu}))(\alpha) &= \int (\hat{f} * \hat{\mu})(\alpha) \hat{\alpha}(x) d\alpha = \iint \hat{f}(\alpha \hat{\beta}^{-1}) \hat{\alpha}(x) d\alpha d\hat{\mu}(\hat{\beta}) = \\ &= \int d\hat{\mu}(\hat{\beta}) \int \hat{f}(\alpha \hat{\beta}^{-1}) \hat{\alpha}(x) d\alpha = \int \hat{\beta}(x) d\hat{\mu}(\hat{\beta}) \int \hat{f}(\alpha \hat{\beta}^{-1}) (\alpha \hat{\beta}^{-1})(x) d\alpha = \\ &= \int \hat{\beta}(x) d\hat{\mu}(\hat{\beta}) \int \hat{f}(\alpha) \hat{\alpha}(x) d\alpha = T\hat{\mu} \cdot T\hat{f}. \end{aligned}$$

LA CONDITION EST NECESSAIRE. — Soit ψ une fonction facteur. $T\hat{f} = 0$ loc. p.p. entraîne $T\hat{f} = 0$, car $T\hat{f}$ est continue, et donc $\hat{f} = 0$ (p.p.) (voir [3]).

Donc $T\hat{g} = \psi \cdot T\hat{f}$ détermine uniquement \hat{g} quand on donne \hat{f} (comme élément de $L^1(\hat{G})$)

$$\hat{g} = A\hat{f}.$$

Il est aisé de voir que A est un opérateur linéaire sur $L^1(\hat{G})$.

On démontre, par la méthode du graphe fermé que A est continu. En effet, soit $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$, $A\hat{f}_n \rightarrow \hat{g}$ dans $L^1(\hat{G})$. On a donc $T\hat{f}_n \rightarrow T\hat{f}$; $T(A\hat{f}_n) \rightarrow T\hat{g}$ partout sur G (voir [3]). Mais $T(A\hat{f}_n) = \psi \cdot T\hat{f}_n \rightarrow \psi \cdot T\hat{f}$ (loc. p.p.).

Donc

$$T\hat{g} = \psi \cdot T\hat{f} \text{ (loc. p.p.)}; \quad \hat{g} = A\hat{f}.$$

On a de même:

$$T(A(\hat{f} * \hat{g})) = \psi \cdot T(\hat{f} * \hat{g}) = \psi \cdot T\hat{f} \cdot T\hat{g} = (T A\hat{f}) \cdot T\hat{g} = T(A\hat{f} * \hat{g}).$$

Donc

$$A(\hat{f} * \hat{g}) = A\hat{f} * \hat{g}.$$

Soit \mathfrak{B} la base de filtre sur la boule unité fermée de $L^1(\hat{G})$ telle qu'on a:

$$\lim_{u \in \mathfrak{B}} \hat{f} * \hat{u} = \hat{f} \quad \text{pour chaque } \hat{f} \in L^1(\hat{G})$$

(\mathfrak{B} est « l'unité approximative »).

On a donc

$$A\hat{f} = \lim_{u \in \mathfrak{B}} A(\hat{u} * \hat{f}) = \lim_{u \in \mathfrak{B}} (A\hat{u} * \hat{f}).$$

Pour chaque $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$ soit $M\hat{f}$ la mesure produit de $A\hat{f}$ par la mesure de Haar.

$M(\mathfrak{B})$ est une base de filtre sur l'espace (vaguement compact) des mesures de borne $\leq \|A\|$.

Soit $\hat{\mu}$ une mesure adhérente à $M(\mathfrak{B})$.

Soit \mathfrak{B}_μ la base de filtre formé par tous les ensembles de la forme $B \cap V$ ou $B \in M(\mathfrak{B})$, $V \in \mathfrak{A}(\hat{\mu})$.

On a

$$\lim_{\hat{\nu} \in \mathfrak{B}_1'} (\hat{\nu} = \hat{\mu}.$$

Soit

$$\mathfrak{B}_1 = \{M^{-1}(B_1) \cap B \mid B \in \mathfrak{B} ; B_1 \in \mathfrak{B}_1'\}$$

\mathfrak{B}_1 est une base de filtre « plus fine » que \mathfrak{B}

Donc

$$(I) \quad Af = \lim_{\hat{\mu} \in \mathfrak{B}_1} (A\hat{\mu} * \hat{f}).$$

Soit

$$\hat{f} \in K(\hat{G}).$$

On a

$$(A\hat{\mu} * \hat{f})(\hat{\alpha}) = \int (A\hat{\mu})(\hat{\beta}) \hat{f}(\hat{\beta}^{-1}\hat{\alpha}) d\hat{\beta} = \int \hat{f}(\hat{\alpha}\hat{\beta}^{-1}) dM\hat{\mu}(\hat{\beta}).$$

Donc

$$A\hat{\mu} * \hat{f} = \hat{f} * M\hat{\mu}.$$

On a de plus

$$\lim_{\hat{\mu} \in \mathfrak{B}_1} (A\hat{\mu} * \hat{f})(\hat{\alpha}) = \int \hat{f}(\hat{\alpha}\hat{\beta}^{-1}) d\hat{\mu}(\hat{\beta}).$$

ou:

$$(2) \quad \lim_{\hat{\mu} \in \mathfrak{B}_1} (A\hat{\mu} * \hat{f})(\hat{\alpha}) = (\hat{f} * \hat{\mu})(\hat{\alpha}) \quad \text{pour chaque } \hat{\alpha}.$$

LEMME. — Les $\hat{f} * \hat{\nu}$ quand \hat{f} est fixe, $\hat{f} \in K(\hat{G})$ et quand $\hat{\nu}$ parcourt l'ensemble des mesures de norme $\leq L$ sur \hat{G} , sont également uniformément continues.

DÉMONSTRATION:

On a:

$$\begin{aligned} |(\hat{f} * \hat{\nu})(\hat{\alpha}) - (\hat{f} * \hat{\nu})(\hat{\beta})| &= \left| \int (\hat{f}(\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1}) - \hat{f}(\hat{\beta}\hat{\gamma}^{-1})) d\hat{\nu}(\hat{\gamma}) \right| \leq \\ &\leq \|\hat{\nu}\| \sup_{\hat{\gamma} \in \hat{G}} |\hat{f}(\hat{\alpha}\hat{\gamma}^{-1}) - \hat{f}(\hat{\beta}\hat{\gamma}^{-1})| \end{aligned}$$

et l'on sait que \hat{f} est uniformément continue, ce qui démontre la lemme.

La conclusion de ce lemme entraîne $\lim_{\hat{\mu} \in \mathfrak{B}_1} (A\hat{\mu} * \hat{f}) = \hat{f} * \hat{\mu}$ uniformément sur chaque compact et donc

$$\lim_{\hat{\mu} \in \mathfrak{B}_1} [(A\hat{\mu} * \hat{f}) \varphi_K] = (\hat{f} * \hat{\mu}) \varphi_K \text{ en } L^1(\hat{G}) \text{ où } K \text{ est compact,}$$

mais: $\lim_{\hat{\mu} \in \mathfrak{B}_1} [(A\hat{\mu} * \hat{f}) \varphi_K] = (A\hat{f}) \varphi_K$ en $L^1(\hat{G})$ en vertu de (I), donc $A\hat{f} = \hat{f} * \hat{\mu}$

loc. p.p. et donc p.p. pour chaque $\hat{f} \in K(\hat{G})$. A est continu. Nous avons vu dans la démonstration de la suffisance de la condition que l'application $\hat{f} \rightarrow \hat{f} * \hat{\mu}$ est aussi continue, donc

$$A\hat{f} = \hat{f} * \hat{\mu} \quad \text{pour chaque } \hat{f} \in L^1(\hat{G}).$$

Cela entraîne:

$$\psi \cdot T\hat{f} = T(A\hat{f}) = T(\hat{f} * \hat{\mu}) = T\hat{f} \cdot T\hat{\mu} \text{ (loc. p.p.)}$$

Comme les $T\hat{f}$ forment un ensemble uniformément dense dans l'ensemble des fonctions continues sur G et qui s'annulent à l'infini, on peut conclure que

$$\psi = T\hat{\mu} \text{ (loc. p.p.)}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] H. CARTAN et R. GODEMENT, « Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. », 64, pp. 79-99 (1947).
- [2] E. HILLE, *Functional analysis and semigroups*, « Am. Math. Soc. Coloq. », Public. XXXI, 1948, teor. 18.2.2, pp. 362-3.
- [3] L. LOOMIS, *An introduction to abstract harmonic analysis*. 1953, Van Nostrand Company, Toronto, New York, London, § 36 D Corollaire.

Geometria. — *Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti.* Nota I di GIUSEPPE TALLINI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. In un $S_{5,q}$ ⁽¹⁾ di coordinate proiettive omogenee $X_{ij} = X_{ji}$ ($i, j = 0, 1, 2$) le equazioni parametriche:

$$(1) \quad X_{ij} = x_i x_j \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

definiscono la superficie di Veronese ⁽²⁾ rappresentativa delle coniche di un $S_{2,q}$ di coordinate (x_0, x_1, x_2) . Essa, essendo in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con un $S_{2,q}$, contiene $q^2 + q + 1$ punti e ammette altrettanti piani tangenti, e, se q è dispari, gode della proprietà di avere i suoi piani tangenti a due a due incidenti e tali che mai più di due passino per uno stesso punto ⁽²⁾.

Allo scopo di caratterizzare la totalità dei piani tangenti ad una siffatta superficie di un $S_{5,q}$, con q dispari, mediante la sola suddetta proprietà grafica relativa ad un sistema di piani, abbiamo rivolto l'indagine agli *insiemi di*

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) Con $S_{n,q}$ si denota — secondo l'uso — uno spazio lineare finito di dimensione n costruito su un campo di Galois di ordine $q = p^k$, p (primo) essendo la caratteristica del campo. È noto che un $S_k \subseteq S_n$ ($k = 0, 1, \dots, n$) possiede $q^k + q^{k-1} + \dots + q + 1$ punti. Cfr. per esempio B. SEGRE [4], §§ 12, 17. (I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della presente Nota).

(2) Cfr. E. BERTINI [1], cap. 15° e 16°, dove è fatto lo studio della superficie di Veronese di uno spazio complesso, ma l'argomentazioni ivi fatte si possono trasportare, senza sostanziali modifiche, al caso di uno spazio costruito su di un qualsiasi campo infinito o finito di caratteristica $p \neq 2$.

k piani congiunti da un $S_{r,q}$ ($r \geq 5$, q dispari) a due a due incidenti e tali che mai più di due passino per uno stesso punto, ed abbiamo dimostrato, giungendo così alla voluta caratterizzazione, che, non appena si supponga $k \geq q^2 + q + 1$, un tale insieme costituisce la totalità dei piani tangenti ad una superficie di Veronese ⁽³⁾, risultando quindi necessariamente $r = 5$ e $k = q^2 + q + 1$.

Dimostreremo ciò in una successiva Nota II. Qui faremo alcune premesse necessarie per quella dimostrazione.

Osserviamo intanto che il sistema dei piani tangenti alla superficie di Veronese si muta per dualità, se q è dispari, nel sistema dei piani secanti in coniche tale superficie, ed inoltre i piani di ciascuno dei due sistemi descrivono una stessa ipersuperficie del terzo ordine, M_4^3 ⁽²⁾. Dalla precedente caratterizzazione se ne deduce allora per dualità una analoga, relativa alla totalità dei piani secanti in coniche la superficie. Si riesce così a caratterizzare in doppio modo, con proprietà grafiche, la M_4^3 , come luogo di piani.

2. Denotiamo con \mathfrak{S} un insieme di $q^2 + q + 1$ piani, congiunti da un $S_{5,q}$ ($q = p^h$, $p \nmid 2$), a due a due incidenti in un solo punto e tali che mai più di due passino per uno stesso punto. Stabiliremo in questo e nei successivi numeri della Nota I, alcune proprietà di un tale insieme. Nella Nota II approfondiremo l'indagine dimostrando che \mathfrak{S} coincide con la totalità dei piani tangenti ad una superficie di Veronese. Da ciò faremo poi seguire la proposizione enunciata al n. 1.

Sia τ un piano di \mathfrak{S} , i rimanenti $q^2 + q$ piani incontrano τ in $q^2 + q$ punti, tra loro distinti. Tra i $q^2 + q + 1$ punti di τ esisterà allora uno e un sol punto T da cui non esce nessun ulteriore piano di \mathfrak{S} . Al variare di τ in \mathfrak{S} il punto T , associato nel modo anzidetto a τ , varia descrivendo un insieme di $q^2 + q + 1$ punti distinti che indicheremo con \mathfrak{T} , diremo poi che τ è tangente ad \mathfrak{T} in T e che T ne è il punto di tangenza.

Considerato ora un qualsiasi iperpiano di $S_{5,q}$, sia τ un piano di \mathfrak{S} non contenuto in esso e che lo interseca quindi in una retta t . Gli eventuali piani di \mathfrak{S} contenuti nell'iperpiano debbono incontrare τ ciascuno in un punto di t ; poiché questi punti sono $q + 1$ e per ognuno di essi passa al più un piano di \mathfrak{S} , distinto da τ , si ha che:

Un iperpiano di $S_{5,q}$ contiene al più $q + 1$ piani di \mathfrak{S} .

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

Nessun iperpiano di $S_{5,q}$ può contenere k piani di \mathfrak{S} , con $2 \leq k \leq q$.

(3) Questa proposizione è l'analogo, negli spazi finiti, del ben noto Teorema (P. DEL PEZZO [2], n. 12 e E. BERTINI [1], cap. 15°, n. 7) affermando che: *l'unica superficie irriducibile, non conica, di un S_r ($r \geq 5$) complesso, avente i piani tangenti a due a due incidenti è la superficie di Veronese dell' S_5* . Le ipotesi che si fanno nel precedente Teorema sono due: una di carattere grafico (l'incidenza dei piani tangenti) e l'altra di carattere differenziale (l'esistenza della superficie a cui quei piani sono tangenti). Passando agli spazi finiti quest'ultima ipotesi viene sostituita — come è nella natura dei problemi ad essi relativi — da una disuguaglianza numerica ($k \geq q^2 + q + 1$).

Ragionando per assurdo, supponiamo che esista un S_4 contenente k piani di \mathfrak{F} , con $2 \leq k \leq q$. Cominciamo a provare che, in questa ipotesi, per ognuno dei suddetti piani passa almeno un altro iperpiano, distinto dall' S_4 , contenente un numero di piani di \mathfrak{F} soggetto alle stesse limitazioni di k . Infatti, se così non fosse, esisterebbe un piano $\tau \subset S_4$ di \mathfrak{F} , tale che ogni iperpiano per esso, distinto da S_4 , contenente più di un piano di \mathfrak{F} , ne conterebbe ulteriormente q distinti da τ . Detto m il numero di quest'ultimi iperpiani, dovendo ogni piano di \mathfrak{F} — non appartenente a S_4 — esser congiunto a τ da uno di questi iperpiani, si avrebbe evidentemente $mq = q^2 + q + 1 - k$, ma ciò è assurdo essendo $0 < k - 1 < q$.

Siano ora τ un qualsiasi piano di \mathfrak{F} , non contenuto in S_4 , e t la retta, ove esso interseca l' S_4 . Dimostriamo che *la t contiene il punto di tangenza di τ ad \mathfrak{F}* . Infatti, in caso contrario, per ognuno dei $q + 1$ punti di t passerebbe uno (e un sol) piano di \mathfrak{F} , distinto da τ : per k tra essi passerebbero i k piani di \mathfrak{F} appartenenti all' S_4 e per i rimanenti $q + 1 - k$ punti altrettanti piani di \mathfrak{F} non contenuti in S_4 . Sia τ^* uno di questi ultimi piani — certo esistente essendo $q + 1 - k \geq 1$ — e t^* la sua intersezione con l' S_4 . I k piani di \mathfrak{F} contenuti in S_4 , dovendo incidere τ in punti di t e τ^* in punti di t^* e non potendo passare per il punto $t \cap t^*$, incontreranno il piano $\alpha = t \cup t^*$ secondo k rette. Inoltre ognuno dei rimanenti $q - k$ piani di \mathfrak{F} , distinti da τ^* , uscenti dai punti di t e non contenuti in S_4 , incontrerà l' S_4 in una retta che dovrà giacere su α (altrimenti l' S_3 che la congiungerebbe con α , dovrebbe contenere i k piani di \mathfrak{F} appartenenti all' S_4 e ciò è escluso essendo $k \geq 2$). Su α esisterebbero allora $q + 2$ rette distinte intersezioni di α con altrettanti piani di \mathfrak{F} e quindi soggette alla condizione di essere a tre a tre indipendenti, e ciò è assurdo essendo q dispari ⁰⁴.

Data l'arbitrarietà di τ , da quanto ora dimostrato segue che \mathfrak{F} è contenuto in S_4 . Analogamente \mathfrak{F} appartiene ad ogni altro iperpiano contenente un numero di piani di \mathfrak{F} soggetto alle stesse limitazioni di k .

Siano ora τ' e τ'' due tra i $k (\geq 2)$ piani di \mathfrak{F} contenuti in S_4 . Per ognuno di essi passa almeno un iperpiano, distinto da S_4 , contenente \mathfrak{F} (cfr. terzultimo capoverso e capoverso prec.). Sia S'_4 quello che passa per τ' e S''_4 quello per τ'' . L' S'_4 incontra S_4 in un $S_3 \supset \tau'$, l' S''_4 non può evidentemente contenere tale S_3 e quindi lo interseca in un piano π , che incontra τ' in una retta r . I $q^2 + q + 1$ punti di \mathfrak{F} appartengono a S_4 , S'_4 , S''_4 e quindi alla loro intersezione che è π ; anzi \mathfrak{F} coincide con π , contenendo \mathfrak{F} e π lo stesso numero di punti. Ma ciò è assurdo, non potendo τ' ($\subset \mathfrak{F}$) avere tutta la retta r in comune con \mathfrak{F} (cfr. secondo capov.). L'assurdo prova l'asserto.

3. Sia S_4 un iperpiano di $S_{5,q}$ contenente $q + 1$ piani di \mathfrak{F} . Denotati con τ_1, τ_2, τ_3 tre qualsiasi tra questi, i punti $P_1 = \tau_2 \cap \tau_3$, $P_2 = \tau_3 \cap \tau_1$, $P_3 = \tau_1 \cap \tau_2$ sono evidentemente indipendenti e determinano un piano π .

(4) È noto che in un $S_{2,q}$, con q dispari, il massimo numero di punti a tre a tre indipendenti è $q + 1$, e dualmente. Cfr. B. QVIST [3], § 1.

Dimostriamo che la retta $P_1 P_2$ contiene il punto di tangenza di τ_3 ad \mathfrak{F} (analogamente per le rette $P_2 P_3$ e $P_3 P_1$). Infatti, se così non fosse, da ognuno dei $q + 1$ punti di $P_1 P_2$ passerebbe uno (e un sol) piano di \mathfrak{F} , diverso da τ_3 . Essendo i piani di \mathfrak{F} contenuti in S_4 e distinti da τ_3 , in numero di q , esisterebbe almeno un punto di $P_1 P_2$ per il quale uscirebbe un piano di \mathfrak{F} non contenuto in S_4 . Detto τ^* questo piano, la retta $t^* = \tau^* \cap S_4$ dovrebbe giacere su π (altrimenti $l'S_3 = t^* \cup \pi$, dovendo contenere oltre alle rette $P_2 P_3 (\subset \tau_1)$ e $P_3 P_1 (\subset \tau_2)$ anche i punti $\tau_1 \cap \tau^* = \tau_1 \cap t^*$ e $\tau_2 \cap \tau^* = \tau_2 \cap t^*$, dovrebbe contenere τ_1 e τ_2). Tra i $q + 1$ piani di \mathfrak{F} uscenti dai punti della $P_1 P_2$ allora, quelli appartenenti all' S_4 , dovendo incontrare τ^* in punti di t^* , intersecherebbero π secondo rette, quelli, come τ^* , non contenuti in S_4 incontrerebbero ancora π secondo rette, ne seguirebbe allora l'esistenza di $q + 2$ piani (τ e i $q + 1$ suddetti) intersecanti π secondo altrettante rette distinte, e ciò è assurdo (cfr. terzultimo capov. n. 2, in fine).

Data l'arbitrarietà di τ_1, τ_2, τ_3 da quanto dimostrato segue che:

Comunque si considerino tre piani di \mathfrak{F} , contenuti nell' S_4 , i loro punti di tangenza con \mathfrak{F} giacciono rispettivamente sulle rette congiungenti a due a due i punti d'incontro (distinti e indipendenti) dei tre piani.

Sia ora τ un qualsiasi piano di \mathfrak{F} contenuto in S_4 e distinto da τ_1, τ_2, τ_3 . Posto $P' = \tau \cap \tau_1$ e $P'' = \tau \cap \tau_2$, i punti di tangenza di τ_1 e τ_2 con \mathfrak{F} debbono appartenere rispettivamente sia alle rette $P' P_3$ e $P'' P_3$ sia alle rette $P_1 P_3$ e $P_2 P_3$ (cfr. la prec. prop. riferita una prima volta a τ, τ_1, τ_2 e una seconda volta a τ_1, τ_2, τ_3). Onde necessariamente τ deve incontrare π nella retta $P' P''$, la quale dovrà contenere il punto di tangenza di τ con \mathfrak{F} .

Data l'arbitrarietà di τ ne segue che i $q + 1$ piani di \mathfrak{F} contenuti in S_4 incontrano π secondo altrettante rette tra loro distinte, ciascuna delle quali contiene il punto di tangenza con \mathfrak{F} del piano di \mathfrak{F} per essa. Queste $q + 1$ rette, appartenendo a piani di \mathfrak{F} , sono a tre a tre indipendenti, e quindi inviluppano una conica (in base al duale di un ben noto Teorema dovuto a B. Segre [5] e [6]), i punti della conica risultando evidentemente i punti di tangenza con \mathfrak{F} dei piani di \mathfrak{F} contenuti in S_4 .

Osserviamo infine che un qualsiasi altro piano di \mathfrak{F} , non contenuto in S_4 , interseca S_4 in una retta, per i $q + 1$ punti della quale passano i $q + 1$ piani di S_4 , uno per ogni tale punto, onde il punto di tangenza di quel piano con \mathfrak{F} non può giacere in S_4 .

Si conclude dunque, tenendo anche presente il n. 2, con la proposizione seguente:

Un iperpiano di $S_{5,q}$, avente più di un piano in comune con \mathfrak{F} , contiene esattamente $q + 1$ piani di \mathfrak{F} , i cui $q + 1$ punti di tangenza con \mathfrak{F} giacciono tutti in un piano π e costituiscono ivi una conica (non degenera), le tangenti ad essa essendo le rette sezioni dei suddetti piani con π . Inoltre l'iperpiano incontra \mathfrak{F} solamente nei punti di quella conica.

4. Siano T_1 e T_2 due distinti punti di \mathfrak{F} e τ_1 e τ_2 i piani tangenti in essi ad \mathfrak{F} . I punti $P = \tau_1 \cap \tau_2, T_1, T_2$ sono ovviamente indipendenti e determi-

nano un piano π , il quale interseca \mathfrak{F} in una conica (non degenera), tangente in T_1 e T_2 alle rette $T_1 P$ e $T_2 P$ (n. 3, ultima prop.). Al variare comunque di T_1 e T_2 su \mathfrak{F} si ottiene, nel modo anzidetto, un insieme di piani π che sarà indicato con \mathfrak{S}^* , ogni piano dell'insieme ottenendosi $\binom{q+1}{2}$ volte a partire da due qualunque punti distinti della conica sezione del piano con \mathfrak{F} . Onde i piani distinti di \mathfrak{S}^* sono in numero di $\binom{q^2+q+1}{2} / \binom{q+1}{2} = q^2 + q + 1$. Da quanto ora detto segue evidentemente anche che:

I punti dell'insieme \mathfrak{F} risultano a tre a tre non allineati.

Chiameremo allora *secante* \mathfrak{F} una retta avente due punti distinti in comune con \mathfrak{F} , e *tangente* in un punto T ad \mathfrak{F} una retta per T giacente nel piano tangente in T ad \mathfrak{F} .

Per una retta secante \mathfrak{F} passa evidentemente uno e un sol piano di \mathfrak{S}^* . Sia ora t una retta tangente ad \mathfrak{F} in un suo punto T e $\tau(\supset t)$ il piano tangente ad \mathfrak{F} in T . Per un punto P di t , distinto da T , passa un piano τ' di \mathfrak{S} , diverso da τ e tangente ad \mathfrak{F} in un punto T' . Il piano $TT'P$ appartiene a \mathfrak{S}^* , anzi, esso è l'unico piano di \mathfrak{S}^* per t , in quanto ogni piano di \mathfrak{S} uscente da un punto di t appartiene all' $S_4 = \tau \cup \tau'$ e quindi è tangente ad \mathfrak{F} in un punto della conica sezione di \mathfrak{F} con il piano $TT'P$ (n. 3, ultima prop.). Si ha dunque che:

Per una secante o una tangente ad \mathfrak{F} passa uno ed un sol piano di \mathfrak{S}^ . Inoltre da un punto T di \mathfrak{F} escono esattamente $q+1$ piani di \mathfrak{S}^* , intersecanti il piano tangente ad \mathfrak{F} in T nelle sue $q+1$ rette tangenti per T , ognuna di tale retta essendo la tangente in T alla conica sezione del piano di \mathfrak{S}^* per la retta, con \mathfrak{F} .*

Siano π un qualsiasi piano di \mathfrak{S}^* e \mathbb{C} la conica sezione di π con \mathfrak{F} . I piani di \mathfrak{S}^* , distinti da π , sono $q^2 + q$: da un punto di \mathbb{C} escono q tra tali piani, distinti tra loro, ognuno dei quali non può contenere nessun altro punto di \mathbb{C} (cfr. prop. prec.). Onde per i $q+1$ punti di \mathbb{C} passano evidentemente tutti i $q^2 + q$ piani di \mathfrak{S}^* diversi da π . Ne segue, data l'arbitrarietà di π , che due piani di \mathfrak{S}^* s'incontrano sempre almeno in un punto, il quale appartiene ad \mathfrak{F} . Questo punto è anzi unico, altrimenti i due piani s'incontrerebbero in una retta per il punto, che risulterebbe o secante o tangente alla \mathfrak{F} e ciò è escluso (cfr. prop. prec.). Rimane dunque dimostrato che:

I $q^2 + q + 1$ piani di \mathfrak{S}^ sono a due a due incidenti in uno e un sol punto che appartiene ad \mathfrak{F} .*

BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, 2ª ed. (Messina, Principato, 1923).
- [2] P. DEL PEZZO, *Sulle superficie dell' n°mo ordine immerse nello spazio di n dimensioni*, « Rend. Circ. Mat. Palermo », 1 (1887), n. 12.
- [3] B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Ann. Ac. Sc. Fennicae », ser. A, I, n. 134 (1952).
- [4] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948).
- [5] B. SEGRE, *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8) 17, pp. 141-142 (1954).
- [6] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, « Canadian Journal of Math. », 7, pp. 414-416 (1955).

Geometria. — *Sulle superficie aritmeticamente regolari ed aritmeticamente normali.* Nota di **ERMANNIO MARCHIONNA**, presentata (*) dal Socio **O. CHISINI**.

INTRODUZIONE (1).

Sopra una superficie algebrica di genere aritmetico p_a (appartenente ad uno spazio proiettivo complesso), si consideri un sistema lineare completo $|C|$ di curve che abbia dimensione r , grado n , genere π , ed indice di specialità j . Come è noto, si ha

$$r = n - \pi + p_a - j + 1 + s,$$

ed è $s \geq 0$ (Teorema di Riemann-Roch relativo alle superficie) (2). Il termine s è la cosiddetta *sovrabbondanza* del sistema completo $|C|$.

Per un sistema lineare incompleto C la sovrabbondanza è, per definizione, quella del sistema completo $|C|$ (individuato da una sua curva totale).

Un sistema lineare (completo o no) si dice *regolare* quando la sua sovrabbondanza è nulla (3).

Nel seguito diremo che *una superficie appartenente ad uno spazio S_r è aritmeticamente regolare se le ipersuperficie di un ordine qualsiasi l tagliano sopra di essa un sistema regolare* (4).

Per evitare confusioni diremo poi *topologicamente regolare* una superficie che abbia nulla l'irregolarità (topologica) $p_g - p_a$, vale a dire che sia regolare nel senso comunemente usato.

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) Qui e nel seguito i numeri fra parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

(2) Per l'applicazione del teorema di Riemann-Roch ci riferiremo sempre ad un sistema virtualmente privo di punti base: i numeri n, π saranno quindi caratteri virtuali del sistema.

Ricordiamo anche che il teorema di Riemann-Roch sussiste non solo per sistemi effettivi irriducibili, ma anche per sistemi riducibili e per sistemi virtuali.

(3) Nei primi lavori di Castelnuovo ed Enriques sull'argomento, un sistema $|C|$ viene detto regolare quando è uguale a zero, non solo la sovrabbondanza s , ma anche l'indice di specialità j . La definizione adottata nel testo è quella data da ENRIQUES in [3], p. 133.

(4) Per quanto non interessi il seguito, notiamo che una qualsiasi superficie algebrica irriducibile F può essere trasformata birazionalmente in una superficie F^* aritmeticamente regolare.

Infatti su F esistono sistemi semplici $|C|$, tali che $|C|$ e tutti i suoi multipli sono regolari (Cfr. ad esempio CASTELNUOVO [1], n. 43; oppure ENRIQUES [3], p. 148). Ora, se si riferisce proiettivamente un tale sistema $|C|$, di dimensione r abbastanza grande, ad un sistema d'iperpiani di S_r , si trasforma appunto la F in una superficie F^* (ad essa birazionalmente identica) la quale risulta aritmeticamente regolare.

Ciò posto consideriamo in S_r due superficie Ψ e Ψ' non singolari (cioè irriducibili e prive di punti multipli) tra di loro *complementari*, formanti insieme l'intersezione completa di $r - 2$ ipersuperficie degli ordini n_1, n_2, \dots, n_{r-2} . Indichiamo con q l'irregolarità di Ψ , con Δ_l, s_l la deficienza e la sovrabbondanza del sistema segato su Ψ dalle ipersuperficie d'ordine l ; diciamo q', Δ'_l, s'_l gli analoghi caratteri di Ψ' .

Poniamo inoltre $\rho = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-2} - r - 1$.

Sussiste, come vedremo nel n. 4, il

TEOREMA 1. — Per $l > \rho$ è

$$s_l = s'_l = \Delta_l = \Delta'_l = 0.$$

Per $l = \rho$ è

$$s_\rho = s'_\rho = 0 \quad ; \quad \Delta_\rho = q' \quad ; \quad \Delta'_\rho = q^{(5)}.$$

Per $l < \rho$ è

$$\Delta_l + \Delta'_{\rho-l} = s_l + s'_{\rho-l}.$$

Ricordiamo ora che una varietà algebrica irriducibile di S_r si dice *aritmeticamente normale* se le ipersuperficie d'un ordine qualsiasi l tagliano su di essa un sistema completo.

Abbiamo visto in [7] che, a differenza di quel che succede per le curve (Gaeta, [4]), date due superficie complementari e non singolari una di esse può essere aritmeticamente normale e l'altra no.

Orbene, dal teorema 1 (e dal fatto che i caratteri Δ_l, s_l sono per loro natura non negativi) segue immediatamente che la *condizione necessaria e sufficiente affinché due superficie complementari, non singolari, siano insieme aritmeticamente normali è che esse siano topologicamente ed aritmeticamente regolari*.

Da questa proprietà dedurremo, nel n. 6, il

TEOREMA 2. — La generica sezione iperpiana di una superficie Ψ aritmeticamente normale (non singolare) risulta essa pure aritmeticamente normale se, e solo se, una superficie Ψ' (non singolare) complementare di Ψ è aritmeticamente normale.

1. Alla dimostrazione dei teoremi 1 e 2 premettiamo (in questo paragrafo e nei successivi nn. 2, 3) alcune osservazioni e qualche richiamo.

Cominciamo col notare che le più semplici superficie che sono *aritmeticamente normali, topologicamente regolari ed aritmeticamente regolari* sono le *superficie non singolari intersezioni complete di $r - 2$ forme dello spazio ambiente S_r* . La circostanza che una superficie Φ siffatta sia aritmeticamente normale e (topologicamente) regolare è stata rilevata da Severi⁽⁶⁾.

Detti n_1, n_2, \dots, n_{r-2} gli ordini delle $r - 2$ forme di cui Φ è intersezione completa, e posto $\rho = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-2} - r - 1$, Severi ha anche osser-

(5) L'uguaglianza $\Delta_\rho = q'$ è stata rilevata da SEVERI (in [8], n. 21) sotto l'ipotesi, non essenziale, che sia $p_g > 0$. Severi ha pure notato che, per $l \geq \rho$, è $s_l = 0$.

(6) Cfr. [8], n. 11, 12.

vato che le forme A^l d'ordine $l \geq \rho$ tagliano su Φ un sistema regolare ⁽⁷⁾. Ma si dimostra che ciò accade anche per $l < \rho$ ⁽⁸⁾, il che significa appunto che Φ è aritmeticamente regolare.

(7) Cfr. [8], n. 13.

(8) A tale scopo consideriamo la curva Γ (non singolare) sezione di Φ con un iperpiano generico. Γ risulta intersezione completa di $r-1$ forme di S_r aventi gli ordini $n_1, n_2, \dots, n_{r-2}, 1$; quindi Γ è aritmeticamente normale e le forme d'ordine $\rho+1$ tagliano su di essa la serie canonica completa (cfr. [8], n. 10). Ricordiamo anche che le forme d'ordine ρ tagliano su Φ il sistema canonico completo ([8], n. 12).

Indichiamo ora con s_l la sovrabbondanza del sistema $|l\Gamma|$ tagliato su Φ dalle forme A^l e verifichiamo che, per qualsiasi l , è $s_l = 0$ (cioè che Φ è aritmeticamente regolare).

Ricordiamo che, se j_l è l'indice di specialità del sistema $|l\Gamma|$, ed i_l e δ_l sono l'indice di specialità e la deficienza della serie che il sistema $|l\Gamma|$ taglia su Γ , si ha (CASTELNUOVO [1], n. 39):

$$(\alpha) \quad s_{l-1} - j_{l-1} = (s_l - j_l) + (\delta_l - i_l).$$

Proviamo dapprima che

$$(\beta) \quad i_l = j_{l-1} - j_l.$$

Ciò è manifesto per $l > \rho + 1$ (perché allora è $i_l = j_l = j_{l-1} = 0$) ed anche per $l = \rho + 1$ ($i_{\rho+1} = j_\rho = 1$; $j_{\rho+1} = 0$); ma lo si verifica facilmente anche per $l \leq \rho$.

Infatti, dette R_h ed r_h le dimensioni del sistema e della serie segati rispettivamente su Φ e su Γ dalle forme d'ordine h (completi per qualsiasi h , poiché Φ e Γ sono aritmeticamente normali), si ha, per $l \leq \rho$,

$$j_l = R_{\rho-l} + 1 \quad ; \quad j_{l-1} = R_{\rho-l+1} + 1 \quad ; \quad i_l = r_{\rho-l+1} + 1.$$

Dopodiché, essendo, $r_{\rho-l+1} = R_{\rho-l+1} - R_{\rho-l} - 1$, resta provata la (β) . La (α) mostra ora che $\delta_l = s_{l-1} - s_l$; ma siccome Γ è aritmeticamente normale si ha $\delta_l = 0$ per qualsiasi l , cioè $s_{l-1} = s_l$. Basterà dunque provare che è nulla una particolare s_l perché lo siano tutte. A tale scopo si osservi che s_ρ indica la sovrabbondanza del sistema canonico di Φ , cioè l'irregolarità (topologica) q della Φ . Ma Φ è regolare, quindi $s_\rho = 0$; e con ciò l'asserto è dimostrato.

Indicando con N, P l'ordine ed il genere di Γ ($N = n_1 n_2 \dots n_{r-2} =$ ordine di Φ), con P_a il genere aritmetico di Φ , con ν_l, π_l, R_l il grado, il genere e la dimensione del sistema $|l\Gamma|$ tagliato su Φ dalle forme A^l , si ha

$$\nu_l = N l^2 \quad ; \quad \pi_l = N \binom{l}{2} + l(P-1) + 1;$$

$$R_l = \nu_l - \pi_l + P_a - j_l + 1 \quad ; \quad (j_l = 0 \text{ per } l > \rho, \quad j_l = R_{\rho-l} + 1 \text{ per } l \leq \rho).$$

Introducendo le postulazioni $\chi_l(\Phi)$ e $\chi_l(\Gamma)$ delle varietà Φ e Γ rispetto alle forme d'ordine l e ricordando che

$$R_l = \chi_l(\Phi) - 1 \quad , \quad P_a = \chi_\rho(\Phi) \quad , \quad P = \chi_{\rho+1}(\Gamma),$$

si ha per $l > \rho$

$$(\gamma) \quad \chi_l(\Phi) = N l^2 - \left[N \binom{l}{2} + l \chi_{\rho+1}(\Gamma) - l + 1 \right] + \chi_\rho(\Phi) + 2$$

e per $l < \rho$

$$(\delta) \quad \chi_l(\Phi) = N l^2 - \left[N \binom{l}{2} + l \chi_{\rho+1}(\Gamma) - l + 1 \right] + \chi_\rho(\Phi) - \chi_{\rho-l}(\Phi) + 2.$$

2. Consideriamo ora in S_r due varietà a $d > 0$ dimensioni, Ψ e Ψ' , non singolari e fra di loro complementari (cioè formanti insieme l'intersezione completa di $r - d$ ipersuperficie di S_r). Siano C e C' le varietà intersezioni rispettive di Ψ e Ψ' con un generico iperpiano S_{r-1} ; sia D la varietà $(d - 1)$ -dimensionale comune a Ψ e Ψ' .

Severi ha dimostrato che *la totalità delle ipersuperficie d'ordine l passanti per Ψ' ma non per Ψ (che egli chiama subaggiunte a Ψ) taglia su Ψ il sistema completo $|lC - D|$ ⁽⁹⁾.*

Ci si chiede ora se *dall'esistenza di un sistema effettivo $|lC - D|$ si può dedurre l'esistenza di ipersuperficie d'ordine l passanti per Ψ' e non per Ψ* (seganti così il sistema stesso). La risposta, come qui vedremo, è affermativa non solo per l abbastanza alto (il che è ovvio), ma per qualunque l .

Osserviamo innanzitutto che la domanda non è affatto oziosa ⁽¹⁰⁾ come potrebbe sembrare a prima vista. Infatti a priori potrebbe accadere che — quantunque esista $|lC - D|$ — per valori bassi di l tutte le ipersuperficie d'ordine l passanti per Ψ' contengano di conseguenza Ψ ; oppure che non esista addirittura nessuna forma d'ordine l contenente Ψ' .

Dimostriamo che tutto ciò è assurdo. Basterà provare la cosa per il più alto valore di l per cui si suppone che — pur esistendo effettivo il sistema $|lC - D|$ — non esistano forme d'ordine l passanti per Ψ' e non per Ψ (e per induzione essa risulterà poi dimostrata per i valori inferiori di l).

Dunque per ipotesi esistono forme A^{l+1} , d'ordine $l + 1$, che passano per Ψ' e non per Ψ (subaggiunte a Ψ), e segano su Ψ — fuori di D — il sistema $|(l + 1)C - D|$.

Il sistema $|lC - D|$ è tagliato dalle particolari subaggiunte A^{l+1} che passano ulteriormente per C . Sia B^{l+1} una di queste subaggiunte: essa passa anche per la varietà C' (sezione di Ψ' con l'iperpiano S_{r-1} di C) e contiene così tutta la varietà $C + C'$. Per $C + C'$ passa dunque anche la varietà B (d'ordine $l + 1$), sezione di S_{r-1} con la forma B^{l+1} .

Ricordiamo ora che *la varietà Φ composta da Ψ e Ψ' , essendo intersezione completa di $r - d$ forme, è di prima specie* (nel senso di Dubreil), cioè le ipersuperficie di un ordine qualunque λ passanti per Φ tagliano su un iperpiano generico S_{r-1} il sistema completo delle varietà $(r - 2)$ -dimensionali dello stesso ordine λ passanti per la sezione di Φ con S_{r-1} ⁽¹¹⁾,

Esiste pertanto una ipersuperficie H^{l+1} dell'ordine $l + 1$ passante per \bar{B} e contenente tanto Ψ quanto Ψ' (ma non S_{r-1}).

Nel fascio di forme $B^{l+1} + \mu H^{l+1}$, tutte passanti per \bar{B} , ve n'è una spezzata nell'iperpiano S_{r-1} ed in una forma residua K^l d'ordine l , cioè si ha

$$S_{r-1} K^l = B^{l+1} + \mu_0 H^{l+1}.$$

Poiché B^{l+1} ed H^{l+1} contengono la varietà Ψ' , questa giace anche su K^l (non potendo giacere su S_{r-1} data la sua genericità); inoltre K^l non può contenere Ψ , perché questa giace sopra H^{l+1} e non sopra B^{l+1} . Abbiamo così provato, contro l'ipotesi fatta, che esistono forme d'ordine l passanti per Ψ' e non per Ψ .

(9) Cfr. SEVERI [8], n. 6, 11. In verità ivi si trova soltanto la dimostrazione relativa alle curve ed alle superficie, ma come SEVERI ha osservato in [9], la dimostrazione stessa si trasporta con semplici cambiamenti di linguaggio a varietà di dimensione $d > 2$.

(10) E se la pone in [8] anche SEVERI, rispondendo affermativamente (con argomentazioni niente affatto ovvie) quando l non supera un certo valore ρ .

(11) Cfr. DUBREIL [2], p. 21. Va tuttavia rilevato che una dimostrazione della proprietà in questione era già stata data da SEVERI (in [8], n. 14) per il caso delle superficie, e che, con ovvie varianti di linguaggio, la stessa dimostrazione può essere adattata al caso generale.

3. D'ora in avanti indicheremo con Ψ e Ψ' due superficie di S_r ($r > 3$), non singolari, fra di loro complementari, formanti l'intersezione completa di $r-2$ ipersuperficie degli ordini n_1, n_2, \dots, n_{r-2} .

Chiameremo ancora C, C' le sezioni di Ψ e Ψ' con un generico iperpiano S_{r-1} , e D la curva intersezione di Ψ e Ψ' .

Indicheremo inoltre con:

$\Psi + \Psi'$ la superficie complessiva formata da Ψ e Ψ' ;

$C + C'$ la curva complessiva formata da C, C' ;

m, m', δ gli ordini rispettivi di Ψ, Ψ' (e quindi di C, C') e della curva D ;

p_a, p_g, q il genere aritmetico, il genere geometrico, e l'irregolarità $q = p_g - p_a$ della Ψ ;

p'_a, p'_g, q' gli analoghi caratteri di Ψ' ;

p, p', π i generi delle curve C, C', D ;

$\chi_l(V)$ la postulazione di una varietà V rispetto alle forme A^l d'ordine l , cioè il numero delle condizioni indipendenti che occorre imporre ad una A^l generica affinché essa contenga V .

Porremo poi

$$(1) \quad \rho = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-2} - r - 1.$$

Fra i caratteri indicati si hanno le seguenti relazioni

$$(2) \quad m + m' = n_1 n_2 \dots n_{r-2}$$

$$(3) \quad \delta = (\rho + 1)m - (2p - 2) = (\rho + 1)m' - (2p' - 2)$$

$$(4) \quad \rho\delta = 2\pi - 2$$

$$(5) \quad \chi_{\rho+1}(C + C') = p + p' + \delta - 1$$

$$(6) \quad \chi_\rho(\Psi + \Psi') = p_a + p'_a + \pi^{(12)}.$$

Si ha inoltre per $l > \rho$

$$(7) \quad \chi_l(\Psi + \Psi') = (m + m')l^2 - (m + m')\binom{l}{2} - l(p + p' + \delta - 2) + p_a + p'_a + \pi + 1$$

e per $l < \rho$

$$(8) \quad \chi_l(\Psi + \Psi') = (m + m')l^2 - (m + m')\binom{l}{2} - l(p + p' + \delta - 2) + p_a + p'_a + \pi + 1 - \chi_{\rho-l}(\Psi + \Psi')^{(13)}.$$

(12) Per tutte queste formule, cfr. [8], n. 3, 4, 22.

(13) Per verificare le (7), (8) ricordiamo che se Φ è una superficie irriducibile intersezione completa di $r-2$ forme aventi gli stessi ordini di quelle che s'intersecano secondo la superficie spezzata $\Psi + \Psi'$ si ha

$$\chi_l(\Phi) = \chi_l(\Psi + \Psi').$$

Cosìpure, detta Γ la generica sezione iperpiana di Φ , si ha

$$\chi_l(\Gamma) = \chi_l(C + C').$$

E tutto questo perché la postulazione relativa ad una qualsiasi varietà intersezione completa di h forme di S_r (la quale sia irriducibile o anche spezzata in parti semplici della stessa dimensione $r-h$) dipende solo da l e dagli ordini delle h forme suddette (Cfr. ad esempio [8], n. 1).

Le (7), (8) si ottengono quindi dalle relazioni (7) e (8) - scritte al termine della nota (8) del n. 1 - tenendo conto delle (2), (5), (6).

Consideriamo ora il sistema C_l segato su Ψ dalle forme A^l , sistema che eventualmente, completato dà il sistema $|lC|$.

Indichiamo con m_l, p_l, j_l, s_l il grado, il genere, l'indice di specialità, la sovrabbondanza del sistema $|lC|$, e con r_l, Δ_l , la dimensione e la deficienza del sistema C_l .

Per il teorema di Riemann-Roch si ha

$$r_l + \Delta_l = m_l - p_l + p_a - j_l + 1 + s_l,$$

ed è noto che

$$(9) \quad m_l = ml^2$$

$$(10) \quad p_l = m \binom{l}{2} + l(p-1) + 1$$

$$r_l = \chi_l(\Psi) - 1.$$

Pertanto

$$(11) \quad \chi_l(\Psi) = ml^2 - m \binom{l}{2} - l(p-1) + p_a - j_l + s_l - \Delta_l + 1.$$

Ricordiamo che *il sistema canonico completo è segato su Ψ (fuori della curva D comune a Ψ, Ψ') dalle forme d'ordine ρ passanti per Ψ' e non contenenti Ψ ⁽¹⁴⁾, cioè è il sistema $|\rho C - D|$.*

Se $l \geq \rho$ il sistema $|lC|$ è certo non speciale ($j_l = 0$); tenendo conto delle (7), (11) si ha dunque

$$(12) \quad \chi_l(\Psi + \Psi') - \chi_l(\Psi) = m'l^2 - m' \binom{l}{2} - l(p'-1) - l\delta + p'_a + \pi - s_l + \Delta_l.$$

Per $l = \rho$, le (6), (11) danno

$$(13) \quad \chi_\rho(\Psi + \Psi') - \chi_\rho(\Psi) = p'_a + \pi - \left[m\rho^2 - m \binom{\rho}{2} - \rho(p-1) \right] - 1 - s_\rho + \Delta_\rho.$$

Se invece è $l < \rho$, il sistema $|lC|$ può essere speciale; il suo sistema residuo rispetto al sistema canonico è allora il sistema $|(p-l)C - D|$, il quale è segato su Ψ (fuori di D) dalle forme d'ordine $\rho - l$ passanti per Ψ' e non per Ψ .

Pertanto

$$j_l = \chi_{\rho-l}(\Psi + \Psi') - \chi_{\rho-l}(\Psi') \quad (15).$$

Tenendo conto di ciò e delle (8), (11), si conclude che per $l < \rho$ si ha

$$(14) \quad \chi_l(\Psi + \Psi') - \chi_l(\Psi) = m'l^2 - m' \binom{l}{2} - l(p'-1) - l\delta + p'_a + \pi - \chi_{\rho-l}(\Psi') - s_l + \Delta_l.$$

Determiniamo ora una nuova espressione della differenza $\chi_l(\Psi + \Psi') - \chi_l(\Psi)$. A tale scopo osserviamo che sopra la superficie Ψ' il sistema completo $|lC' - D|$, qualora esista, è segato dalle forme d'ordine l passanti per Ψ e non per Ψ' (si ricordi il n. 2). Indicando con $R'_l, \mu'_l, \pi'_l, h'_l, \sigma'_l$ rispettivamente la dimensione, il grado, il genere, l'indice di specialità e la sovrabbondanza del sistema $|lC' - D|$, si ha

$$R'_l = \chi_l(\Psi + \Psi') - \chi_l(\Psi) - 1 = \mu'_l - \pi'_l + p'_a - h'_l + \sigma'_l + 1;$$

(14) Cfr. [8], n. 18, 21.

(15) Si noti che $j_l = 0$ quando non esiste effettivo il sistema $|(p-l)C - D|$; e questo avviene (per quanto è stato detto nel n. 2) quando - e solo quando - mancano forme $Ae-l$ passanti per Ψ' e non per Ψ , cioè proprio quando $\chi_{\rho-l}(\Psi + \Psi') = \chi_{\rho-l}(\Psi')$.

e poich 

$$(15) \quad \mu'_l - \pi'_l = m' l^2 - m' \binom{l}{2} - l(p' - 1) - l\delta + \pi - 2 \quad (16)$$

si ottiene

$$(16) \quad \chi_l(\Psi + \Psi') - \chi_l(\Psi) = m' l^2 - m' \binom{l}{2} - l(p' - 1) - l\delta + p'_a + \pi - h'_l + \sigma'_l.$$

Per $l > \rho$ il sistema $|lC' - D|$   non speciale ($h'_l = 0$) e si ha

$$(12') \quad \chi_l(\Psi + \Psi') - \chi_l(\Psi) = m' l^2 - m' \binom{l}{2} - l(p' - 1) - l\delta + p'_a + \pi + \sigma'_l.$$

Per $l = \rho$ il sistema $|lC' - D|$   il sistema canonico di Ψ' ($h_\rho = 1$) e si ha

$$(13') \quad \chi_\rho(\Psi + \Psi') - \chi_\rho(\Psi) = m' \rho^2 - m' \binom{\rho}{2} - \rho(p' - 1) - \rho\delta + p'_a + \pi - 1 + \sigma'_\rho.$$

Per $l < \rho$ il sistema $|lC' - D|$   speciale. Il suo sistema residuo rispetto al sistema canonico,   il sistema $|(\rho - l)C'|$, che   tagliato su Ψ' (almeno parzialmente) dalle superficie d'ordine $\rho - l$. Si ha cio 

$$h'_l = \chi_{\rho-l}(\Psi') + \Delta'_{\rho-l}.$$

Notiamo anche che la sovrabbondanza σ'_l del sistema speciale $|lC' - D|$   uguale alla sovrabbondanza $s'_{\rho-l}$ del sistema residuo $|(\rho - l)C'|$ ⁽¹⁷⁾.

Per $l < \rho$ la (16) acquista dunque la forma

$$(14') \quad \chi_l(\Psi + \Psi') - \chi_l(\Psi) = m' l^2 - m' \binom{l}{2} - l(p' - 1) - l\delta + p'_a + \pi - \chi_{\rho-l}(\Psi') - \Delta'_{\rho-l} + s'_{\rho-l}.$$

Le relazioni (12'), (13'), (14') sono valide anche quando il sistema $|lC' - D|$ non   effettivo, poich  il teorema di Riemann-Roch sussiste anche per sistemi virtuali (cfr. ad esempio [3], p. 146).

4. Dimostriamo ora il teorema 1 enunciato nell'introduzione. Verifichiamo dapprima che per $l \geq \rho$   nulla la sovrabbondanza s_l del sistema C_l segato su Ψ dalle forme A^l .

La cosa   vera per l abbastanza alto perch  un multiplo $|lC|$ sufficientemente alto di un sistema semplice C (almeno ∞^2)   regolare ⁽¹⁸⁾; si tratta quindi di provarla per induzione discendente da l alto fino a ρ .

(16) A tale scopo si indichi con d il grado virtuale della D e si ricordi che D incontra una curva C' - sezione iperpiana di Ψ' - in δ punti (δ : ordine di D) ed una curva $|lC' - D|$ in $l\delta - d$ punti. Si osservi poi che il sistema $|lC'|$   somma dei sistemi $|lC' - D|$ e $|D|$. Dopodich , dalle note formule che danno il grado ed il genere di un sistema somma di due altri, si ottengono le relazioni

$$m'_l = \mu'_l + d + 2(l\delta - d) \quad ; \quad p'_l = \pi'_l + \pi + (l\delta - d) - 1.$$

Di qui, sottraendo membro a membro e ricordando che per le (9), (10)   $m'_l = m' l^2$, $p'_l = m' \binom{l}{2} + l(p' - 1) + 1$, si ricava la (15).

(17) Cfr. ad esempio ENRIQUES [3], p. 134. La propriet  in questione vale anche per sistemi virtuali (come   stato messo in luce da Severi).

(18) Cfr. CASTELNUOVO [1], n. 43, oppure ENRIQUES [3], p. 148.

Ricordiamo che

$$s_{l-1} - j_{l-1} = (s_l - j_l) + (\delta_l - i_l)$$

ove j_l indica l'indice di specialità del sistema $| \mathcal{L}C |$, δ_l la deficienza della serie che il sistema $| \mathcal{L}C |$ taglia sopra una C , ed i_l l'indice di specialità di detta serie (resa completa) ⁽¹⁹⁾.

Ricordiamo anche che per $l \geq \rho$ il sistema $| \mathcal{L}C |$ è non speciale ($j_l = 0$), e che per $l > \rho$ il sistema C_l (ed a maggior ragione il sistema completo $| \mathcal{L}C |$) taglia su C una serie completa non speciale ($i_l = \delta_l = 0$) ⁽²⁰⁾.

Pertanto per $l > \rho$ si ha $s_l = s_{l-1}$.

Ma $s_l = 0$ per l alto, quindi $s_l = 0$ per $l \geq \rho$. (Naturalmente, data la simmetria con cui compaiono le superficie Ψ e Ψ' nella questione trattata, per $l \geq \rho$ si avrà anche $s'_l = 0$).

Verifichiamo ora che per $l > \rho$ si ha $\Delta_l = 0$ (ed analogamente $\Delta'_l = 0$). A tale scopo confrontiamo le due espressioni della differenza $\chi_l(\Psi + \Psi') - \chi_l(\Psi)$ date - per $l > \rho$ - dalle (12), (12'). Otteniamo

$$\sigma'_l = \Delta_l - s_l;$$

e poiché $s_l = 0$,

$$\sigma'_l = \Delta_l.$$

D'altra parte un classico teorema afferma che il sistema *aggiunto* ad un sistema irriducibile semplice almeno ∞^3 è *regolare* ⁽²¹⁾. Quindi il sistema $| \mathcal{L}C' - D |$ di Ψ' , essendo aggiunto al sistema $| (l - \rho) C' |$ ⁽²²⁾ (il quale ha almeno dimensione r , con $r > 3$), ha sovrabbondanza nulla ($\sigma'_l = 0$); di conseguenza $\Delta_l = 0$.

Esaminiamo il caso $l = \rho$.

Il confronto delle (13), (13') mostra che

$$\Delta_\rho - s_\rho - \sigma'_\rho = (m + m') \rho^2 - (m + m') \binom{\rho}{2} - \rho(p + p' + \delta - 2).$$

Tenendo conto della (3) si vede che il secondo membro di questa relazione è identicamente nullo, per cui

$$\Delta_\rho - s_\rho - \sigma'_\rho = 0;$$

ed essendo $s'_\rho = 0$, si ottiene

$$\Delta_\rho = \sigma'_\rho.$$

(19) Cfr. CASTELNUOVO [1], n. 39.

(20) Cfr. SEVERI [8], n. 10.

(21) Cfr. PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, Gauthier Villars, volume II, p. 437, ed ENRIQUES [3], p. 138, e 147.

(22) Infatti la differenza dei due sistemi $| \mathcal{L}C' - D |$ e $| (l - \rho) C' |$ è il sistema canonico $| \rho C' - D |$ della Ψ' .

Ma σ'_q è la sovrabbondanza del sistema canonico $|\rho C' - D|$ di Ψ'' ed è notoriamente data dall'irregolarità $q' = p'_g - p'_a$ di Ψ'' ⁽²³⁾. Pertanto

$$\Delta_q = q' \text{ (ed analogamente } \Delta'_q = q).$$

Infine, se confrontiamo le due espressioni (14), (14') della differenza $\chi_l(\Psi' + \Psi'') - \chi_l(\Psi')$ per $l < \rho$, abbiamo

$$\Delta_l + \Delta'_{q-l} = s_l + s'_{q-l}.$$

Il teorema 1 resta così completamente dimostrato.

5. Abbiamo già notato nell'introduzione che il teorema 1 mostra che la *condizione necessaria e sufficiente affinché due superficie complementari Ψ' e Ψ'' (non singolari) siano entrambe aritmeticamente normali* ($\Delta_l = \Delta'_l = 0$ per qualunque l) *è che esse siano entrambe topologicamente regolari* ($q = q' = 0$) *ed aritmeticamente regolari* ($s_l = s'_l = 0$ per qualunque l).

Il fatto che nella proprietà suindicata le due superficie complementari figurino *insieme* è essenziale.

Si potrebbe infatti supporre che per una singola superficie le tre proprietà di essere aritmeticamente normale, aritmeticamente regolare, topologicamente regolare, siano ciascuna conseguenza delle altre due; ma ciò di solito non avviene, come provano i seguenti esempi.

Consideriamo in S_4 una superficie Ψ_4 (del 4° ordine) proiezione generica di una superficie di Veronese. La Ψ_4 è non singolare, e due generiche ipersuperficie degli ordini n_1 ed n_2 passanti per Ψ_4 si tagliano ulteriormente secondo una superficie Ψ'_n (d'ordine $n = n_1 n_2 - 4$) pure non singolare.

In un altro lavoro abbiamo visto che mentre Ψ_4 non è aritmeticamente normale (in quanto gli iperpiani tagliano su di essa un sistema ovviamente incompleto di deficienza $\Delta_1 = 1$) la superficie complementare Ψ'_n è aritmeticamente normale ⁽²⁴⁾.

Applichiamo ora il teorema 1 alle superficie Ψ_4, Ψ'_n .

Supponiamo dapprima che sia $n_1 = n_2 = 3$ (Ψ'_n è allora una superficie del 5° ordine Ψ'_5). Si ha $\rho = n_1 + n_2 - 4 = 1$; $s_l = s'_l = 0$ per qualsiasi l ; $\Delta_l = \Delta'_l = 0$ per $l > 1$; ed anche $\Delta'_1 = 0$ perché Ψ'_5 è aritmeticamente normale. Ne segue

$$q = \Delta'_1 = 0 \quad ; \quad q' = \Delta_1 = 1.$$

La superficie Ψ_4 è dunque topologicamente ed aritmeticamente regolare ma non aritmeticamente normale; mentre Ψ'_5 è aritmeticamente normale, aritmeticamente regolare, ma non topologicamente regolare.

Supponiamo ora che sia $n_1 = 3, n_2 = 4$. La Ψ'_n diventa una Ψ'_8 ; $\rho = n_1 + n_2 - 5 = 2$; $q' = \Delta_2 = 0$; $\Delta_1 + \Delta'_1 = s_1 + s'_1$.

Poiché Ψ'_8 è aritmeticamente normale, si ha $\Delta'_l = 0$ ed in particolare $\Delta'_1 = 0$; d'altra parte abbiamo visto dianzi che $\Delta_1 = 1, s_1 = 0$. Ne segue $s'_1 = 1$.

Pertanto la superficie Ψ'_8 è topologicamente regolare, aritmeticamente normale ma non aritmeticamente regolare.

Questo esempio - contrariamente a quanto lasciava presagire l'analoga trattazione relativa alle curve - prova tra l'altro che:

a) dalla circostanza che una superficie Ψ'' non singolare sia topologicamente regolare ed aritmeticamente normale non segue affatto che una generica superficie Ψ' complementare di Ψ'' sia anch'essa aritmeticamente normale;

b) dall'ipotesi $q = q' = 0$ non si può dedurre l'uguaglianza $\Delta'_{q-l} = \Delta_l$.

(23) Invero il sistema canonico di Ψ'' ha dimensione $p'_g - 1$, genere virtuale $p'^{(1)}$, grado virtuale $p'^{(1)} - 1$, ed indice di specialità 1. Dal teorema di Riemann-Roch segue $\sigma'_q = p'_g - p'_a = q'$.

(24) Cfr. [7], n. 4.

6. Dimostriamo il teorema 2 enunciato nell'introduzione.

Precisamente consideriamo in S_r due superficie complementari Ψ e Ψ' (non singolari) e le curve C e C' tagliate sopra di esse da un iperpiano generico S_{r-1} (le curve C e C' sono ovviamente complementari). *Supponiamo inoltre che Ψ sia aritmeticamente normale. Allora la condizione necessaria e sufficiente affinché C risulti aritmeticamente normale è che anche la superficie complementare Ψ' sia aritmeticamente normale.*

La condizione è necessaria. Infatti se C è aritmeticamente normale anche la curva complementare C' è aritmeticamente normale⁽²⁵⁾; di conseguenza anche Ψ' è aritmeticamente normale⁽²⁶⁾. (E si noti che in questa parte della dimostrazione l'ipotesi che Ψ sia aritmeticamente normale è sovrabbondante, in quanto è una conseguenza dell'ipotesi che C sia aritmeticamente normale).

La condizione è sufficiente: cioè se Ψ e Ψ' sono aritmeticamente normali, le forme A^l d'un ordine qualsiasi l tagliano su C una serie g_l di deficienza $\delta_l = 0$. Come abbiamo ricordato nel n. 4, la cosa è già stata dimostrata da Severi per $l > \rho$ indipendentemente dalle ipotesi fatte; noi la verificheremo per $l \leq \rho$. Osserviamo dapprima che — essendo Ψ aritmeticamente normale — la serie g_l è segata su C dalle curve del sistema $| \mathcal{C} |$.

Riprendiamo inoltre in esame la relazione

$$s_{l-1} - j_{l-1} = (s_l - j_l) + (\delta_l - i_l),$$

ove, come al solito, s_l ed j_l sono la sovrabbondanza e l'indice di specialità del sistema $| \mathcal{C} |$, ed i_l è l'indice di specialità della serie g_l resa completa.

Poiché Ψ e Ψ' sono insieme aritmeticamente normali, esse sono aritmeticamente regolari ($s_l = s'_l = 0$ per qualunque l) ed

$$i_l = j_{l-1} - j_l + \delta_l.$$

Per far vedere che è sempre $\delta_l = 0$, si tratta dunque di provare che

$$i_l = j_{l-1} - j_l.$$

A tale scopo indichiamo con \bar{C} il gruppo di punti segato su C da un iperpiano generico e con \bar{D} il gruppo che l'iperpiano S_{r-1} di C e C' taglia sulla curva D intersezione di Ψ e Ψ' (\bar{D} è ovviamente il gruppo dei punti comuni a C e C').

È noto che le forme \bar{A}^h dell'iperpiano S_{r-1} passanti per C' e non contenenti C , se esistono, tagliano su C fuori di \bar{D} la serie completa $| h \bar{C} - \bar{D} |$; in particolare per $h = \rho + 1$ esse tagliano la serie canonica completa⁽²⁷⁾.

(25) Cfr. GAETA [4], p. 195.

(26) Ciò perché una varietà V_d è certamente aritmeticamente normale quando sia tale una sua generica sezione iperpiana. Questa proprietà è contenuta in un risultato più generale dovuto a SEVERI (cfr. [9], n. 2, osserv. 2^a), ma è stata enunciata in questa forma da GAETA ([4], p. 193). Un'altra dimostrazione limitatamente al caso $d = r - 2$, è stata data in [6].

(27) Cfr. SEVERI, [8], n. 10.

Viceversa, se la serie $|\hbar \bar{C} - \bar{D}|$ esiste, essa è tagliata dalle suddette forme \bar{A}^h (si ricordi il n. 2).

Ma poichè Ψ' è aritmeticamente normale ogni \bar{A}^h di S_{r-1} contenente C' è sezione di una forma A^h di S_r contenente Ψ' ⁽²⁸⁾; quindi la serie $|\hbar \bar{C} - \bar{D}|$ è tagliata, su C (fuori di \bar{D}), dalle curve del sistema $|\hbar C - D|$ che le forme A^h considerate segano su Ψ (fuori di D).

Indichiamo con r_h ed R_h le dimensioni rispettive della serie e del sistema sopraindicati. Si ha ovviamente

$$R_{h-1} = R_h - r_h - 1.$$

Ma la serie $|\hbar \bar{C} - \bar{D}|$ è la serie residua della serie $|\rho + 1 - \hbar| \bar{C}|$ rispetto alla serie canonica di C ; ed il sistema $|\hbar C - D|$ è residuo del sistema $|\rho - \hbar| C|$ rispetto al sistema canonico di Ψ . Pertanto $r_h + 1$ ed $R_h + 1$ non sono altro che gli indici di specialità $i_{\rho+1-\hbar}$ ed $j_{\rho-\hbar}$ della serie $|\rho + 1 - \hbar| \bar{C}|$ e del sistema $|\rho - \hbar| C|$.

Si ha così

$$i_{\rho+1-\hbar} = j_{\rho-\hbar} - j_{\rho+1-\hbar}.$$

Di qui, ponendo $\rho + 1 - \hbar = l$, si ottiene appunto

$$i_l = j_{l-1} - j_l.$$

7. OSSERVAZIONE I. - Il teorema 2 può essere enunciato anche in questa forma:

Condizione necessaria e sufficiente affinché due superficie non singolari fra di loro complementari siano entrambe aritmeticamente normali è che le loro sezioni iperpiane siano aritmeticamente normali.

OSSERVAZIONE II. - Consideriamo in S_r una successione di s superficie non singolari $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{h-1}, \Psi_h, \Psi_{h+1}, \dots, \Psi_s$, ciascuna complementare della precedente, in altre parole una « catena di superficie » secondo DUBREIL ⁽²⁹⁾.

Supponiamo che una superficie della catena, poniamo Ψ_h , sia intersezione completa di $r-2$ forme di S_r : allora tutte le superficie della catena si dicono di *residuale finito*.

È noto che tanto Ψ_h quanto la sua generica sezione iperpiana (anch'essa non singolare ed intersezione completa di forme) sono aritmeticamente normali ⁽³⁰⁾; pertanto, per il teorema 2, la superficie Ψ_{h+1} (complementare di Ψ_h) ed una sua generica sezione iperpiana sono aritmeticamente normali. Inoltre le superficie Ψ_h e Ψ_{h+1} sono topologicamente ed aritmeticamente regolari (n. 5). Gli stessi ragionamenti possono ripetersi per le coppie Ψ_{h+1}, Ψ_{h+2} e così via sino a Ψ_s ; e naturalmente anche in senso inverso per le coppie Ψ_h, Ψ_{h-1} , ecc. . . fino a Ψ_1 .

Concludendo: *Le superficie di residuale finito non singolari sono aritmeticamente normali, aritmeticamente regolari e topologicamente regolari* ⁽³¹⁾.

(28) Ciò perché le varietà V_d aritmeticamente normali sono varietà di prima specie secondo DUBREIL, nel senso che se \bar{V} è una sezione di V_d con un generico iperpiano S_{r-1} , le forme \bar{A}^h di S_{r-1} (di un ordine qualsiasi h) contenenti \bar{V} sono tagliate da forme A^h dello stesso ordine contenenti V_d . Cfr. per questo GAETA ([4], p. 183) oppure JONGMANS ([5], p. 459).

(29) Cfr. DUBREIL [2], p. 23.

(30) Cfr. SEVERI, [8], n. 6, II; un'altra dimostrazione è stata data in [6].

(31) Il fatto che le superficie, anzi le varietà, di residuale finito siano aritmeticamente normali - cioè di prima specie - è già stato osservato da DUBREIL ([2], p. 21).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. CASTELNUOVO, *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica*, « Annali di Matematica », serie II, t. XXV (1897).
- [2] P. DUBREIL, *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'Algèbre Moderne*, « Act. scient. et industri. », 210, Hermann, Paris (1935).
- [3] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna (1948).
- [4] F. GAETA, *Sulle curve sghembe algebriche di residuale finito*, « Annali di Matematica », serie IV, t. XXVII (1948).
- [5] F. JONGMANS, *Contribution à la théorie des variétés algébriques*, « Mém. Soc. Scient. », Liège IV, 7 (1947).
- [6] E. MARCHIONNA, *Sulle varietà aritmeticamente normali*, « Atti del Sem. Matem. e Fis. dell'Università di Modena », vol. IV (1951-1952).
- [7] E. MARCHIONNA, *Sulle varietà di prima specie*, « Rend. del Sem. Matem. dell'Univ. e del Polit. di Torino », vol. 16° (1956-1957).
- [8] F. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, « Rend. Circolo Matem. di Palermo », t. XVII (1903).
- [9] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. Circolo Matem. di Palermo », t. XXVIII (1909).

Magneto idrodinamica. — *Sui vortici sferici in magneto idrodinamica.* Nota di CATALDO AGOSTINELLI, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. È noto dall'idrodinamica classica come, in un fluido perfetto incompressibile e indefinito si possono formare dei vortici sferici la cui configurazione fu caratterizzata per primo da Hill (1).

Ora, data l'importanza che hanno assunto recentemente gli studi magnetoidrodinamici sia per le applicazioni alle Cosmogonia e all'Astrofisica, e sia nelle ricerche termonucleari, mi sono domandato se anche in un fluido perfetto elettricamente conduttore sia possibile la formazione di un tale vortice accompagnato dalla generazione di un campo magnetico.

L'analisi sviluppata in questa Nota mostra appunto che se il fluido si suppone di conduttività infinita e soggetto a un campo magnetico uniforme H_0 di assegnata direzione Oz , è possibile la formazione in seno ad esso di un vortice sferico idrodinamico, simmetrico rispetto all'asse Oz , le cui caratteristiche cinetiche coincidono con quelle del vortice di Hill, il cui centro si muove di moto rettilineo uniforme secondo quell'asse e che genera a sua volta un campo magnetico le cui componenti, così come gli elementi del moto, risultano continui attraverso la superficie sferica del vortice, mentre all'infinito la velocità tende a zero, la pressione tende a un valore finito e il campo magnetico tende al valore costante H_0 .

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) J. M. HILL, (« Phil. Transact. Roy. Soc. of London », 1894). Cfr. anche H. VILLAT, *Leçon sur la Théorie des Tourbillons*, Chap. VIII, p. 198 (Paris, Gauthier-Villaris, 1930).

2. Consideriamo le equazioni della magneto idrodinamica, che col ben noto significato dei simboli e in assenza di forze di natura non elettromagnetica, risultano

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}) + \frac{c_0^2}{4\pi\mu\sigma} \text{rot rot } \mathbf{H} = 0$$

$$(2) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} - \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \text{rot } \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = -\text{grad} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 \right).$$

$$(4) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Con riferimento a un sistema di coordinate cilindriche r, φ, z , e nell'ipotesi della simmetria intorno all'asse z , indichiamo con H_r, H_z le componenti del campo magnetico nella direzione perpendicolare e in quella parallela all'asse; con v_r, v_z le analoghe componenti della velocità. Per la supposta simmetria gli elementi del campo e del moto saranno indipendenti dall'anomalia φ e pertanto le equazioni (2) e (4) diventano ⁽²⁾

$$\frac{\partial}{\partial r}(r H_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r H_z) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial}{\partial z}(r v_z) = 0,$$

le quali mostrano che dovranno esistere due funzioni di r, z, t , che indichiamo con V e Ψ , tali che

$$(5) \quad H_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$(6) \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r},$$

dove la Ψ è la funzione di corrente.

Indicando con \mathbf{k} il versore dell'asse z avremo dunque in questo caso

$$(7) \quad \mathbf{H} = \text{grad } V \wedge \text{grad } \varphi = \text{rot}(V \text{ grad } \varphi)$$

$$(8) \quad \mathbf{v} = \text{grad } \Psi \wedge \text{grad } \varphi = \text{rot}(\Psi \text{ grad } \varphi).$$

Risulta

$$(9) \quad \text{rot } \mathbf{H} = -\nabla_z V \cdot \text{grad } \varphi$$

essendo

$$(10) \quad \nabla_z = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

ed inoltre

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \text{grad } \varphi.$$

(2) Cfr. C. AGOSTINELLI, *Moti magneti idrodinamici simmetrici rispetto a un asse, ecc.* («Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino», vol. 21, 1956-57).

L'equazione (1) diventa allora

$$\operatorname{rot} \left\{ \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{c_0^2}{4\pi\mu\sigma} \nabla^2 V \right] \operatorname{grad} \varphi \right\} = 0$$

da cui segue l'equazione scalare

$$(11) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{c_0^2}{4\pi\mu\sigma} \nabla^2 V = 0$$

dove nel 2° membro si è trascurata un'arbitraria funzione del tempo cioè che è lecito essendo la V , in virtù delle (5), definita a meno di una funzione del tempo.

Risulta ancora

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = -\nabla^2 \Psi \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = -\frac{\nabla^2 \Psi}{r^2} \operatorname{grad} \Psi$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} \wedge \mathbf{H} = -\frac{\nabla^2 V}{r^2} \operatorname{grad} V$$

e l'equazione (3) diventa

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \wedge \operatorname{grad} \varphi - \frac{\nabla^2 \Psi}{r^2} \operatorname{grad} \Psi + \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \frac{\nabla^2 V}{r^2} \operatorname{grad} V = -\operatorname{grad} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 \right)$$

dalla quale, prendendo le componenti cilindriche, seguono le equazioni scalari

$$(12) \quad \begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial t} - \frac{\nabla^2 \Psi}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \frac{\nabla^2 V}{r^2} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 \right) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial t} - \frac{\nabla^2 \Psi}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \frac{\nabla^2 V}{r^2} \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 \right). \end{cases}$$

Derivando la seconda delle (12) rispetto ad r , la prima rispetto a z e sottraendo quindi membro a membro, si ha la seguente condizione di integrabilità

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\nabla^2 \Psi}{r^2} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nabla^2 \Psi}{r^2} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nabla^2 \Psi}{r^2} \right) \right] + \\ + \frac{\mu}{4\pi\rho_0} \cdot \frac{1}{r} \left[\frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nabla^2 V}{r^2} \right) - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nabla^2 V}{r^2} \right) \right] = 0.$$

Questa equazione ammette la soluzione particolare

$$(14) \quad \frac{\nabla^2 \Psi}{r^2} = \text{cost.}, \quad \frac{\nabla^2 V}{r^2} = \text{cost.}$$

la prima delle quali è soddisfatta dalla funzione

$$(15) \quad \Psi = -r^2 \left\{ \frac{k}{a^2} (r^2 - a^2) + \frac{k}{c^2} [z - z_0(t)]^2 + f(t) \right\},$$

dove k, a, c sono costanti e $z_0(t), f(t)$ funzioni per ora arbitrarie del tempo.

Questa funzione Ψ coincide con quella considerata da Hill nello studio dei vortici sferici nell'idrodinamica classica. Si ricava

$$(16) \quad \nabla^2 \Psi = - \left(\frac{8k}{a^2} + \frac{2k}{c^2} \right) r^2,$$

$$(17) \quad \begin{cases} v_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{2k}{c^2} r (z - z_0) \\ v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = - 2 \left[\frac{k}{a^2} (2r^2 - a^2) + \frac{k}{c^2} (z - z_0)^2 + f(t) \right]. \end{cases}$$

Le superficie fluide $\lambda(r, z, t) = \text{cost.}$ devono verificare l'equazione

$$(18) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial r} v_r + \frac{\partial \lambda}{\partial z} v_z = 0,$$

dove v_r e v_z hanno i valori (17). Cercando della (18) soluzioni della forma

$$(19) \quad \lambda = r^2 \left[\frac{r^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} - 1 \right]$$

si trova che deve essere

$$(20) \quad f = - \frac{1}{2} \dot{z}_0, \quad \left(\dot{z}_0 = \frac{dz_0}{dt} \right).$$

Ne segue che fra le superficie fluide sarà compreso l'ellissoide di rotazione di semiassi a , c e di equazione

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

il quale per $c = a$ diventa una sfera di raggio a , il cui centro si muove sull'asse z con velocità \dot{z}_0 .

Analogamente della seconda delle (14) esiste una soluzione del tipo

$$V = r^2 \left[\frac{\alpha}{a^2} (r^2 - a^2) + \frac{\beta}{c^2} (z - z_0)^2 + \gamma (z - z_0) + \delta \right]$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ eventualmente funzioni del tempo. Sostituendo nella (11), tenendo conto del valore (15) della funzione Ψ , con $f = -(1/2) \dot{z}_0$, si trova che essa non può essere identicamente soddisfatta se non per

$$\beta = \alpha (\text{costante}), \quad \gamma = \delta = 0,$$

e nell'ipotesi inoltre che la conduttività elettrica σ del fluido sia infinita. Nel caso considerato avremo dunque

$$(21) \quad \Psi = - r^2 \left[\frac{k}{a^2} (r^2 - a^2) + \frac{k}{c^2} (z - z_0)^2 - \frac{1}{2} \dot{z}_0 \right]$$

$$(22) \quad V = \alpha r^2 \left[\frac{r^2 - a^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} \right],$$

con α costante per ora arbitraria.

Si ricava

$$(23) \quad \nabla_z V = \alpha \left(\frac{8}{a^2} + \frac{2}{c^2} \right) r^2$$

e il vortice inoltre sarà dato da

$$(24) \quad \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \nabla_z \Psi \cdot \operatorname{grad} \varphi = \left(\frac{4k}{a^2} + \frac{k}{c^2} \right) r \cdot \mathbf{a}_\varphi$$

essendo \mathbf{a}_φ il versore secondo cui varia l'anomalia φ .

Le equazioni (12) diventano ora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{2k}{c^2} \dot{z}_0 r - \left(\frac{8}{a^2} + \frac{2}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(k\Psi + \alpha \frac{\mu}{4\pi\rho_0} V \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 \right) &= -\frac{4k}{c^2} \dot{z}_0 (z - z_0) - \ddot{z}_0 - \left(\frac{8}{a^2} + \frac{2}{c^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(k\Psi + \alpha \frac{\mu}{4\pi\rho_0} V \right), \end{aligned}$$

dalle quali integrando si ricava

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 &= \frac{k}{c^2} \dot{z}_0 r^2 - \frac{2k}{c^2} \dot{z}_0 (z - z_0)^2 - \ddot{z}_0 (z - z_0) - \\ &\quad - \left(\frac{8}{a^2} + \frac{2}{c^2} \right) \left(k\Psi + \alpha \frac{\mu}{4\pi\rho_0} V \right) + F(t) \end{aligned}$$

con $F(t)$ funzione arbitraria del tempo.

Tenendo conto dei valori (17) delle componenti della velocità, nonché delle espressioni (21) e (22) delle funzioni Ψ , V , si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} (25) \quad \frac{1}{\rho_0} p &= \frac{2k^2}{a^2 c^2} r^2 (r^2 - a^2) - \frac{2k^2}{c^4} (z - z_0)^4 + \frac{4k^2}{c^2} (z - z_0)^2 - \ddot{z}_0 (z - z_0) - \\ &\quad - \left(\frac{8}{a^2} + \frac{2}{c^2} \right) \alpha^2 \frac{\mu}{4\pi\rho_0} r^2 \left[\frac{r^2 - a^2}{a^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} \right] + \frac{\Pi(t)}{\rho_0} \end{aligned}$$

dove si sono conglobate in $\Pi(t)$ tutte le funzioni che dipendono solo dal tempo.

3. In particolare, riferendoci al vortice sferico di raggio a , nell'interno di esso avremo

$$(26) \quad \begin{cases} \Psi = -r^2 \left\{ \frac{k}{a^2} [r^2 - a^2 + (z - z_0)^2] - \frac{1}{2} \dot{z}_0 \right\} \\ V = \alpha \frac{r^2}{a^2} [r^2 - a^2 + (z - z_0)^2] \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} v_r = \frac{2k}{a^2} r (z - z_0) \\ v_z = -\frac{2k}{a^2} [2r^2 - a^2 + (z - z_0)^2] + \dot{z}_0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{5k}{a^2} r \mathbf{a}_\varphi$$

$$(28) \quad \begin{cases} H_r = -2\alpha \frac{r(z-z_0)}{a^2} \\ H_z = \frac{2\alpha}{a^2} [2r^2 - a^2 + (z-z_0)^2] \end{cases}$$

$$(29) \quad \frac{1}{\rho_0} p = \frac{2k^2}{a^4} r^2 (r^2 - a^2) - \frac{2k^2}{a^4} (z-z_0)^4 + \frac{4k^2}{a^2} (z-z_0)^2 - \\ - \ddot{z}_0 (z-z_0) - \alpha^2 \cdot \frac{\mu}{2\pi\rho_0} \cdot \frac{5r^2}{a^4} [r^2 - a^2 + (z-z_0)^2] + \frac{\Pi(t)}{\rho_0}.$$

Sulla superficie sferica di raggio a , ove si può porre

$$r = a \sin \theta, \quad z - z_0 = r \cos \theta$$

sarà

$$(30) \quad v_r = 2k \sin \theta \cos \theta, \quad v_z = \dot{z}_0 - 2k \sin^2 \theta$$

$$(31) \quad H_r = -2\alpha \sin \theta \cos \theta, \quad H_z = 2\alpha \sin^2 \theta$$

$$(32) \quad \frac{1}{\rho_0} p = 2k^2 \cos^2 \theta - a\ddot{z}_0 \cos \theta + \frac{\pi(t)}{\rho_0}.$$

4. Passiamo ora a considerare il moto all'esterno della sfera che sarà irrotazionale e dovrà annullarsi all'infinito. Esisterà quindi il potenziale di velocità che indichiamo con Φ . Per la simmetria intorno all'asse z la funzione Φ sarà indipendente dall'anomalia φ e per l'equazione di continuità sarà una funzione armonica, soddisferà cioè all'equazione

$$(33) \quad \Delta_2 \Phi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Ne segue che la funzione associata della Φ , cioè la funzione di corrente Ψ soddisferà ora all'equazione

$$(34) \quad \nabla_2 \Psi \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0.$$

Le componenti H_r, H_z del campo magnetico e le componenti v_r, v_z della velocità saranno ancora della forma (5) e (6). Sussisteranno perciò ancora le equazioni (11), (12) e (13) ove si faccia $\nabla_2 \Psi = 0$. Ricordando inoltre che si è fatta l'ipotesi di un fluido di conduttività elettrica infinita, avremo ora dalle (11) e (13)

$$(35) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$$

$$(36) \quad \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nabla_2 V}{r^2} \right) - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nabla_2 V}{r^2} \right) = 0.$$

Ciò premesso, osserviamo che se si pone

$$(37) \quad R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}, \quad (38) \quad \Phi_n = \frac{P_n(\cos \theta)}{R^{n+1}},$$

dove P_n è l' n^{mo} polinomio di Legendra, e quindi Φ_n è funzione armonica simmetrica che si annulla all'infinito, si ha che la funzione Ψ_n , associata della Φ_n , è data da

$$(39) \quad \Psi_n = \frac{n+1}{2n+1} \frac{1}{R^n} (P_{n+1} - P_{n-1}).$$

Con lo scopo di determinare la velocità all'esterno in modo che essa sia continua attraverso la superficie del vortice sferico, assumiamo

$$(40) \quad \Phi = -\frac{1}{2} a^3 \dot{z}_0 \Phi_1 = -\frac{1}{2} a^3 \dot{z}_0 \frac{\cos \theta}{R^2} = -\frac{1}{2} a^3 \dot{z}_0 \frac{z - z_0}{R^3}.$$

Ne segue

$$(41) \quad \Psi = -\frac{1}{2} a^3 \dot{z}_0 \Psi_1 = -\frac{1}{3} a^3 \dot{z}_0 \frac{P_2 - 1}{R} = \frac{1}{2} a^3 \dot{z}_0 \frac{\sin^2 \theta}{R} = \frac{1}{2} a^3 \dot{z}_0 \frac{r^2}{R^3}$$

e quindi

$$(42) \quad \begin{cases} v_r^{(e)} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{3}{2} a^3 \dot{z}_0 \frac{r(z - z_0)}{R^5} \\ v_z^{(e)} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{2} a^3 \dot{z}_0 \frac{2(z - z_0)^2 - r^2}{R^5} \end{cases}$$

Sulla superficie del vortice sferico si ha

$$v_r^{(e)} = \frac{3}{2} \dot{z}_0 \sin \theta \cos \theta, \quad v_z^{(e)} = \dot{z}_0 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right)$$

e confrontando con le (30) si deduce che deve essere

$$\dot{z}_0 = \frac{4}{3} k \quad (\text{costante}).$$

La (36) mostra che $\nabla_2 V / r^2$ sarà funzione di V ; ma nel nostro caso occorrerà prendere

$$\nabla_2 V = 0.$$

È soluzione di questa equazione la

$$V = \frac{2}{3} \alpha (a^2 \Psi_1 + r^2) = \frac{2}{5} \alpha \left(r^2 - a^3 \frac{r^2}{R^3} \right)$$

dalla quale si ricava

$$(43) \quad \begin{cases} H_r^{(e)} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial z} = -2 \alpha a^3 \frac{r(z - z_0)}{R^5} \\ H_z^{(e)} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2}{3} \frac{\alpha a^3}{R^5} [r^2 - 2(z - z_0)^2] + \frac{4}{3} \alpha, \end{cases}$$

e si riconosce subito, dal confronto delle (43) con le (28), che anche le componenti del campo magnetico sono continue attraverso la superficie sferica del vortice.

La seconda delle (43) mostra inoltre che la soluzione trovata implica la esistenza all'esterno del vortice di un campo magnetico assiale uniforme di intensità uguale a $(4/3)\alpha$. Se questo campo assiale uniforme lo indichiamo con H_0 la costante α sarà uguale a $(3/4)H_0$, e quindi in definitiva sarà all'interno

$$H_r^{(i)} = -\frac{3}{2} H_0 \frac{r(z-z_0)}{a^2}, \quad H_z^{(i)} = \frac{3}{2} \frac{H_0}{a^2} [2r^2 - a^2 + (z-z_0)^2],$$

e all'esterno

$$H_r^{(e)} = -\frac{3}{2} H_0 a^3 \frac{r(z-z_0)}{R^5}, \quad H_z^{(e)} = \frac{1}{2} H_0 \frac{a^3}{R^5} [r^2 - 2(z-z_0)^2] + H_0.$$

Le equazioni (12) diventano ora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 \right) &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial t} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial t} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 \right) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial t} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t}, \end{aligned}$$

dalle quali, avendo riguardo al valore (40) della funzione Φ , e ricordando che \dot{z}_0 è costante, si ricava

$$\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} a^3 \dot{z}_0^2 \frac{2(z-z_0)^2 - r^2}{R^5} + \frac{Q(t)}{\rho_0}$$

essendo $Q_0(t)$ funzione arbitraria del tempo.

Sostituendo in luogo di v^2 il valore che si ottiene dalle espressioni (42) delle componenti della velocità e indicando con p_0 la pressione all'infinito, si deduce $Q = p_0$, e

$$(44) \quad \frac{1}{\rho_0} p_e = \frac{1}{2} a^3 \frac{\dot{z}_0^2}{R^5} [2(z-z_0)^2 - r^2] - \frac{1}{8} \frac{a^6 \dot{z}_0^2}{R^8} [r^2 + 4(z-z_0)^2] + \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Calcolando infine il valore di p_e sulla superficie sferica del vortice e confrontando con la (32), ove va fatto $k = (3/4)\dot{z}_0$, $\dot{z}_0 = 0$, per la continuità della pressione si ha

$$\frac{\Pi}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{5}{8} \dot{z}_0^2.$$

In conclusione i risultati ottenuti mostrano che *in un fluido indefinito omogeneo incompressibile elettricamente conduttore e di conduttività infinita, soggetto a un campo magnetico uniforme, è possibile la formazione di un vortice sferico magneto idrodinamico, il cui centro si muove di moto rettilineo uniforme nella direzione del campo magnetico uniforme esterno.*

Chimica. — *Struttura cristallina di complessi metallorganici contenenti alluminio e titanio* (*). Nota di PAOLO CORRADINI e IVANO WALTER BASSI, presentata (**) dal Socio G. NATTA.

Per il particolare interesse che presentano nel campo della polimerizzazione anionica coordinata⁽¹⁾ i complessi metallorganici contenenti alluminio e titanio, è stato intrapreso uno studio strutturale sistematico, nel nostro Istituto, di quei complessi che, per la natura dei costituenti, possono essere isolati allo stato cristallino.

È stato preso in esame per primo il complesso dicitlopentadieniltitanio diclorodietilalluminio $(C_5H_5)_2TiCl_2Al(C_2H_5)_2$, sulla cui preparazione è già stato riferito in altra sede⁽²⁾.

Riferiremo in questa Nota sui risultati preliminari di una indagine roentgenografica effettuata su cristalli singoli del prodotto ottenuti per ricristallizzazione da soluzioni in *n*-eptano in atmosfera di azoto puro.

1) *Caratterizzazione delle costanti della cella elementare del complesso.*

I cristalli del prodotto esaminato si presentano in lamine aciculari di colore azzurro intenso. Esposti all'aria si decompongono in pochi secondi. È stato necessario pertanto introdurre i cristalli da esaminare in capillari di Lindemann successivamente saldati alle due estremità. L'operazione è stata condotta completamente in ambiente di azoto purissimo e secco. I cristalli sono stati centrati in una camera Weissenberg lungo la direzione di maggior sviluppo ed esaminati col metodo del cristallo rotante (radiazione $CuK\alpha$). La dimensione dell'asse di allungamento dei cristalli è risultata $c = 7,54 \pm 0,04 \text{ \AA}$.

Successivamente sono stati eseguiti fotogrammi Weissenberg col metodo dell'equinclinazione degli strati 0, 1, 2, 3.

È risultato:

$$\begin{aligned} a &= 15,77 \pm 0,08 \text{ \AA} & b &= 14,24 \pm 0,07 \text{ \AA} \\ \alpha &= \beta = \gamma = 90^\circ & V &= 1693 \text{ \AA}^3. \end{aligned}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) G. NATTA, « *Experientia Supplementum* », VII, 21 (1957); IDEM, Conferenza tenuta al Simposio Internazionale sulla chimica dei composti di coordinazione, Roma, 15-21 settembre 1957.

(2) G. NATTA, P. PINO, G. MAZZANTI, U. GIANNINI « *J. Am. Chem. Soc.* », 79, 2975 (1957); IDEM, Comunicazione al Simposio intern. chimica complessi di coordinazione, Roma (1957).

Densità roentgenografica per 4 molecole contenute nella cella elementare:

$$d_{RX} = 1,31 \text{ gr/cc.}$$

Le estinzioni sistematiche appaiono le seguenti:

$$okl \quad \text{con } k + l = 2n + 1$$

$$hko \quad \text{con } h = 2n + 1.$$

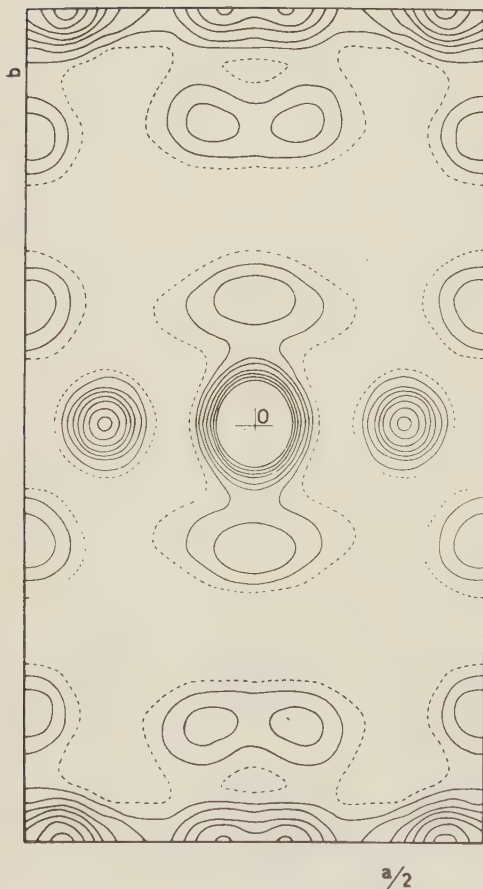


Fig. 1 - Proiezione Patterson sul piano $1/2 a-b$; le linee di livello sono state tracciate in unità arbitrarie e sono state omesse le linee più interne del picco all'origine O.

In entrambi i casi il gruppo piano cui appartiene il sistema di vettori interatomici fornito dalla analisi Patterson è $p2mm$. Nella Tabella II sono stati riportati, accanto al simbolo del corrispondente gruppo piano, le coordinate di punti equivalenti assunte attualmente dagli atomi nella struttura e le coordinate e i pesi statistici dei massimi della proiezione Patterson su $1/2 a, b$ corrispondente.

Gruppi spaziali possibili risultano pertanto $Pnma (D_{2h}^{16})$ e $Pna (C_{2v}^9)$, il primo contenente otto posizioni generali (x, y, z) , il secondo quattro. Perché sia possibile il gruppo spaziale $Pnma$ gli atomi di Ti e Al dovrebbero cadere in $(c)x, 1/4, z$, e la molecola deve risultare pertanto pianosimmetrica. Una decisione tra i due gruppi spaziali, l'uno centrosimmetrico, l'altro acentrico, è risultata possibile da un esame della proiezione Patterson sul piano $a-b$ dei vettori interatomici, e ha portato a favorire definitivamente il gruppo $Pnma$ (fig. 1).

2) Analisi Patterson dei vettori interatomici.

Una analisi Patterson dei vettori interatomici è stata eseguita utilizzando i valori di $F^2(hko)$ riportati nella Tabella I.

Il gruppo piano corrispondente alle coordinate degli atomi è $p1g$ nel caso che il gruppo spaziale sia Pna (nella notazione di Patterson riportata nel testo di Nowacki)⁽³⁾, mentre è $p2gm$ nel caso che il gruppo spaziale sia $Pnma$.

(3) W. NOWACKI, *FOURIERSYNTHESE VON KRISTALLEN*, «Birkhauser Verlag», Basilea (1952).

TABELLA I.

$h k o$	$\frac{\sin \vartheta}{\lambda}$	F^2 oss.	$h k o$	$\frac{\sin \vartheta}{\lambda}$	F^2 oss.	$h k o$	$\frac{\sin \vartheta}{\lambda}$	F^2 oss.
200	0,063	90	460	0,247	50	870	0,355	14
020	0,070	340	800	0,255	22	2100	0,360	2
210	0,073	90	270	0,255	20	690	0,370	6
220	0,095	46	810	0,258	48	4100	0,375	2
230	0,123	78	650	0,260	54	1210	0,385	24
400	0,128	256	820	0,265	10	1220	0,388	6
410	0,132	30	830	0,277	26	2110	0,393	2
040	0,142	6	080	0,282	116	1230	0,398	16
420	0,145	24	660	0,285	52	6100	0,402	6
240	0,155	4	280	0,288	20	1070	0,403	4
430	0,165	2	480	0,310	14	890	0,407	4
250	0,187	62	850	0,310	16	1240	0,408	4
440	0,192	10	670	0,312	22	1250	0,422	12
600	0,192	44	1000	0,320	4	0120	0,422	18
610	0,195	134	290	0,325	2	2120	0,428	6
620	0,205	120	1020	0,327	8	6110	0,433	2
060	0,212	280	860	0,332	4	4120	0,442	2
450	0,217	6	680	0,340	16	1400	0,447	6
630	0,218	66	490	0,343	2	1270	0,455	6
260	0,222	16	1040	0,348	8	6120	0,463	2
640	0,238	116	0100	0,352	28	0140	0,494	4
						1290	0,497	6

Il gruppo piano C_{2v}^{III} , corrispondente al più favorevole gruppo spaziale $Pnma$ (Pna non è centrosimmetrico,) richiede, se gli atomi sono nelle posizioni (d) la presenza di una concentrazione di vettori sulla linea $x = 0$ (in $0,2y_r + 1/2$), mentre in realtà si osserva una concentrazione di vettori solo sulla linea $y = 1/2$ (in $2x_r, 1/4$), prevista per entrambi i gruppi spaziali. Tuttavia, se degli atomi pesanti fossero in (a) o (b) sarebbe atteso un forte massimo in $0, 1/2$, mentre se gli atomi pesanti fossero in (c) tale massimo coinciderebbe col massimo all'origine, lasciando aperta ogni decisione sull'argomento.

TABELLA II.

Simbolo del gruppo	Coordinate di punti equivalenti	Gruppo Patterson	Peso	Coordinate dei massimi Patterson
$C_s^{\text{II}} - p\ 1\ g$	$(a)\ x, y; \bar{x}, y + 1/2$	$C_{2v}^{\text{I}} - p\ 2\ mm$	Z_r^2	$2\ x_r, 1/2$
			$Z_r Z_s$	$x_r - x_s, y_r - y_s; x_r + x_s, y_r - y_s + 1/2$
$C_{2v}^{\text{III}} - p\ 2\ g\ m$	$(a)\ 0, 0; 0, 1/2\ (b)\ 1/2, 0; 1/2, 1/2$	$C_{2v}^{\text{I}} - p\ 2\ mm$	Z_r^2	$2\ x_r, 1/2; 0, 2\ y_r + 1/2$
	$(c)\ x, 1/4; \bar{x}, 3/4$		Z_r^2	$2\ x_r, 2\ y_r$
	$(d)\ x, y; \bar{x}, y + 1/2; \bar{x}, \bar{y}; x, 1/2 - y$		$2\ Z_r Z_s$	$x_r - x_s, y_r - y_s, x_r - x_s, y_r + y_s + 1/2$
				$x_r + x_s, y_r + y_s, x_r + x_s, y_r - y_s + 1/2$

Effettivamente non è stato possibile constatare nessun massimo in $0, 1/2$, nemmeno attraverso l'operazione di sensibilizzazione (« sharpen up ») della proiezione Patterson (fig. 2). Per il gruppo piano C_{2v}^{III} resta quindi aperta soltanto la possibilità che gli atomi pesanti (Ti, Cl, Al) siano in (c). In effetti, già la considerazione che 4 sono le molecole contenute nella cella elementare imponeva (sempre supponendo che il gruppo spaziale fosse $Pnma$), che Ti e Al giacessero in (c). In questo caso sarebbe attesa la seguente distribuzione di vettori, se chiamiamo $X_{\text{Ti}}, X_{\text{Cl}_\text{I}}, X_{\text{Cl}_\text{II}}, X_{\text{Al}}$ le coordinate X degli atomi pesanti sul piano $y = 1/4$:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Peso} & \text{Coordinate} \\
 2Z_i^2 & 2\ x_i, 1/2 \\
 2Z_i^2 & 0, 0
 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} i = \text{Ti}, \text{Cl}_\text{I}, \text{Cl}_\text{II}, \text{Al} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll}
 4Z_i Z_j & x_i - x_j, 0 \\
 4Z_i Z_j & x_i + x_j, 1/2
 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} i \neq j \\ i = \text{Ti}, \text{Cl}_\text{I}, \text{Cl}_\text{II}, \text{Al} \\ j = \text{Ti}, \text{Cl}_\text{I}, \text{Cl}_\text{II}, \text{Al} \end{array} \right.$$

Come si vede, i massimi di valore più elevato sono attesi in questa ipotesi lungo le linee $y = 0$ e $y = 1/2$, e questo sembra attualmente verificarsi nella proiezione Patterson calcolata.

Il fatto che si osservi un solo massimo (oltre a quello all'origine) per $y = 0$ in $x = 0,162$ implica ulteriormente che gli atomi si sovrappongano (per es. due a due) sulla proiezione $a-b$ in modo tale da simulare la presenza di due soli atomi pesanti con coordinate x_A e x_B e peso $Z_A = \sum_i Z_i$ $Z_B = \sum_2 Z_i$,

dove Σ_1 e Σ_2 si estendono a tutti gli atomi che si sovrappongono rispettivamente in x_A , $1/4$ e x_B , $1/4$. Si ha allora: (escludendo i picchi in 0,0)

Peso Coordinate

$$\left. \begin{array}{ll} 2 \Sigma_1^2 & 2 x_A, 1/2 \\ 2 \Sigma_2^2 & 2 x_B, 1/2 \\ 4 \Sigma_1 \Sigma_2 & x_A - x_B, 0 \\ 4 \Sigma_1 \Sigma_2 & x_A + x_B, 1/2 \end{array} \right\}$$

I massimi di equal peso $4 \Sigma_1 \Sigma_2$ si riconoscono immediatamente in 0,162; 0 e 0,204; $1/2$ da cui risulta $x_A = 0,183$, $x_B = 0,021$, o $x_A = 0,433$, $x_B = 0,271$.

In questa ipotesi, altri due massimi sarebbero attesi (e si osservano in realtà) sulla linea $y = 1/2$ in $2 x_B = 0,042$ (di peso $2 \Sigma_2^2$) e in $2 x_A = 0,366$ o nell'equivalente 0,866 (di peso $2 \Sigma_1^2$). Trascurando la presenza di vettori dovuti agli atomi leggeri si trova sperimentalmente $(\Sigma_2^2/\Sigma_1^2) \cong 1,50$ e cioè $(\Sigma_2/\Sigma_1) = 1,22$.

Essendo $\Sigma_1 + \Sigma_2 = 69$ risulta all'incirca $\Sigma_2 = 38$ che corrisponde alla sovrapposizione in x_B di un atomo di titanio e un atomo di Cl ($\Sigma_2 = 39$) mentre in x_A si sovrappongono un atomo di Al e un atomo di Cl.

Una decisione tra le due possibilità $x_A = 0,183$ o $x_A = 0,433$ è possibile solo da un esame di riflessioni diverse dalla $h\bar{k}0$ e non è necessaria per eseguire una proiezione Fourier sul piano a - b , che rimandiamo ad un prossimo lavoro.

Analisi delle riflessioni hkl .

Una analisi delle riflessioni hkl permette di decidere sulla natura dell'aggruppamento atomico che fa sì che gli atomi pesanti della molecola $(C_5H_5)_2TiCl_2Al(C_2H_5)_2$ si sovrappongono due a due sulla proiezione a - b .

Infatti le riflessioni $hk3$ sono pseudosistematicamente assenti quando $h = 2n$.

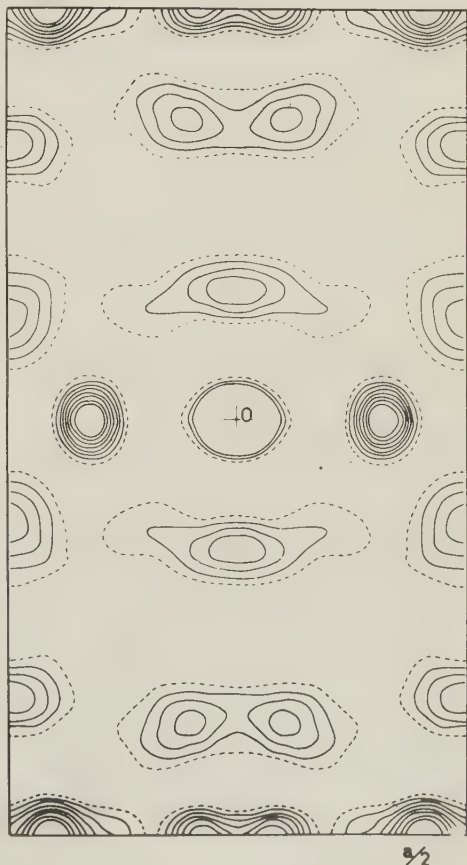


Fig. 2 - Proiezione Patterson analoga a quella della fig. 1, sensibilizzata, « sharpened up » (linee di livello in unità arbitrarie ed omesse le più interne dei picchi più alti).

Data la formula del fattore di struttura

$$\left. \begin{array}{l} h + l = 2n \\ k = 2n \end{array} \right\} A = 8 \cos 2\pi hx \cos 2\pi ky \cos 2\pi lz$$

$$\left. \begin{array}{l} h + l = 2n \\ k = 2n + 1 \end{array} \right\} A = -8 \sin 2\pi hx \sin 2\pi ky \cos 2\pi lz$$

$$\left. \begin{array}{l} h + l = 2n + 1 \\ k = 2n \end{array} \right\} A = -8 \sin 2\pi hx \cos 2\pi ky \sin 2\pi lz$$

$$\left. \begin{array}{l} h + l = 2n + 1 \\ k = 2n + 1 \end{array} \right\} A = 8 \cos 2\pi hx \sin 2\pi ky \sin 2\pi lz$$

questo è possibile solo quando sia

$$(1) \quad z_{\text{Ti}} - z_{\text{Cl}} = 0,333 \quad ; \quad z_{\text{Al}} - z_{\text{Cl}} = 0,333$$

e in più

$$(2) \quad z_{\text{Ti}} = n 0,166 \quad n \text{ numero intero.}$$

La prima condizione impone quindi che la distanza tra gli atomi sovrapposti in x_A o x_B sia di $0,333 \times 7,54 = 2,5 \text{ \AA}$ mentre tra x_A e x_B la distanza è analoga ($0,166 \times 15,77 = 2,55 \text{ \AA}$).

Ne risulta che gli atomi pesanti si raggruppano a formare un ponte all'incirca quadrato di lato $\sim 2,5 \text{ \AA}$, come mostra la fig. 3.

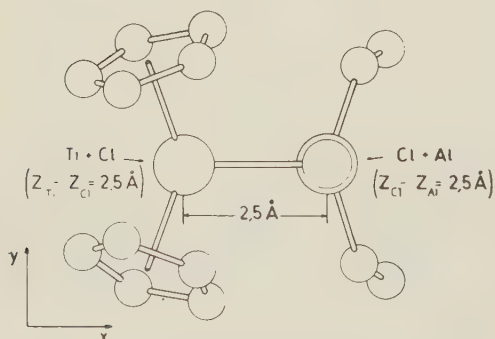


Fig. 3 - Modello della molecola di $(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{TiCl}_2$ $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ dedotto dalle proiezioni Patterson delle figg. 1 e 2.

I rimanenti massimi Patterson, che debbono corrispondere alle immagini dei nuclei ciclopentadienilici e degli etili visti dai punti corrispondenti alle posizioni degli atomi pesanti, si lasciano facilmente interpretare, in accordo anche coi primi risultati di una analisi Fourier, supponendo che:

1) Tanto il titanio che l'alluminio presentano una coordinazione all'incirca tetraedrica.

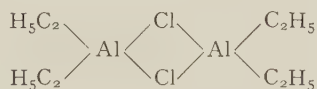
2) I piani dei nuclei ciclopentadienilici legati al Ti sono all'incirca normali alla congiungente titanio-centro del raggruppamento ciclopentadienilico, con distanze titanio-carbonio dell'ordine dei $2,3 \text{ \AA}$.

3) I gruppi etilici sono legati all'alluminio.

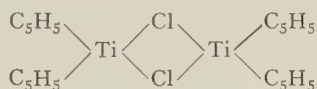
4) La molecola presenta un piano di simmetria passante per i 4 atomi pesanti (vedi fig. 3).

Desideriamo mettere in evidenza che è la prima volta che viene studiato strutturalmente un complesso formato dalla unione di due molecole con atomi diversi entrambi deficienti in elettroni ($\text{Ti}(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Cl}$ e $\text{AlCl}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$).

Il tipo di legame interessato nella formazione del ponte tra Ti e Cl appare della stessa natura di quello presente nel $\text{AlCl}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$, la cui molecola è dimera



come pure probabilmente è dimero il $\text{Ti}(\text{C}_5\text{H}_5)_2\text{Cl}$



Anche per quest'ultimo è in corso nel nostro Laboratorio una indagine strutturale.

È interessante anche notare come la natura a « sandwich » di alcuni composti metallo-ciclopentadienilici non implichi il parallelismo dei nuclei ciclopentadienilici. La loro ubicazione risulta dovuta al tipo di ibridizzazione dell'atomo cui sono legati, con eventuali distorsioni di angoli dovute a ingombri sterici.

Rimandiamo una più dettagliata discussione a quando la struttura sarà completamente definita attraverso l'applicazione di metodi Fourier.

Desideriamo ringraziare il prof. G. Natta per averci suggerito il presente lavoro, nel corso del quale ci ha costantemente seguiti e consigliati.

Chimica. — *Contributo allo studio degli effetti magnetocatalitici* ^(*).

Nota di ALESSANDRO CIMINO, ETTORE MOLINARI e GIOVANNI ROMEO, presentata ^(**) dal Socio V. CAGLIOTI.

Con il nome di « effetto magnetocatalitico » viene designata l'influenza esercitata da una trasformazione di fase magnetica sull'attività catalitica di un solido. Tale influenza si manifesta attraverso una brusca variazione della attività catalitica in un intervallo di temperatura prossimo al punto di Curie.

L'esistenza di questi effetti, osservati per la prima volta da Hedvall ⁽¹⁾, fu ampiamente confermata da ricerche di altri Autori. Analoghi effetti sull'attività catalitica sono stati messi in evidenza per altre trasformazioni allo stato solido, quali trasformazioni ferroelettriche e trasformazioni di fase ⁽²⁾.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Generale e Inorganica dell'Università di Roma e Centro per la Chimica Generale del C. N.R.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958

(1) I. A. HEDVALL, *Einführung in die Festkörperchemie*, p. 196. Vieweg u. Sohn-Braunschweig, 1952.

(2) Per una bibliografia più estesa vedi ⁽⁴⁾

La prima interpretazione, avanzata da Hedvall, ammetteva che la fase paramagnetica, presente al di sopra del punto di Curie, fosse caratterizzata da una attività catalitica e da una energia di attivazione superiori a quelle della fase ferromagnetica. L'attività nella zona di transizione risultava di conseguenza anomala.

Dati recenti ⁽³⁾ hanno tuttavia mostrato che anche quando non si abbia nessuna variazione della energia di attivazione della reazione catalitica sulle due fasi, l'attività catalitica nella zona di trasformazione risulta perturbata. Tali anomalie vanno quindi poste in relazione solo con la trasformazione stessa, a prescindere dalle variazioni di energia di attivazione sulle due fasi. Una possibile interpretazione è stata di recente suggerita da Schwab ⁽³⁾, il quale ha messo in relazione l'aumento di attività catalitica con l'aumento anomalo del coefficiente di espansione del solido nella zona di trasformazione, e con le conseguenti distorsioni e tensioni interne del cristallo. In base a tale interpretazione veniva suggerito che un solido il cui coefficiente di espansione subisce una diminuzione al punto di Curie, non dovrebbe presentare anomalie cinetiche o dovrebbe presentare anomalie corrispondenti ad una diminuzione di attività.

Per chiarire ulteriormente tale problema abbiamo studiato ⁽⁴⁾ il comportamento del ferrito di magnesio come catalizzatore per la reazione di ossidazione dell'ossido di carbonio in un intervallo di temperatura comprendente il punto di Curie del solido.

Il ferrito di magnesio ha un comportamento dilatometrico tale che, per l'ipotesi di Schwab, si prevederebbe assenza di anomalia o presenza di una anomalia corrispondente ad una diminuzione di attività. D'altro canto misure di Schwab e coll. ⁽⁵⁾ indicavano che l'energia di attivazione per la reazione di ossidazione dell'ossido di carbonio su questo spinello, era la stessa per la fase paramagnetica e per la fase ferromagnetica.

Lo studio di tali catalizzatori aveva quindi principalmente lo scopo di precisare il tipo di anomalia cinetica eventualmente presente oltre che di confermare l'identità dell'energia di attivazione nelle due fasi.

Sono stati pertanto preparati vari ferriti di magnesio con rapporti diversi $\text{MgO} : \text{Fe}_2\text{O}_3$ onde variarne il punto di trasformazione magnetico. La reazione veniva seguita misurando le variazioni di pressione in un sistema a circolazione a volume costante, mentre la temperatura veniva fatta crescere linearmente con il tempo. In tutti i casi la velocità di ossidazione del CO subisce un brusco *aumento* di attività in vicinanza dei vari punti di Curie. Tale aumento di attività, se la pressione gassosa all'inizio della zona perturbata è sufficientemente elevata, può portare ad una rapida reazione auto-

(3) G. M. SCHWAB e M. GOETZLER «Z. physik. Chemie Neue Folge», 2, 1 (1954); 4, 148 (1955).

(4) A. CIMINO, E. MOLINARI e G. ROMEO, *Trabajos de la Tercera Reunion Internacional sobre Reactividad de los Solidos*, Vol. II, Madrid 1956 (in corso di stampa).

(5) G. M. SCHWAB, E. ROTH, CH. GRINTZOS e N. MAYRAKIS, *Structure and Properties of Solid Surfaces*, «Natl. Res. Council U.S.A.», p. 464 (1952).

catalitica ed anche ad una reazione esplosiva, come illustrato dalla fig. 1 A. L'energia di attivazione è inoltre risultata la medesima per le due fasi, nei limiti degli errori sperimentali ($22,5 \pm 1$ kcal/mole).

Questi risultati portano quindi ad escludere una correlazione diretta tra il comportamento dilatometrico ed il tipo dell'anomalia cinetica osservata e confermano inoltre che le cause dell'effetto magnetocatalitico devono essere ricercate nelle modificazioni, intrinseche alla trasformazione stessa, di quei fattori che governano il corso della reazione catalitica.

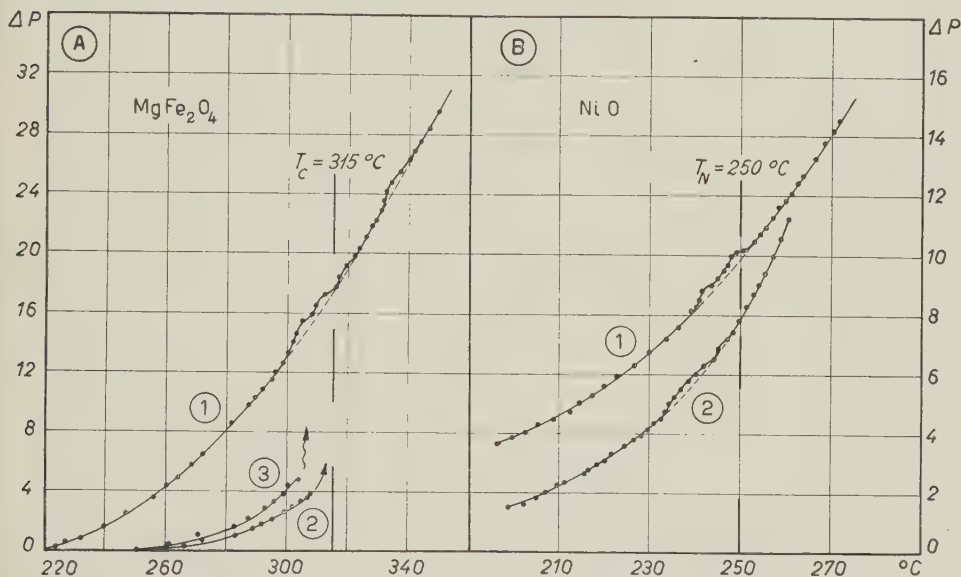


Fig. 1. — Effetti magnetocatalitici. Variazione di pressione ΔP (in cm. Hg) in funzione della temperatura ($^{\circ}\text{C}$)

A) Reazione $\text{CO} + \frac{1}{2} \text{O}_2 = \text{CO}_2$ su MgFe_2O_4 . Punto di Curie, 315°C . Curva 1) catalizzatore g. 1 Pressione all'inizio della zona perturbata (P_c) = 21 cm. Curva 2) catalizzatore g. 0,08; P_c = 30 cm. (la freccia indica reazione autocatalitica). Curva 3) catalizzatore g. 0,08; P_c = 60 cm. (la freccia a zig-zag indica reazione esplosiva).

B) Curva 1) Reazione $\text{CO} + \frac{1}{2} \text{O}_2 = \text{CO}_2$; Catalizzatore NiO (preparato a 800°C) Punto di Néel 250°C . g. 0,08; Pressione iniziale P_0 = 31,8 cm. Curva 2) Reazione $\text{N}_2\text{O} = \text{N}_2 + \frac{1}{2} \text{O}_2$; Catalizzatore NiO (prep. a 400°C) g. 1,63 P_0 = 44 cm.

È stato chiaramente messo in evidenza, in questi ultimi anni, che il corso di una reazione catalitica è governato dalle proprietà elettroniche del solido. Per chiarire ulteriormente la natura delle modificazioni subite dal solido al punto di trasformazione, abbiamo pertanto studiato il comportamento catalitico dell'ossido di nichel per l'ossidazione dell'ossido di carbonio e per la decomposizione dell'ossidulo di azoto⁽⁶⁾. L'ossido di nichel è stato infatti oggetto di recenti e numerose ricerche dirette sia a chiarirne la struttura elettronica, sia a correlare questa struttura con le proprietà catalitiche.

(6) A. CIMINO, E. MOLINARI e G. ROMEO, «Z. physik. Chemie Neue Folge» (in corso di stampa).

L'ossido di nichel è antiferromagnetico e la sua temperatura di Néel è circa 250 °C.

I risultati ottenuti su campioni preparati a diverse temperature mostrano la presenza di un netto aumento dell'attività catalitica dell'ossido in vicinanza del punto di Néel, per entrambe le reazioni (fig. 1 B).

Parallelamente alle misure catalitiche sono state eseguite misure di conducibilità elettrica e di potere termoelettrico, in atmosfere di ossigeno puro o di aria secca, sotto alto vuoto ed in atmosfera riducente (CO). Si è potuto così osservare che in vicinanza del punto di Néel la conducibilità del solido, in presenza di aria, presenta una anomalia corrispondente ad una diminuzione della conducibilità stessa (fig. 2 B). Tale anomalia può essere attribuita al desorbimento dell'ossigeno adsorbito il quale, come è noto, controlla la conducibilità dell'ossido. Infatti, in condizioni nelle quali non vi è ossigeno adsorbito (alto vuoto, CO), non si osserva tale diminuzione. Una conferma diretta di tale ipotesi si è potuta ottenere misurando la velocità di desorbimento dell'ossigeno in funzione della temperatura: in corrispondenza delle anomalie osservate per l'attività catalitica e per la conducibilità si nota infatti un netto aumento della velocità di desorbimento (fig. 2 A).

Sulla base dei meccanismi proposti per le reazioni di ossidazione dell'ossido di carbonio e di decomposizione di N_2O ⁽⁷⁾ tale aumento della velocità di desorbimento può rendere conto degli effetti magnetocatalitici osservati.

Le misure di potere termoelettrico (p. t. e.) sono anch'esse molto indicative. È stato infatti mostrato da Parravano e Domenicali ⁽⁸⁾ che il p. t. e. di NiO diminuisce con l'aumentare della concentrazione di ossigeno adsorbito. Eseguendo le misure di p. t. e. in opportune condizioni di copertura della superficie da parte dell'ossigeno abbiamo potuto mettere in evidenza che nella zona di trasformazione si ha un aumento anomalo del p. t. e., corrispondente appunto ad un desorbimento di ossigeno. D'altra parte, se si studia il comportamento del p. t. e. sotto alto vuoto, cioè in condizioni tali da escludere la presenza di ossigeno adsorbito, si può ancora mettere in evidenza una perturbazione nella zona del punto di Néel, ma di senso opposto a quella precedentemente osservata; la trasformazione provoca infatti, una diminuzione del p. t. e. (fig. 2 C). Date le condizioni sperimentali nelle quali questo effetto è stato osservato, si può escludere che esso dipenda da fenomeni di adsorbimento e desorbimento e si deve piuttosto imputare ad una variazione intrinseca del p. t. e., intimamente connessa con la trasformazione di fase.

È stato di recente mostrato ⁽⁹⁾ che il p. t. e. dell'ossido di nichel è una misura del livello di Fermi del semiconduttore. La diminuzione osservata dovrebbe quindi corrispondere ad una diminuzione di tale livello nella zona di trasformazione. Se si considera che l'ossigeno è adsorbito, almeno parzial-

(7) Cfr. F. S. STONE, in *Chemistry of the Solid State*, p. 367, Butterworths, Londra 1955.

(8) G. PARRAVANO e C. A. DOMENICALI, « J. Chem. Phys. », 26, 582 (1957).

(9) F. J. MORIN, « Physic. Rev. », 93, 1199 (1954); G. PARRAVANO, « J. Chem. Phys. », 23, 5 (1955)

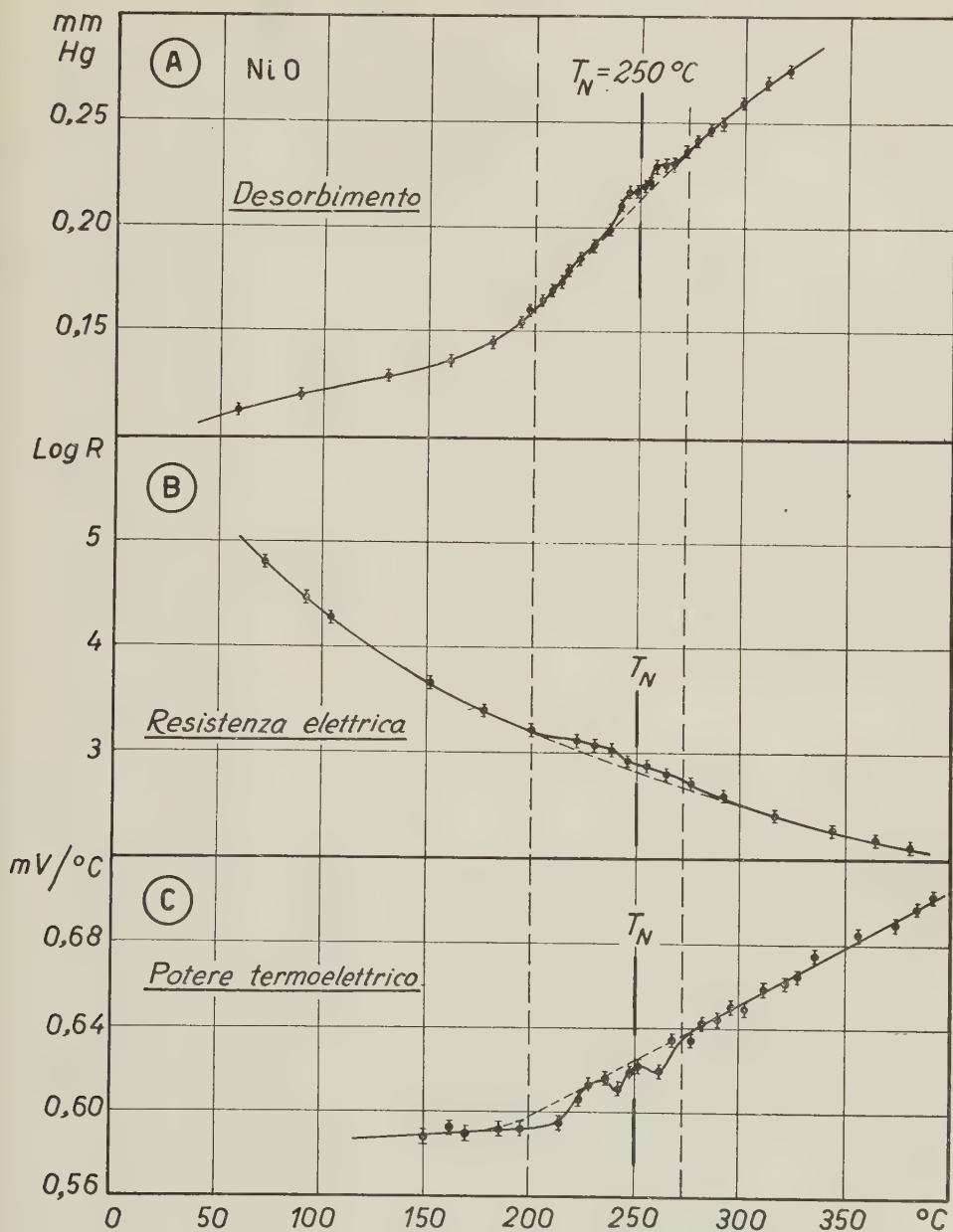


Fig. 2. - Anomalie elettriche e di desorbimento nella zona di trasformazione di NiO (preparato a 640 °C). Punto di Néel 250 °C

A) Misure di desorbimento di ossigeno. La pressione (mm. Hg.) si riferisce al gas raccolto durante il desorbimento, mentre la temperatura viene fatta aumentare linearmente con il tempo.

B) Resistenza elettrica in Ω (misurata in corrente continua) in presenza di 39,5 cm di aria.

C) Potere termoelettrico in mV/grado, misurato in alto vuoto, per un campione previamente degassato a 420 °C.

mente, sotto forma anionica, il calore di adsorbimento iniziale dell'ossigeno λ è dato da una espressione del tipo $\lambda = \Phi - F + B$, dove Φ è il potenziale di estrazione relativo all'ossido, F l'affinità elettronica dell'ossigeno, e B un termine che tiene conto dell'interazione tra lo ione adsorbito e la superficie. Poiché una diminuzione del livello di Fermi comporta un aumento di Φ , λ deve corrispondentemente diminuire. La concentrazione di equilibrio dell'ossigeno adsorbito è determinata da un termine $e^{\lambda/RT}$ e si vede quindi come, in corrispondenza della diminuzione di λ , si debba avere un desorbimento di ossigeno al punto di Néel. La diminuzione del p. t. e. corrisponde ad un aumento del carattere p dell'ossido e recenti misure di Stone⁽¹⁰⁾ sull'attività catalitica dell'ossido di nichel per l'ossidazione del CO hanno effettivamente mostrato che l'aumento del carattere p provoca un aumento dell'attività catalitica specifica dell'ossido.

Si può quindi concludere che gli effetti magnetocatalitici osservati, l'aumentata velocità di desorbimento dell'ossigeno ed il comportamento della conducibilità elettrica possono essere spiegati da una diminuzione del livello di Fermi relativo all'ossido nella zona di transizione.

Tali risultati pongono chiaramente in evidenza come anomalie nella struttura elettronica si riflettano nel comportamento catalitico.

Chimica fisica. — *Osservazioni sulla struttura della banda ultrarossa di assorbimento dovuta al carbonile chetonico*^(*). Nota di PAOLO MIRONE e VINCENZO LORENZELLI, presentata^(**) dal Socio G. B. BONINO.

Nel 1955 Gray e Bottreau⁽¹⁾ hanno riferito che la banda Raman dovuta al carbonile chetonico, se osservata con un potere risolvante abbastanza elevato, si scinde in due componenti. Nel caso del ciclopentanone il fenomeno, particolarmente notevole in quanto la separazione fra le due componenti è di 20 cm^{-1} , era già stato osservato da altri ricercatori⁽²⁾. In altri chetoni, e precisamente nell'acetofenone, cicloesanone, 3-metilcicloesanone e diisobutilchetone, la banda Raman carbonilica si risolve in un doppietto con una separazione di circa 8 cm^{-1} .

Successivamente lo stesso Gray ha ripreso queste misure⁽³⁾ riuscendo a risolvere la banda Raman dovuta al carbonile chetonico in un numero di

(10) F. S. STONE, cortese comunicazione dell'autore.

(*) Lavoro eseguito presso il Centro studi di Chimica Fisica del C. N. R. nell'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) GRAY e BOTTREAU, « Compt. Rend. », 240, 2134 (1955).

(2) Per la bibliografia vedi JONES e SANDORFY, in *Chemical applications of spectroscopy*, « Interscience », New York 1956, p. 487.

(3) GRAY, « Cah. Phys. », 10, n. 71-72, 71 (1956).

componenti quasi sempre maggiore di due (fino a cinque nel caso del metil-etilchetone). Questa struttura complessa si conserva anche diluendo i chetoni in tetracloruro di carbonio (fino a una frazione molecolare pari a 0,1), ma le componenti a minore frequenza diminuiscono di intensità fino a scomparire, quelle a maggiore frequenza si intensificano, e compaiono nuove componenti a frequenza più alta.

Anche nello spettro u. r. la banda dovuta al carbonile chetonico si è rivelata di struttura complessa. Taboury ⁽⁴⁾ ha risolto in due o tre componenti le bande carboniliche dell'acetofenone, cicloesanone e ciclopentanone allo stato di liquidi puri. Jones e Sandorfy ⁽⁵⁾ hanno studiato il doppietto carbonilico del ciclopentanone liquido e in soluzione, osservando che in solventi inerti (CCl_4 , CS_2) la componente a più bassa frequenza diminuisce di intensità, senza però scomparire a una concentrazione 0,015 M, mentre in un solvente attivo (CHCl_3) la stessa componente si intensifica.

Abbiamo ripetuto le misure di Taboury sul cicloesanone e acetofenone estendendole a soluzioni di questi due chetoni in CCl_4 e CHCl_3 e alla zona della 1^a armonica della banda carbonilica. L'apparecchio di cui ci siamo serviti è uno spettrofotometro Beckman IR2 con prisma in fluoruro di litio. La larghezza spettrale della fenditura era di 2,5–3 cm^{-1} a 1700 cm^{-1} , e di 4 cm^{-1} a 3400 cm^{-1} .

Il cicloesanone e l'acetofenone erano prodotti commerciali puri e sono stati distillati frazionatamente sotto pressione ridotta.

I risultati delle nostre misure sono raccolti nella Tabella I e nelle figg. 1 e 2.

Per quanto riguarda i liquidi puri, i nostri risultati sono in ottimo accordo con quelli di Taboury, confermando così che nello spettro u. r. la banda del carbonile chetonico ha una struttura complessa. Le inflessioni sui fianchi delle bande (figg. 1 e 2) derivano forse da una non perfetta compensazione dell'assorbimento dovuto al vapor d'acqua atmosferico, ma non si può escludere che siano invece dovute alla presenza di altre componenti meno intense.

In soluzione 0,33 M in CCl_4 le bande carboniliche del cicloesanone e dell'acetofenone appaiono semplici, e i rispettivi massimi sono leggermente spostati verso le maggiori frequenze rispetto alle componenti a più alta frequenza delle bande dei liquidi puri. Le semilarghezze si riducono in entrambi i casi nel rapporto 3 : 2 rispetto alle bande dei liquidi puri. La apparente mancanza di struttura delle bande, e la ridotta semilarghezza, sembrano significare che in soluzione di CCl_4 le bande stesse sono semplici, a differenza di quanto avviene nel ciclopentanone anche a concentrazioni molto minori. Bisogna però tener presente che nel cicloesanone e nell'acetofenone la separazione fra le componenti è prossima al limite del potere risolvente del nostro apparecchio e che perciò la presenza di una componente di debole intensità può sfuggire del tutto.

(4) TABOURY, « Cah. Phys. », 10, n. 73, 24 (1956).

(5) JONES e SANDORFY, op. cit. p. 487.

TABELLA I.

	Autore	$\nu(\text{C}=\text{O})$			$2\nu(\text{C}=\text{O})$	
		Liquido	Soluzione in CCl_4	Soluzione in CHCl_3	Liquido	Soluz. CCl_4
CICLOESANONE .	Questo lavoro	1711,5 1716	1717,5	1704 1707	3412 3420?	3416
	Taboury	1710 (7) 1715 (10)	—	—		
ACETOFENONE .	Questo lavoro	1684 1687	1691	1682 1686	3359	3367
	Taboury	1683 1687	—	—		
CICLOPENTANONE	Jones e Sandorfy	1733 (9) 1747 (10)	\sim 1725 (6) 1749 (10)	1727 (10) 1742 (20)		
	Taboury	1733 (4) 1741 (3) 1749 (10)	—	—		

N. B. I numeri fra parentesi rappresentano le intensità relative dei diversi massimi.

In soluzione 0,33 M in CHCl_3 la banda carbonilica è nettamente sdoppiata sia nel cicloesano che nell'acetofenone. Nel primo le due componenti si spostano di circa 8 cm^{-1} verso le minori frequenze, la semilarghezza si riduce quasi nel rapporto 3 : 2, e il rapporto di intensità varia lievemente a vantaggio della componente a più bassa frequenza rispetto al liquido puro. Nel secondo frequenze delle componenti e semilarghezza della banda sono pressoché immutate rispetto al liquido puro, mentre il rapporto di intensità varia a vantaggio della componente a più bassa frequenza ben più nettamente che nel cicloesano. Questa diversa dipendenza del rapporto di intensità dalla concentrazione in CHCl_3 risulta chiaramente dagli spettri delle soluzioni 0,015 M: mentre nel cicloesano le due componenti hanno ancora intensità poco diverse, nell'acetofenone quella a più alta frequenza è apparentemente scomparsa.

Nel cicloesano liquido l'armonica della banda carbonilica presenta forse una debolissima inflessione verso le alte frequenze. Nell'acetofenone liquido invece l'armonica è sicuramente semplice, così come nelle soluzioni in CCl_4 di entrambi i chetoni.

Ci sembra che per ora non si possa dare alcuna ragionevole spiegazione di questo comportamento della banda del carbonile chetonico. L'ipotesi di un accoppiamento di natura dipolare fra le oscillazioni carboniliche di due o più

Fig. 1. - Cicloesano.

- A) liquido puro;
B) soluzione 0,015 M in CHCl_3 ;
C) soluzione 0,33 M in CHCl_3 .

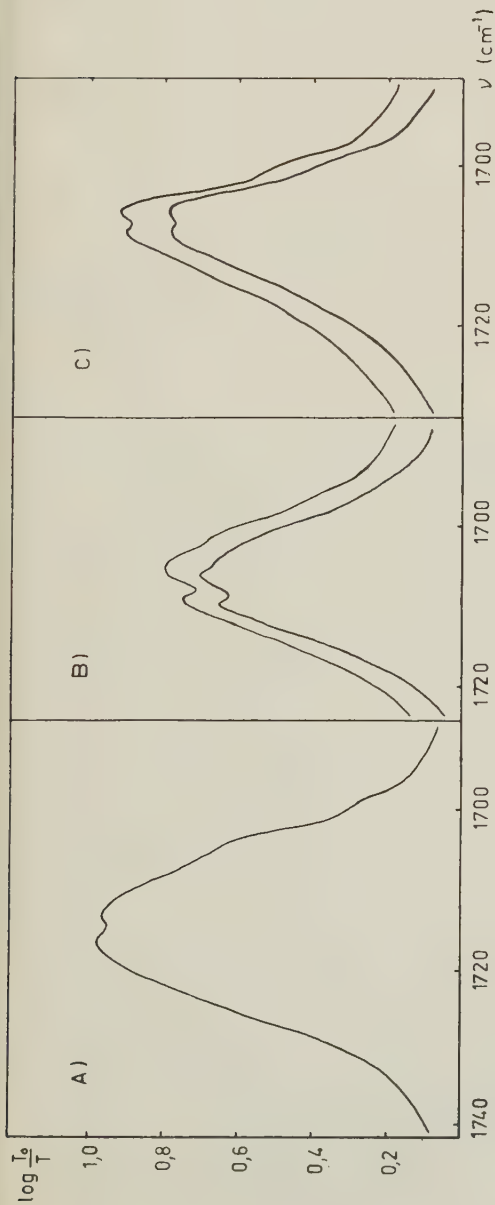
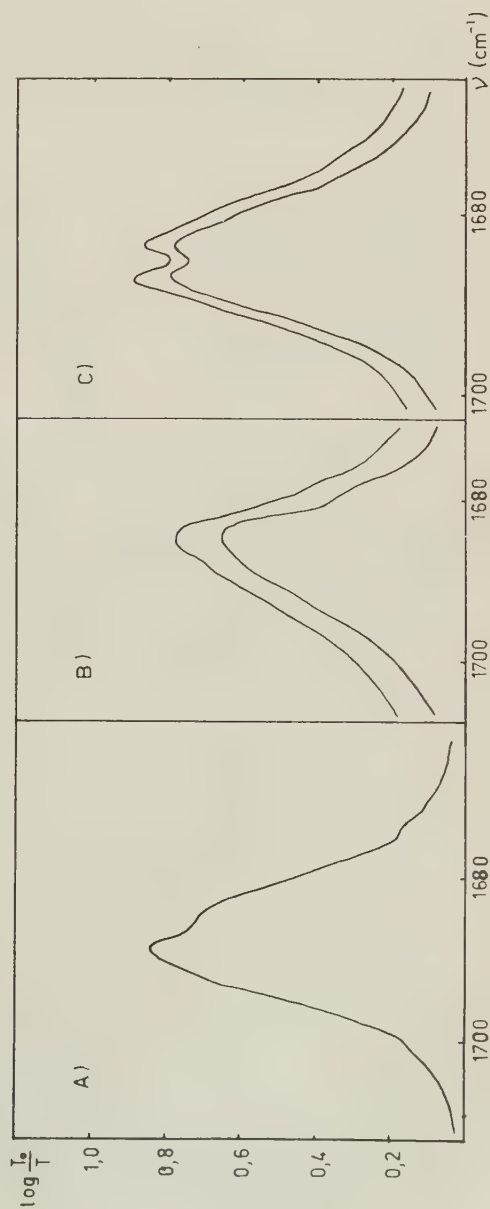


Fig. 2. - Acetofenone.

- A) liquido puro;
B) soluzione 0,015 M in CHCl_3 ;
C) soluzione 0,33 M in CHCl_3 .



molecole, avanzata per la prima volta da Lecomte, Gray e Taboury ⁽⁶⁾, e recentemente riproposta da Baker ⁽⁷⁾ anche per composti di natura non chetonica, dovrebbe discutersi in relazione con la persistenza di una struttura complessa della banda carbonilica anche a concentrazioni molto basse in solvente inerte.

Anche altri composti presentano uno sdoppiamento della banda carbonilica, che è stato attribuito o a risonanza di Fermi (carbonato di etilene ⁽⁸⁾) o a isomeria di rotazione (furfurolo ⁽⁹⁾ esteri acetici sostituiti ⁽¹⁰⁾, ω -cloroacetofenoni ⁽¹¹⁾). Ma per i chetoni la sistematicità dell'effetto, e la presenza in molti casi di più di due componenti, non consentono di prendere in considerazione queste possibilità di interpretazione.

Ringraziamo vivamente il prof. G. B. Bonino per l'interessamento mostrato a questo lavoro.

Chimica fisica. — *Sul calcolo degli integrali di penetrazione che interessano la teoria degli orbitali molecolari* (*). Nota di MASSIMO SIMONETTA, VALERIA PIERPAOLI e GIORGIO FAVINI, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

Nell'applicazione della teoria degli orbitali molecolari a molecole complesse ci si trova frequentemente di fronte a serie difficoltà analitiche nella determinazione del valore di alcuni integrali su orbitali atomici, specie se riguardanti due o più centri di forza. Nella presente Nota ci siamo occupati degli integrali di penetrazione che rispondono alle seguenti definizioni:

$$(A : BB) = - \int H_A^*(i) \psi(B, i) \psi(B, i) dV_i \quad \begin{array}{l} \text{integrali di penetrazione} \\ \text{coulombiani} \end{array}$$

$$(A : AB) = - \int H_A^*(i) \psi(A, i) \psi(B, i) dV_i \quad \begin{array}{l} \text{integrali di penetrazione} \\ \text{di scambio} \end{array}$$

dove $H_A^*(i)$ rappresenta il potenziale dell'elettrone i nel campo dell'atomo A elettricamente neutro e $\psi(B, i)$, $\psi(A, i)$ sono orbitali atomici rispetti-

(6) LECOMTE, GRAY e TABOURY, «Compt. Rend.», 224, 907 (1947).

(7) BAKER, «J. Phys. Chem.», 60, 1660 (1956).

(8) ANGELL, «Trans. Faraday Soc.», 52, 1178 (1956).

(9) ALLEN e BERNSTEIN, «Canad. J. Chem.», 33, 1055 (1955).

(10) CASTINEL, CALAS e JOSIEN, «Cah. Phys.», 10, n. 73, 46 (1956).

(11) BELLAMY, THOMAS e WILLIAMS, «J. Chem. Soc.», 1956, 3704.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la Laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

vamente appartenenti all'atomo B e all'atomo A. Parr e Crawford ⁽¹⁾ hanno calcolato in particolare l'integrale:

$$(C : CC) = - \int H_A^*(1) \psi(B, 1) \psi(B, 1) dV_1$$

dove A e B sono atomi di carbonio, $H_A^*(1)$ è l'operatore energia potenziale a simmetria sferica per l'elettrone 1 nel campo dell'atomo di carbonio neutro A e gli orbitali $\psi(B, 1)$ sono orbitali atomici $2p$ idrogenoidi appartenenti all'atomo di carbonio B.

L'espressione da loro ottenuta è la seguente:

$$(C : CC) = \frac{Z_C e^{-\rho}}{1920} \left[\frac{4}{7} \rho^5 + \frac{67}{7} \rho^4 + 86 \rho^3 + 461 \rho^2 + 1125 (\rho + 1) \right]$$

dove $\rho = Z_C r$, r è la distanza tra i due atomi di carbonio in Å e Z_C è la carica nucleare effettiva.

Un diverso metodo per il calcolo degli integrali di penetrazione è stato suggerito da Barnett e Coulson ⁽²⁾ e successivamente applicato anche da Scrocco e Salvetti ⁽³⁾; anch'esso però è valido quando l'atomo neutro A possiede una distribuzione di carica elettronica a simmetria sferica. Questa particolare situazione non è sempre verificata nei problemi interessanti la struttura elettronica delle molecole; la difficoltà è stata superata o trascurando completamente gli integrali di penetrazione ^(4,5) o valutandoli con metodi approssimati e semi-empirici particolari ^(6,7).

Nella presente Nota sono stati calcolati teoricamente gli integrali $(C : NN)$ e $(N : NN)$ in funzione della distanza tra i due nuclei e nel caso di $(N : NN)$ dove l'atomo neutro non ha simmetria sferica per una particolare direzione spaziale. Successivamente abbiamo applicato un metodo di calcolo empirico fondato essenzialmente su di una estensione del metodo delle sfere uniformemente cariche già usato per un calcolo approssimato di certi integrali di repulsione elettronica ⁽⁸⁾.

Il confronto tra i risultati ottenuti per via teorica e col metodo approssimato ha confermato che per quest'ultima via si raggiungono risultati soddisfacenti, il che è di notevole interesse data l'estrema facilità del metodo stesso.

(1) R. G. PARR, B. L. CRAWFORD Jr., « J. Chem. Phys. », **16**, 1049 (1948).

(2) M. P. BARNETT, C. A. COULSON, « Phil. Trans. Roy. Soc. », **243**, 221 (1951).

(3) E. SCROCCO, C. SALVETTI, « Ric. Scient. », **21**, 1629 (1951); **22**, 1766 (1952); **23**, 98 (1953).

(4) R. PARISER, « J. Chem. Phys. », **24**, 250 (1956).

(5) M. SIMONETTA, G. FAVINI, S. CARRÀ, V. PIERPAOLI, « Nuovo Cimento », **4**, 1364 (1956).

(6) R. PARISER, R. G. PARR, « J. Chem. Phys. », **21**, 767 (1953).

(7) M. J. S. DEWAR, L. PAOLONI, « Trans. Faraday Soc. », **52**, 261 (1957).

(8) R. PARISER, R. G. PARR, « J. Chem. Phys. », **21**, 466 (1953).

Calcolo di (C : NN).

Abbiamo usato autofunzioni idrogenoidi ortonormali. La densità elettronica dell'atomo di carbonio neutro, considerando i due elettroni $1s$ concentrati nel nucleo, risulta espressa da:

$$\sigma(r) = \frac{Z_C^3}{4} e^{-Z_C r} (Z_C^2 r^2 - 2Z_C r + 2)$$

dove r è la distanza dell'elettrone dal nucleo in unità atomiche e Z_C è la carica nucleare effettiva da noi assunta uguale a 3,25.

L'attrazione di un atomo di C neutro per un elettrone è:

$$H_I = -\frac{4e^2}{a} + \frac{1}{a} \int_0^a e^2 \sigma(r) r^2 dr + \int_a^\infty e^2 \sigma(r) r dr$$

dove a è la distanza dell'elettrone dal nucleo dell'atomo di C.

Poiché

$$\int_0^\infty \sigma(r) r^2 dr = 4$$

risulta:

$$H_I = -\int_{a_1}^\infty \left(\frac{r}{a} - 1\right) \sigma(r) r dr = \frac{1}{2a} e^{-Z_C a} [16 + 12(Z_C a) + 4(Z_C a)^2 + (Z_C a)^3].$$

Pertanto considerando un elettrone nell'orbitale $2p_x$ dell'atomo di azoto e usando le coordinate di Sklar a, b, φ (vedi fig. 1), l'integrale (C : NN) risulta espresso da:

$$(C : NN) = -\int \frac{1}{2a} e^{-Z_C a} [16 + 12(Z_C a) + 4(Z_C a)^2 + (Z_C a)^3] e^{-Z_N b} \frac{Z_N^5}{32\pi} b_1^2 \sin^2 \vartheta_{b_1} \cos^2 \varphi dV$$

dove

$$dV = \frac{1}{R} a da b db d\varphi \quad \text{e} \quad \sin^2 \vartheta_{b_1} = \frac{2a^2 b^2 + 2a^2 R^2 + 2b^2 R^2 - a^4 - b^4 - R^4}{4b^2 R^2}.$$

Integrando rispetto a φ si ottiene (C : NN) in funzione solo di a e b :

$$(C : NN) = -\int f(a, b) da db.$$

L'integrazione rispetto a queste variabili è stata eseguita tenendo presente che l'integrale di una generica funzione $f(a, b)$ si spezza nella somma di due integrali:

$$\int f(a, b) da db = \int_R^\infty da \int_{a-R}^{a+R} f(a, b) db + \int_0^R da \int_{R-a}^{R+a} f(a, b) db$$

dove

$$f(a, b) = \frac{e^{-Z_C a}}{2a} [16 + 12(Z_C a) + 4(Z_C a)^2 + (Z_C a)^3] e^{-Z_N b} \frac{Z_N^5}{32\pi} b^2 \frac{1}{R} ab$$

$$\frac{2a^2 b^2 + 2a^2 R^2 + 2b^2 R^2 - a^4 - b^4 - R^4}{4b^2 R^2}$$

L'espressione finale di (C : NN) in funzione di R ci ha permesso di calcolare i valori riportati nella Tabella I.

Calcolo di (N : NN).

Per l'atomo di azoto neutro, nello stato di valenza appropriato al caso, per esempio, della piridina, la configurazione elettronica è la seguente: $(1s)^2 (sp^2)^4 (p_x)^1$ (vedi fig. 2) e la densità elettronica non ha più simmetria sferica.

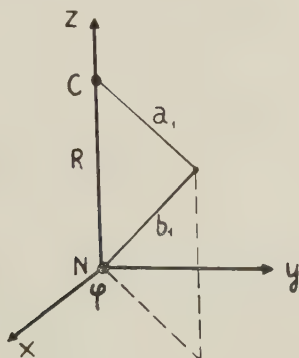


Fig. 1.

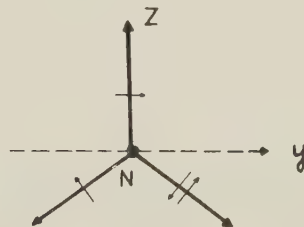


Fig. 2.

L'operatore energia potenziale per un elettrone nel campo dell'atomo di azoto neutro è dato da:

$$V = e^2 \int \frac{1}{R} \sigma(r, \vartheta, \varphi) dV - \frac{5e^2}{r_1}$$

dove σ è la densità degli elettroni dello stato L (al solito gli elettroni $1s$ si considerano concentrati nel nucleo) espressa per mezzo di opportuni orbitali ortonormali ibridi derivati dalla combinazione lineare di autofunzioni idrogenoidi.

Considerando un elettrone appartenente all'orbitale $2p_x$ di un atomo di azoto posto alla distanza R dal primo lungo l'asse z, l'espressione finale di (N : NN) risulta:

$$(N : NN) = \frac{Ze^{-q}}{161280} [60\rho^5 + 976,6864\rho^4 + 8561,4676\rho^3 + 44199,3384\rho^2 + 92777,7564]$$

$$(\rho + 1) + \frac{Ze^{-q}}{4\rho^5} \{ e^{-q} [0,8284\rho^5 + 12,6272\rho^4 + 58,5088\rho^3 + 123,6448\rho^2 +$$

$$+ 59,6448\rho - 144] + 11,3136\rho^3 + 8\rho^2 - 203,6448\rho + 144 \}$$

dove $\rho = RZ$ e $Z = 3,9$. I valori numerici calcolati alle varie distanze sono riportati nella Tabella II.

TABELLA I.

R (Å)	(C : NN) (eV)
1,058	2,796
1,20	1,920
1,323	0,995
1,36	0,800
1,46	0,520
1,58	0,326
1,70	0,210
2,11	0,029

TABELLA II.

R (Å)	(N : NN) (eV)
1,33	1,911
1,36	1,790
1,46	1,454
1,50	1,365
1,58	1,180
1,70	0,989
1,90	0,765
1,20	2,590
1,00	4,454

Metodo delle sfere uniformemente cariche.

Con questo metodo l'interazione elettrone-atomo neutro è ricondotta alla somma di interazioni elettrostatiche elettrone-nucleo ed elettrone-elettroni, prese con segni opportuni. Ad esempio per l'integrale (C : CC), rappresentando gli orbitali $2p_x, 2p_y, 2p_z$ ciascuno con due sfere tangenti di diametro $R = (4,597/3,25) = 1,414 \text{ Å}$ si ottengono per le varie interazioni le espressioni seguenti, dove con r si indica la distanza tra i due nuclei:

interazione elettrone $2p_x$ di C_1 - nucleo di C_2 :

$$-\frac{4e^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}},$$

interazione elettrone $2p_x$ di C_1 - elettrone $2s$ di C_2 :

$$2 \left[\left(\frac{e}{2}\right) e \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2}} \right],$$

interazione elettrone $2p_x$ di C_1 - elettrone $2p_x$ di C_2 :

$$2 \left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2}} \right) \right],$$

interazione elettrone $2p_x$ di C_1 - elettrone $2p_y$ di C_2 :

$$2 \left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 \frac{2}{\sqrt{r^2 + 2\left(\frac{R}{2}\right)^2}} \right],$$

interazione elettrone $2p_x$ di C_1 - elettrone $2p_z$ di C_2 :

$$2 \left\{ \left(\frac{e}{2} \right)^2 \left[\frac{1}{\sqrt{\left(r - \frac{R}{2} \right)^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(r + \frac{R}{2} \right)^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2}} \right] \right\}.$$

Nel caso in cui le sfere si vengono a sovrapporre si fa l'assunzione di rimpicciolire le sfere dell'orbitale appartenente all'atomo neutro in modo da rendere tangenti le sfere che interagiscono. Analogamente si è operato per l'integrale (C : NN), tenendo semplicemente conto del fatto che il valore del diametro delle sfere uniformemente cariche con cui si rappresenta l'orbitale $2p_x$ è $R_N = (4,597/3,9) = 1,18 \text{ \AA}$.

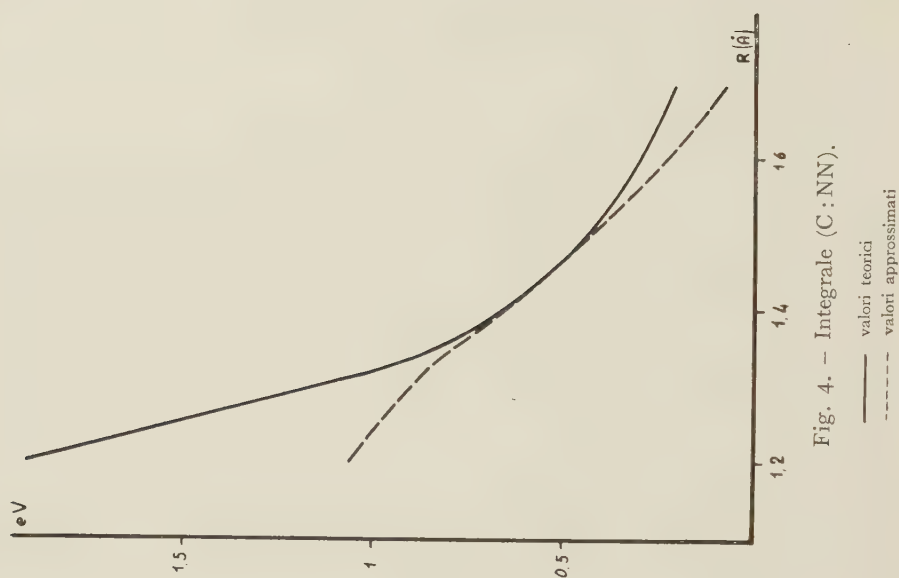
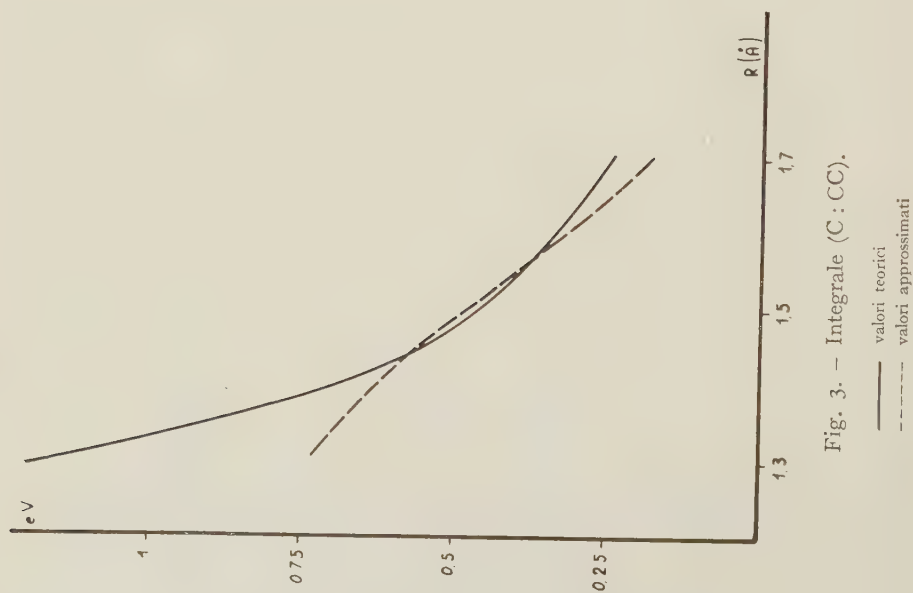
Per il calcolo degli integrali (N : NN) e (N : CC) occorre rappresentare mediante sfere degli orbitali ibridi. Un ibrido trigonale sp^2 sarà rappresentato da due sfere tangenti di diametro diverso; i loro valori sono stati fissati col seguente criterio: considerando ad esempio gli orbitali p_z e $\frac{1}{\sqrt{3}}s + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}p_z$ imponiamo la condizione che nei punti dell'asse z (cioè per $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$) la densità di probabilità per l'orbitale p_z per $r = R_N = 1,18 \text{ \AA}$ debba essere uguale alla densità di probabilità per l'orbitale ibridizzato; cioè scriviamo la relazione:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}s(r, \vartheta) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}p_z(r, \vartheta) \right]^2 = [p_z(R_N, \vartheta)]^2 \quad \text{per } \vartheta = 0 \quad \text{e} \quad \vartheta = \pi.$$

Si ottengono allora per i diametri delle due sfere dell'orbitale ibrido i seguenti valori: $R_1 = 0,86 \text{ \AA}$ e $R_2 = 1,26 \text{ \AA}$.

TABELLA III.

(C : CC)		(C : NN)		(N : NN)		(N : CC)	
R (Å)	valore (eV)	R (Å)	valore (eV)	R (Å)	valore (eV)	R (Å)	valore (eV)
1,30	0,734	1,058	1,335	1,00	4,045	1,36	1,771
1,36	0,672	1,20	1,070	1,33	1,836	1,46	1,349
1,39	0,651	1,323	0,867	1,36	1,666	1,50	1,196
1,46	0,547	1,36	0,762	1,46	1,185	1,58	0,916
1,50	0,476	1,46	0,517	1,50	1,014	1,65	0,701
1,58	0,343	1,58	0,271	1,58	0,705	1,70	0,554
1,625	0,273	1,70	0,071	1,70	0,329	1,80	0,368
1,70	0,170			1,80	0,153		



Le cariche totali su ciascuna sfera si ottengono poi imponendo la condizione che la carica complessiva dell'orbitale ibrido sia uguale ad uno (in unità atomiche) e che si distribuisca con densità costante. La carica totale sulle due sfere risulta così rispettivamente 0,239 e e 0,761 e .

Ottenuti così diametri e cariche delle varie sfere il calcolo degli integrali ($N : NN$) e ($N : CC$) è condotto in modo del tutto analogo a quello degli integrali ($C : CC$) e ($C : NN$). I risultati numerici sono raccolti nella Tabella III.

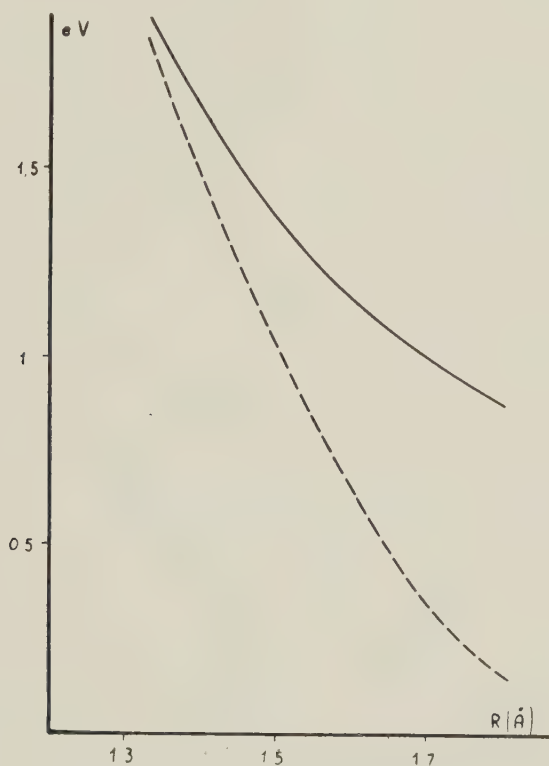


Fig. 5. — Integrale ($N : NN$).

— valori teorici
----- valori approssimati

Per meglio confrontare i valori degli integrali di penetrazione calcolati col metodo approssimato delle sfere tangenti uniformemente cariche con i valori degli stessi integrali calcolati esattamente per via analitica abbiamo costruito i grafici delle figg. 3, 4 e 5.

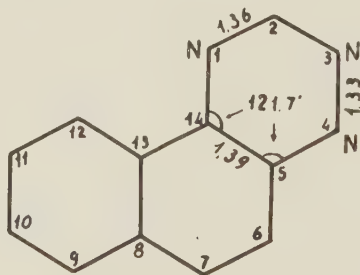
Per le distanze internucleari che si incontrano nei calcoli di strutturistica molecolare l'accordo risulta buono; da qui la giustificazione di adottare, per la valutazione degli integrali di penetrazione, il metodo delle sfere uniformemente cariche, metodo estremamente rapido rispetto a quello teorico e che si può facilmente estendere anche al caso di atomi a numero atomico elevato e quindi ai casi in cui intervengono orbitali a numero quantico principale superiore a due.

Chimica fisica. — *Spettro di assorbimento elettronico della (1,2-e)-as-naftotriazina* ^(*). Nota di GIORGIO FAVINI, VALERIA PIERPAOLI e MASSIMO SIMONETTA, presentata ^(**) dal Socio L. CAMBI.

Recentemente ⁽¹⁾ sono stati ottenuti gli spettri ultravioletti di assorbimento della (1,2-e)-as-naftotriazina e della (2,1-e)-as-naftotriazina in cicloesano e in metanolo; le bande osservate sono state assegnate a transizioni $n \rightarrow \pi$ e $\pi \rightarrow \pi$ in base a considerazioni sull'effetto della polarità del solvente e per analogia con lo spettro della 1,2,4-benzotriazina ⁽²⁾.

Per la (1,2-e)-as-naftotriazina è stato applicato il metodo semi-empirico di Pariser a Parr ⁽³⁾ per calcolare le energie dei livelli eccitati e l'intensità delle transizioni $\pi \rightarrow \pi$. Nella presente nota vengono indicate nelle loro linee generali le modalità seguite nel calcolo, confrontando alla fine i dati teorici ottenuti con i dati sperimentali.

La geometria ammessa per la molecola e la numerazione adottata per gli atomi sono state le seguenti:



Gli anelli benzenici sono stati considerati come esagoni regolari con distanza C-C di 1,39 Å; gli angoli CCN sono stati ammessi uguali a quelli della fenazina ⁽⁴⁾ e le distanze C-N e N-N sono state fissate rispettivamente in 1,36 e 1,33 Å con gli stessi criteri adottati nella benzotriazina ⁽²⁾, tenuto conto che variazioni del 5 % sulle distanze e sugli angoli non alterano sensibilmente i risultati.

Il calcolo è stato condotto adottando i valori usuali per i potenziali di ionizzazione ($W_N = -14,63$ eV e $W_C = -11,22$ eV), per le affinità elettro-

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la Laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) M. SIMONETTA, G. FAVINI, V. PIERPAOLI, «Nuovo Cimento», 5, 1814 (1957).

(2) M. SIMONETTA, G. FAVINI, S. CARRÀ, V. PIERPAOLI, «Nuovo Cimento», 4, 1364 (1956).

(3) R. PARISER, R. G. PARR, «J. Chem. Phys.», 21, 466, 767 (1953).

(4) F. H. HERBSTEIN, G. M. J. SCHMIDT, «Acta Cryst.», 8, 406 (1955).

niche ($A_N = 2,36$ eV e $A_C = 0,69$ eV) e per gli integrali di risonanza ($\beta_{CC} = -2,39$, eV, $\beta_{CN} = -2,576$ eV e $\beta_{NN} = -1,67$ eV) ⁽²⁾. Gli integrali di repulsione coulombiana su orbitali atomici ($pp|qq$) sono stati valutati graficamente riportando per ciascuna coppia di atomi in funzione della distanza tra p e q alcuni valori dell'integrale calcolati per $r \geq 2,80$ Å con il metodo delle sfere uniformemente cariche ⁽³⁾ e per $r < 2,80$ Å con la formula

$$ar + br^2 = 1/2 [(pp|pp) + (qq|qq)] - (pp|qq)$$

in cui le costanti a e b sono state ottenute assumendo i valori dell'integrale ricavati col primo metodo alle distanze $r = 2,80$ Å e $r = 3,70$ Å.

Gli integrali ($pp|pp$) sono stati ricavati dalla relazione: $(pp|pp) = -W_p - A_p$ e gli integrali coulombiani α dall'espressione:

$$\alpha = W_p - \sum_{q \neq p} [(pp|qq) + (q:pp)] - \sum_r (r:pp)$$

ritenendo però trascurabili gli integrali di penetrazione.

Come orbitali molecolari di partenza sono stati usati quelli del fenantrene calcolati col metodo LCAO standard secondo le indicazioni di Pullman ⁽⁵⁾; considerando solo i due livelli occupati meno stabili e i primi due livelli eccitati essi sono:

$$\begin{aligned} \psi_6 = & 0,36143 (\varphi_{12} - \varphi_1) + 0,07364 (\varphi_{11} - \varphi_2) - 0,30479 (\varphi_{10} - \varphi_3) - \\ & - 0,30805 (\varphi_9 - \varphi_4) + 0,06789 (\varphi_8 - \varphi_5) + \\ & + 0,36027 (\varphi_7 - \varphi_6) + 0,20431 (\varphi_{13} - \varphi_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_7 = & 0,13525 (\varphi_{12} + \varphi_1) + 0,38296 (\varphi_{11} + \varphi_2) + 0,12667 (\varphi_{10} + \varphi_3) - \\ & - 0,21624 (\varphi_9 + \varphi_4) - 0,35212 (\varphi_8 + \varphi_5) - \\ & - 0,17560 (\varphi_7 + \varphi_6) - 0,34266 (\varphi_{13} + \varphi_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_8 = & 0,13637 (\varphi_{12} - \varphi_1) - 0,42798 (\varphi_{11} - \varphi_2) + 0,20728 (\varphi_{10} - \varphi_3) + \\ & + 0,00830 (\varphi_9 - \varphi_4) - 0,33674 (\varphi_8 - \varphi_5) - \\ & - 0,14993 (\varphi_7 - \varphi_6) + 0,34544 (\varphi_{13} - \varphi_{14}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_9 = & 0,36143 (\varphi_{12} + \varphi_1) - 0,07364 (\varphi_{11} + \varphi_2) - 0,30479 (\varphi_{10} + \varphi_3) + \\ & + 0,30805 (\varphi_9 + \varphi_4) + 0,06789 (\varphi_8 + \varphi_5) - \\ & - 0,36027 (\varphi_7 + \varphi_6) - 0,20431 (\varphi_{13} + \varphi_{14}). \end{aligned}$$

Detta V_0 la configurazione fondamentale antisimmetrizzata (con due elettroni in ciascuno degli orbitali $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6$, e ψ_7), sono state considerate solo configurazioni che differiscono da V_0 per il salto di un elettrone dagli ultimi due livelli fondamentali (sesto e settimo) ai primi due eccitati (ottavo e nono) e precisamente, usando il simbolismo di Pariser e Parr, le seguenti: $V_0, V_{78}, V_{79}, V_{68}, V_{69}$.

(5) B. PULLMAN, A. PULLMAN, *Les théories électroniques de la chimie organique*, Masson Ed., Paris (1952).

Il determinante secolare relativo alla interazione delle configurazioni viene ad essere del quinto ordine:

$$\begin{vmatrix} -x & V_0/V_{78} & V_0/V_{79} & V_0/V_{68} & V_0/V_{69} \\ V_0/V_{78} & E_{V_{78}} - E_0 - x & V_{78}/V_{79} & V_{78}/V_{68} & V_{78}/V_{69} \\ V_0/V_{79} & V_{78}/V_{79} & E_{V_{79}} - E_0 - x & V_{79}/V_{68} & V_{79}/V_{69} \\ V_0/V_{68} & V_{78}/V_{68} & V_{79}/V_{68} & E_{V_{68}} - E_0 - x & V_{68}/V_{69} \\ V_0/V_{69} & V_{78}/V_{69} & V_{79}/V_{69} & V_{68}/V_{69} & E_{V_{69}} - E_0 - x \end{vmatrix} = 0$$

dove x sono le energie dei diversi livelli a meno dell'energia della configurazione dello stato fondamentale.

Gli elementi di matrice, valutati con le espressioni date da Pariser ⁽⁶⁾ sono raccolti nella Tabella I, mentre nella Tabella II vengono riportati i valori numerici degli integrali di cuore e di quelli coulombiani.

TABELLA I.

Elementi di matrice	Espressioni	Valori numerici
V_0/V_{78}	$1/\sqrt{2} (I_{78} + 1,30142)$	2,09647
V_0/V_{79}	$1/\sqrt{2} (I_{79} + 6,20367)$	- 2,05709
V_0/V_{68}	$1/\sqrt{2} (I_{68} - 7,78628)$	- 1,74474
V_0/V_{69}	$1/\sqrt{2} (I_{69} - 0,67472)$	0,17468
$E_{V_{78}} - E_0$	$I_{88} - I_{77} - 1,93479$	2,24349
$E_{V_{79}} - E_0$	$I_{99} - I_{77} - 24,49270$	2,33764
$E_{V_{68}} - E_0$	$I_{88} - I_{66} + 24,20391$	3,46493
$E_{V_{69}} - E_0$	$I_{99} - I_{66} + 0,51184$	2,42492
V_{78}/V_{79}	$I_{89} + 0,21714$	- 0,30566
V_{78}/V_{68}	$I_{67} + 0,16221$	- 0,16848
V_{78}/V_{69}	- 0,69034	- 0,69034
V_{79}/V_{68}	0,35606	0,35606
V_{79}/V_{69}	- 0,19855	- 0,19855
V_{68}/V_{69}	- 0,39909	- 0,39909

Risolvendo il determinante sono stati ottenuti i seguenti valori delle energie (in eV):

$$E_0 = -2,21921 \quad E_1 = 1,50802 \quad E_2 = 2,43108 \quad E_3 = 3,31850 \quad E_4 = 5,43250$$

(6) R. PARISER, « J. Chem. Phys. », 24, 250 (1956).

che danno per le prime tre transizioni $\pi - \pi$:

$$\Delta E_1 = 3,73 \text{ eV} \quad \Delta E_2 = 4,65 \text{ eV} \quad E_3 = 5,54 \text{ eV}$$

in buon accordo con i valori sperimentali ($\Delta E_1 = 3,35$; $\Delta E_2 = 4,54$; $\Delta E_3 = 5,58$ (1)).

TABELLA II.

Integrali di cuore	Valore	Integrali coulombiani	Valore
I ₆₆	— 79,75657	α_1	— 77,29
I ₇₇	— 104,67383	α_2	— 66,96
I ₈₈	— 100,49555	α_3	— 69,91
I ₉₉	— 77,84349	α_4	— 72,59
I ₆₇	0,33069	α_5	— 78,64
I ₆₈	6,55256	α_6	— 71,61
I ₆₉	0,79824	α_7	— 71,46
I ₇₈	0,18101	α_8	— 77,30
I ₇₉	— 7,65826	α_9	— 68,31
I ₈₉	— 0,52280	α_{10}	— 64,16
		α_{11}	— 65,29
		α_{12}	— 72,39
		α_{13}	— 81,70
		α_{14}	— 82,04

Le funzioni d'onda corrispondenti ai diversi stati sono raccolte nella Tabella III, dove per ogni colonna sono riportati i coefficienti della funzione di configurazione indicata alla sommità della colonna nella funzione d'onda finale specificata nella prima colonna.

TABELLA III.

	ψ_{V_0}	$\psi_{V_{78}}$	$\psi_{V_{79}}$	$\psi_{V_{68}}$	$\psi_{V_{69}}$	Energia (eV) (*)
ψ_0	0,83674	— 0,37014	0,33329	0,22124	— 0,05323	— 2,21921
ψ_1	0,07250	— 0,60333	— 0,48253	— 0,15459	— 0,61153	1,50802
ψ_2	0,09678	— 0,11245	— 0,65995	0,55641	0,48254	2,43108
ψ_3	0,11192	— 0,56533	0,09669	— 0,51779	0,62481	3,31859

(*) Come energia di riferimento viene assunta quella della configurazione dello stato fondamentale.

Col metodo descritto da Mulliken e Riecke ⁽⁷⁾ è stata infine calcolata la forza dell'oscillatore che caratterizza l'intensità delle singole transizioni $\pi \rightarrow \pi$:

$$f = 1,085 \cdot 10^{11} \nu_{ab} \sum_{i=x,y,z} (M_{ab}^i)^2$$

dove ν_{ab} è la frequenza della transizione in cm^{-1} e M_{ab}^i è la componente del momento di transizione lungo l'asse i ; i valori ottenuti sono stati:

$$f_1 = 0,043 \quad f_2 = 0,13 \quad f_3 = 0,20$$

in discreto accordo con quelli sperimentali ricavati dalle curve di assorbimento con l'espressione:

$$f = \frac{1,135 \cdot 10^{12}}{N} \int k_\nu d\nu$$

dove N è il numero di molecole/cc e k_ν è il coefficiente di estinzione ($f_1 = 0,058$; $f_2 = 0,36$; $f_3 = 0,73$).

La buona concordanza ottenuta tra valori teorici e sperimentali ha dato una ulteriore conferma della applicabilità del metodo di Pariser e Parr, con i valori adottati per i parametri empirici, per l'interpretazione degli spettri di assorbimento elettronici di qualsiasi tipo di azone.

Fisiologia vegetale. — *Studi sulla fisiologia dell'acido ascorbico.* — XXIII. *Azione inibente dell'acido deidroascorbico sulla fosforilazione ossidativa di mitocondri vegetali*^(*). Nota di GIORGIO FORTI, presentata^(**) dal Socio S. TONZIG.

Il singolare parallelismo tra gli effetti dell'acido indolacetico sulla crescita di internodi isolati e quelli sul rapporto tra forma ridotta e forma ossidata dell'acido ascorbico [1, 2] è stato rilevato in precedenti lavori. Da essi appare che, a concentrazioni dell'ormone stimolanti la crescita, corrisponde un aumento del rapporto AA/DHA ⁽¹⁾, mentre a concentrazioni superiori a quella ottimale, e quindi progressivamente inibenti la crescita, corrisponde una diminuzione dello stesso rapporto. Questo comportamento, se collegato con altri risultati che dimostrano una spiccata capacità del sistema dell'ascorbico di intervenire nelle regolazioni della crescita, per un

(7) R. S. MULLIKEN, C. A. RIECKE, « Repts. Progr. Phys. », 8, 231 (1941).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano. Centro di studio per le ossido-riduzioni nei vegetali del C. N. R.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

(1) Abbreviazioni usate: AA, DHA: acido ascorbico, acido deidroascorbico; ATP, ADP: adenosintrì- e -difosfato; GSH, GS·SG: glutazione ridotto e ossidato; DKG: acido dichetogulonico; EDTA: etilendiaminotetracetato, sale disodico; TRIS: triidrossimetilaminometano FMN, FAD: flavinmononucleotide, flavinadenindinucleotide.

meccanismo sia diretto che mediato da altri sistemi quale quello del glutathione, ha suggerito l'ipotesi che l'azione dell'auxina sull'accrescimento possa almeno in parte essere imputabile alla sua capacità di controllare il tenore in AA e DHA nella cellula: particolare importanza assumendo la concentrazione in DHA cui spetterebbe una funzione di freno fisiologico di particolari attività metaboliche condizionanti, tra l'altro, l'accrescimento. A sostegno di questa ipotesi, precedenti ricerche hanno documentato come il DHA inibisca l'attività di diversi sistemi ossidativi in preparati enzimatici e mitocondriali vegetali [3 e 4] e l'attività respiratoria di segmenti di internodio di pisello [3]. Tale azione inibente è stata riscontrata anche sulle attività ossidativa e fosforilativa di mitocondri animali [5]. Scopo di questo lavoro è di mettere in evidenza l'azione inibente del DHA sulla fosforilazione ossidativa dei mitocondri vegetali, e di appurare se l'azione di questa sostanza si manifesta in misura diversa sulle ossidazioni respiratorie e sulle fosforilazioni ad esse accoppiate.

MATERIALI E METODI.

I mitocondri sono stati isolati, essenzialmente nel modo già descritto [6], dalla parte apicale degli internodi di piantine eziolate di pisello (*Pisum sativum*), coltivate per 4-7 giorni al buio, in ambiente termoregolato a 25°C. I segmenti di internodio venivano triturati in mortaio con una soluzione di mannite 0,42 M, contenente tampone di TRIS 0,02 M, pH 7,3, EDTA 0,01 M, $MgSO_4$ 0,005 M, e cisteina 0,004 M. La composizione di tale soluzione è stata notevolmente variata nelle diverse esperienze, com'è precisato nelle rispettive tabelle, per l'omissione o del EDTA o del $MgSO_4$ o della cisteina o di tutte queste sostanze.

Dopo l'isolamento e i lavaggi effettuati nel modo descritto [6], i mitocondri venivano risospesi in piccolo volume ed aggiunti, in piccoli becker oppure nelle vaschette del Warburg già contenenti tutti gli altri componenti dell'incubato in modo che le concentrazioni finali dei singoli reagenti fossero quelle desiderate, indicate nelle singole esperienze. La quantità di azoto proteico dei mitocondri presenti in ogni saggio variava, nelle diverse esperienze, da 0,2 a 0,35 milligrammi. Il valore della fosforilazione ossidativa è stato misurato con il metodo descritto da Lindberg e Ernster [7].

In tutte le esperienze le prove sono state condotte in doppio, ed i valori ottenuti nei doppi concordano entro il 5 %. Il consumo di ossigeno è stato misurato secondo la tecnica convenzionale del Warburg, con aria come fase gassosa. La determinazione del rapporto P/O (atomi di fosforo esterificati / atomi di ossigeno consumati) è stata eseguita misurando il tempo dal momento dell'aggiunta dei mitocondri alle vaschette del Warburg e determinando il consumo di ossigeno dopo 5 minuti primi di equilibramento a 20°C. Il consumo di ossigeno nei primi minuti è stato estrapolato, essendosi poi mantenuto lineare per tutta la durata dell'esperienza. Alla fine di questa, dai diverticoli delle vaschette è stato versato H_2SO_4 in modo che la sua concentrazione nell'incubato fosse normale. L'acido fosforico è stato versato immediatamente dopo l'ultima lettura dei manometri. Su una frazione dell'incubato si è quindi determinata la esterificazione del fosfato secondo Lindberg e Ernster [7].

Dove non si è determinato il consumo di ossigeno, i mitocondri sono stati incubati in piccoli becker, in modo che la sospensione costituisse uno strato sottile (0,3-0,4 cm.) sul fondo del recipiente. I becker venivano agitati meccanicamente al ritmo di 80 oscillazioni al minuto primo. L'azoto proteico dei mitocondri è stato determinato con il micro-

metodo secondo Kieldhal, distillando l'ammoniaca in corrente di vapore e raccogliendola in H_3BO_3 .

L'ATP, l'ADP e l'esochinasi impiegati in queste esperienze sono stati acquistati dalla ditta Sigma di S. Louis, USA. Tutte le soluzioni sono state preparate in H_2O distillata e deionizzata.

Il DHA è stato preparato ossidando con bromo una soluzione di AA in H_2O , secondo la procedura già descritta [5].

ESPERIENZE E RISULTATI.

La figura 1 mostra i risultati di due tipiche esperienze sull'azione del DHA, a diverse concentrazioni, sulla fosforilazione accoppiata alla ossidazione del l-malato e del succinato da parte di mitocondri di pisello. Dalle curve riportate risulta evidente che l'inibizione è funzione della concentrazione del DHA, mentre altre esperienze hanno messo in evidenza che se il DHA, preparato come descritto, veniva tenuto a pH 8 per un'ora prima di essere aggiunto ai mitocondri, e così trasformato in acido dichetogulonico (Tabella I), l'inibizione si riduce della metà. Il permanere di una certa azione inibente dopo trasformazione del DHA in DKG, già osservata da Marrè e coll. [4] nel corso di ricerche sull'inibizione da DHA dell'attività deidrogenasica di preparati enzimatici vegetali, può essere dovuta alla presenza di prodotti dell'ulteriore demolizione ossidativa del DKG, quali gli acidi trealonico e ossalico, la cui formazione è ben difficilmente evitabile nelle condizioni descritte. Un altro fatto tuttavia dà garanzia che l'inibizione della fosforilazione ossidativa osservata è realmente dovuta al DHA: la disinibizione ottenuta aggiungendo, simultaneamente ai mitocondri, del glutatione (Tabella I), composto notoriamente capace di ridurre il DHA ad AA, per azione della glutatione DHA-riduttasi, la cui presenza, già dimostrata nel materiale qui descritto, è stata confermata in queste ricerche. Come si vede nella Tabella I, il glutatione elimina parzialmente (esp. 1) o totalmente (esp. 2) l'inibizione da DHA. Le ricerche precedenti sull'inibizione da DHA, in estratti grezzi [3] od in preparati mitocondriali vegetali [4] e animali [8], di sistemi enzimatici di fondamentale importanza quali quelli ossidanti diversi acidi del ciclo di Krebs ed il glucosio-6-fosfato, erano state condotte con la tecnica al tetrazolio. Come è noto, questo colorante intercetta il trasporto di elettroni verso l'ossigeno a livello delle flavoproteine, probabilmente ricevendo gli elettroni dal FMN (o dal FAD). Un'inibizione osservata con questa tecnica deve quindi ritenersi a carico della deidrogenasi o dell'attività di enzimi flavoproteici. Le citate più recenti ricerche [5] sull'azione del DHA sulla fosforilazione ossidativa di mitocondri animali avevano sollevato tuttavia la possibilità di un'azione specifica del DHA sulle reazioni di conservazione dell'energia, essendosi notata un'inibizione più elevata a carico dell'attività fosforilativa che dell'ossidativa. Tale possibilità è stata studiata in mitocondri di pisello ed i dati della Tabella II mostrano che l'inibizione dell'esterificazione del fosfato è uguale a quella del consumo di ossigeno ed il rap-

porto P/O rimane pressoché invariato in seguito al trattamento dei mitocondri con DHA.

Va detto che non sempre i valori di inibizione da DHA riportati più sopra sono facilmente riproducibili; in diverse esperienze si sono ottenute inibizioni, per una stessa concentrazione di DHA, quanto mai variabili. In alcune esperienze l'effetto del DHA non si è potuto constatare affatto. Questa

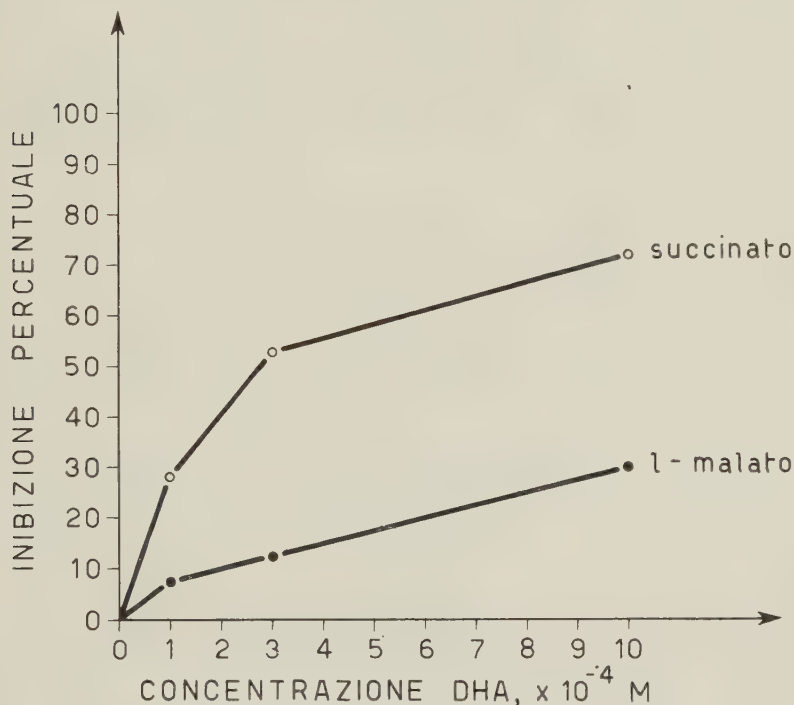


Fig. 1. — Inibizione da DHA della fosforilazione accoppiata alla ossidazione del succinato e del l-malato.

Mitocondri preparati senza MgSO_4 . Mezzo di incubazione: mannite 0,42 M, Tris 0,02 M, tampone di fosfati 0,005 M, MgSO_4 0,005 M, NaF 0,007 M, EDTA 0,01 M, citocromo c $1,6 \times 10^{-5}$ M ATP 0,0004 M, esochinasi in largo eccesso, glucosio 0,03 M, pH 7,3. Substrati 0,02 M. Le curve per il succinato e per il l-malato si riferiscono a preparazioni diverse. Incubazione per 9 min. primi a 20 °C.

scarsa riproducibilità dei risultati ottenuti può essere dovuta sia alle condizioni fisiologiche del materiale da cui i mitocondri vengono preparati, che possono variare notevolmente da cultura a cultura nonostante che le piante di pisello fossero coltivate in condizioni ambientali standardizzate, sia alla difficoltà di ottenere mitocondri aventi caratteristiche biochimiche costanti nei loro rapporti quantitativi nelle diverse preparazioni. Infatti, un diverso rapporto tra le numerose attività enzimatiche il cui insieme organizzato dà luogo alla fosforilazione ossidativa sarebbe sufficiente a spiegare la maggiore o minore sensibilità del fenomeno nel suo insieme all'azione del DHA.

TABELLA I.

Azione del DHA e del GSH sulla fosforilazione accoppiata alla ossidazione del succinato.

Mitocondri preparati in mannite, Tris, EDTA e cisteina 0,004 M nell'esperienza 1; nell'esperienza 2, mitocondri preparati in mannite, Tris, EDTA, KCl e MgSO_4 come descritto nei « metodi ».

Mezzo di incubazione: nell'esperienza 1, come in fig. 1. Nell'esperienza 2, è stato omissso il citocromo c, aggiunto KCl 0,005 M. Altre condizioni come in fig. 1.

N. dell'esperienza	Concentrazione del succinato	Altre aggiunte	Fosfato esterificato, in gamma	Variazioni rispetto al controllo in %
1	0,02 M	—	33,7	—
	»	DHA 0,001 M	17,0	— 50
	»	GSH 0,005 M	40,5	21
	»	GSH 0,005 M		
		DHA 0,001 M	27,5	— 32
2	0,003 M	—	64,5	—
	»	DHA 0,004 M	45,3	— 30
	»	DKG 0,004 M	55,5	— 14
	»	GSH 0,01 M	61,2	— 5
	»	DHA 0,004 M GSH 0,01 M	61,2	— 5

TABELLA II.

Azione del DHA sulla ossidazione del succinato e sulla relativa fosforilazione.

Condizioni sperimentali come nella fig. 1.

Aggiunte	Ossigeno consumato, microatomi	Fosfato esterificato, micromoli	P/O
Nessuna	1,37	1,80	1,32
DHA 10^{-3} M . .	0,86	1,12	1,27

Un fatto interessante a questo riguardo è quello che si osserva nella Tabella III, dalla quale appare che l'inibizione del DHA è sei volte maggiore, sugli stessi mitocondri, quando la concentrazione del substrato ossidabile

(il l-malato) venga abbassata fino a diventare fattore limitante della fosforilazione ossidativa. Esperienze preliminari avevano accertato che una concentrazione di l-malato del 0,0025 M consente la metà della fosforilazione ossidativa ottenibile con il substrato in eccesso (0,02 M). I dati della Tabella III sembrano quindi favorevoli all'ipotesi che l'inibizione del DHA sulla fosforilazione ossidativa sia dovuta essenzialmente (almeno nel caso della fosforilazione legata all'ossidazione del l-malato) all'azione di questa sostanza sulla deidrogenasi. In presenza di un eccesso di substrato, la malico-deidrogenasi potrebbe esserne protetta, e questa potrebbe essere una delle circostanze, non però l'unica, per cui in alcune esperienze non si è trovata alcuna azione del DHA sulla fosforilazione ossidativa.

TABELLA III.

Inibizione da DHA della fosforilazione ossidativa con diverse concentrazioni di malato quale substrato.

Mezzo di incubazione: mannite 0,42 M; Tris 0,02 M, pH 7,3; tampone di fosfati 0,0075 M, pH 7,3; MgSO_4 0,005 M; NaF 0,0075 M; AMP 0,008 M, ATP 0,0004 M. Incubazione per 8 min' a 23° C. Mitocondri preparati in mannite 0,42 M e Tris 0,02 M, pH 7,3.

Concentrazione del malato, M	Aggiunte	Fosfato esterificato, $\mu\text{M}/\text{mg}$ di N ora	Inibizione, in %
0,002	—	9,6	—
»	DHA 0,002 M	4,5	54
0,02	—	15,5	—
»	DHA 0,002 M	14,1	9

CONCLUSIONI.

L'azione inibente del DHA sulla fosforilazione ossidativa di mitocondri isolati da internodi di pisello è attribuibile esclusivamente all'inibizione delle reazioni ossidative da parte di questa sostanza, rimanendo invariato il rapporto P/O. Alla luce di questo fatto, anche i risultati di precedenti ricerche [3, 4, 5] condotte con la tecnica al tetrazolio sull'inibizione da DHA della l'attività deidrogenasica acquistano un più preciso significato fisiologico, in quanto si può ora ritenere che la frazione di respirazione inibita dal DHA sia accoppiata ai fenomeni fosforilativi, e quindi alla produzione di energia metabolicamente utilizzabile. D'altra parte il rilevamento di un'azione inibente del DHA sui sistemi fosforilanti è evidentemente suscettibile di un suggestivo collegamento coi dati precedentemente ottenuti circa la capacità dell'auxina, a concentrazione stimolante la crescita, di mantenere

basso il tenore in DHA nei tessuti [1] e, contemporaneamente, di indurre un significativo effetto di stimolo sulla attività dei processi sia ossidativi che fosforilativi [9].

BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. MARRÈ, G. FORTI e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 21, 460 (1956).
- [2] E. MARRÈ, O. ARRIGONI e G. FORTI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 22, 85 (1957).
- [3] S. TONZIG, F. TREZZI, G. LAUDI e E. MARRÈ, « Memorie Acc. Naz. Lincei », Sez. III, 4, 8 (1955).
- [4] E. MARRÈ, G. LAUDI e O. ARRIGONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 19, 460 (1956).
- [5] E. MARRÈ, G. FORTI e G. PECE, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 20, 646 (1956).
- [6] G. FORTI e G. TESTA « Rend. Acc. Naz. Lincei », 21 468 (1956).
- [7] O. LINDBERG e L. ERNSTER, in « Methods of Biochemical Analysis », Ed. D. Glick, vol. III, New-York 1956.
- [8] G. PECE, G. LAUDI e E. MARRÈ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 20, 513 (1956).
- [9] E. MARRÈ e G. FORTI, « Physiol. Plantarum » (1958). In corso di stampa.

Fisiologia. — *Azione del pantenolo sull'uomo e sull'animale succinilcolinizzato*^(*). Nota di DOMENICO SPINELLI e CARLO VITTORIO MORPURGO, presentata^(**) dal Socio R. MARGARIA.

Esperimenti precedentemente eseguiti sull'uomo hanno rivelato che l'effetto paralizzante della d-tubocurarina è potenziato dal pantenolo (Azione del pantenolo sull'uomo e sull'animale curarizzato - in corso di pubblicazione): il meccanismo d'azione di questo effetto non è tuttora chiaro, e perciò, al fine di indagare attraverso quale via agisca il pantenolo, si è voluto vedere se un altro farmaco curarizzante, ma a diverso meccanismo d'azione (la succinilcolina) sia anche potenziata dal pantenolo. Come è noto l'acetilcolina agirebbe reagendo con dei « ricettori » che si trovano sulla placca, provocando l'eccitamento e la depolarizzazione della placca: successivamente la colinesterasi distruggendo l'acetilcolina permette la ripolarizzazione della placca e il ritorno di questa alle condizioni primitive. La succinilcolina agirebbe come l'acetilcolina alla quale è così affine chimicamente: soltanto essa non verrebbe distrutta dalla colinesterasi che molto lentamente, per cui la placca rimane depolarizzata, ed i « ricettori » bloccati per un tempo notevole. La d-tubocurarina invece impedirebbe che l'acetilcolina formatasi raggiunga i « ricettori », attraverso un meccanismo non chiaro, ma che comunque non implica eccitamento della placca e depolarizzazione. Su questa base i curarici di sintesi sono stati distinti in due classi, polarizzanti e depolarizzanti.

L'effetto potenziante del pantenolo sulla d-tubocurarina poteva essere interpretato come dovuto ad un eventuale aumento della polarizzazione della placca: in tale eventualità nessun effetto o una azione antagonistica il pantenolo avrebbe dimostrato se l'effetto paralizzante fosse stato dovuto alla succinilcolina, sostanza ad azione depolarizzante.

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

Gli esperimenti venivano eseguiti sull'uomo nella maniera seguente: si praticava una perfusione endovenosa di una soluzione di succinilcolina a percentuale nota. Contemporaneamente si stimolava il nervo sciatico con un elettrodo a placca sistemato nella cavità poplitea, e si registrava con un oscillografo a raggi catodici l'elettromiogramma dal tricipite della sura rilevato mediante elettrodi applicati sulla cute. La perfusione veniva regolata in modo da ottenere una riduzione all'80 % della ampiezza della risposta elettromiografica. Quando questa riduzione era stabile, si iniettava per via endovenosa in una sol volta 1 g di pantenolo. L'elettromiogramma veniva quindi registrato per 10 min (fig. 1).

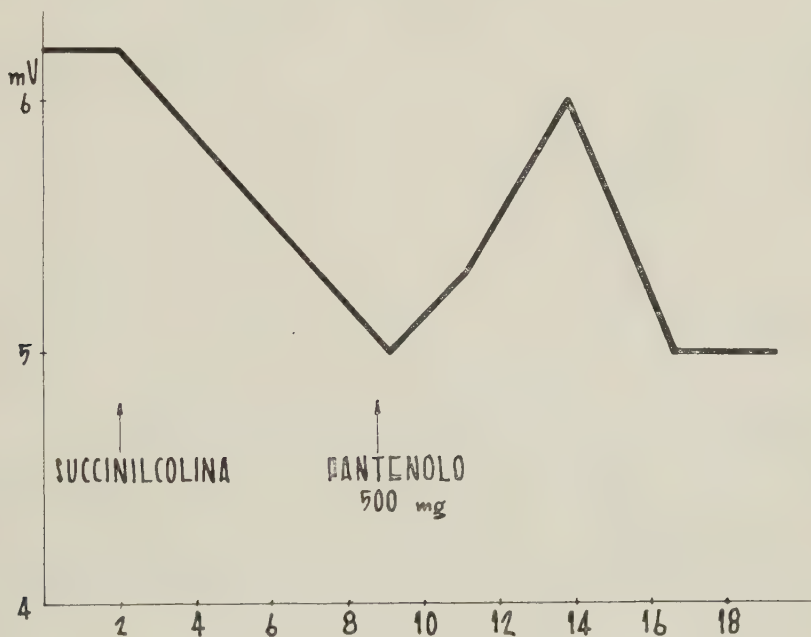


Fig. 1.

Sull'ordinata l'ampiezza della risposta elettromiografica nell'uomo trattato con succinilcolina e pantenolo.
Sull'ascissa il tempo in minuti.

Questo stesso tipo di esperimento è stato eseguito sul gatto con la sola differenza che la stimolazione veniva direttamente applicata sul nervo sciatico reciso. L'esperimento sull'animale rispetto a quello eseguito sull'uomo, aveva i vantaggi: 1) di ottenere un semplice preparato neuromuscolare privo di eventuali interferenze dei centri midollari; 2) di poter spingere più a fondo la curarizzazione ed ottenere una maggior diminuzione della risposta elettromiografica: l'animale veniva infatti trattato con succinilcolina fino a ridurre la risposta elettrica muscolare al 30 % del normale.

I risultati ottenuti concordano nel senso che l'iniezione di pantenolo provoca una diminuzione dell'effetto curarizzante sull'ampiezza dell'elettromiogramma, cioè un rialzo, se pur non molto accentuato (ca. 10 % \pm 1 in media), sempre presente, sia nell'uomo che nell'animale. Le figg. 1 e 2 riportano i risultati di due esperimenti tipici eseguiti rispettivamente nell'uomo

e nel gatto: sono stati eseguiti complessivamente 4 esperimenti sull'uomo e 5 sul gatto.

L'effetto antagonizzante del pantenolo si è osservato in ogni periodo dell'azione curarica, indipendentemente dalla entità in quel momento dell'effetto paralizzante: esso dura in media 5-6 min, dopo di che si dilegua. L'iniezione di pantenolo in assenza di curarici non provocava un aumento della risposta elettrica del muscolo stimolato attraverso il suo nervo. L'azione antagonista del pantenolo potrebbe essere spiegata alternativamente o con l'ipotesi precedentemente prospettata di una azione polarizzante del pante-

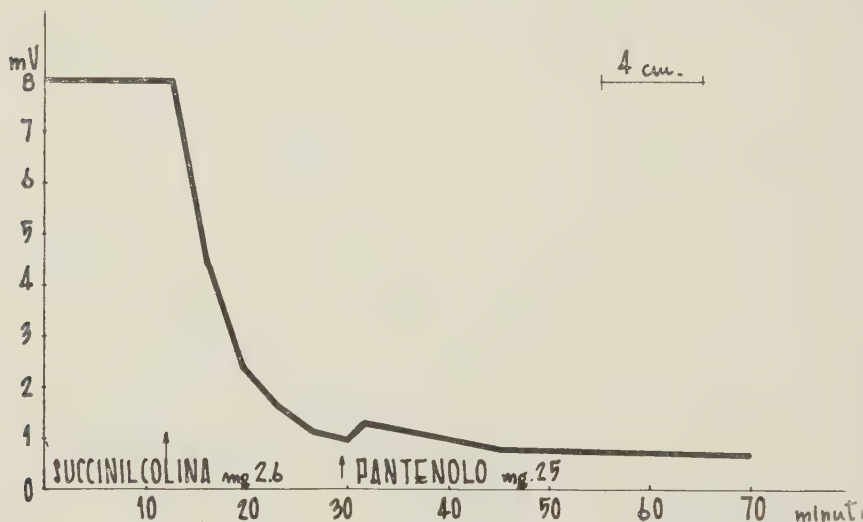


Fig. 2.

Sull'ordinata l'ampiezza della risposta elettromiografica espressa in mV., nel gatto di 2 Kg narcotizzato con Diogenal. L'iniezione di succinilcolina (mg. 2,6) determina una forte diminuzione dei potenziali d'azione muscolari: l'iniezione di mg. 25 di pantenolo, ha un evidente effetto anticurario.

nolo sulla placca neuromuscolare, o supponendo che esso agisca facilitando l'azione della colinesterasi, che potrebbe così più velocemente scindere la succinilcolina a livello della placca neuromuscolare.

L'attività colinesterasica di omogenato di muscolo è sempre la stessa in presenza o in assenza di pantenolo: d'altra parte l'iniezione di pantenolo solo non provoca nell'uomo nessun visibile effetto sull'elettromiogramma.

Appare perciò che l'azione antagonista del pantenolo sui curarici depolarizzanti sia da attribuire ad un presumibile effetto polarizzante del pantenolo sulla placca neuromuscolare.

BIBLIOGRAFIA.

- GALEOTTO E., «Acta Vitaminologica», X, 193 (1956). *Nota preliminare sull'impiego dei pantotenici quali antipachicurari.*
- GOODMAN L. S., GILMAN A., *The pharmacological basis of therapeutics*. The Macmillan Co. New York, 1955.
- JACQUES J. E., «The Lancet», 10, 861 (1951). *Pantothenic acid in paralytic ileus.*

Fisiologia. — *Opposte influenze esercitate sul tono posturale dalle porzioni rostro-mediale e rostro-laterale del nucleo del tetto* (*).
Nota di CESIRA BATINI e OTTAVIO POMPEIANO, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

La distruzione unilaterale del nucleo del tetto, totale [Chambers e Sprague⁽¹⁾, Sprague e Chambers⁽²⁾, Moruzzi e Pompeiano⁽³⁾, Stella, Zatti e Sperti⁽⁴⁾] o limitata alla sua parte rostrale [Moruzzi e Pompeiano⁽³⁾, Stella, Zatti e Sperti⁽⁴⁾], produce la scomparsa della rigidità da decerebrazione negli arti dello stesso lato, che risultano atonici. Se la distruzione interessa invece la parte caudale del nucleo del tetto d'un lato, si manifesta un'asimmetria posturale caratterizzata dalla scomparsa della rigidità estensoria negli arti del lato opposto [Moruzzi e Pompeiano⁽⁴⁾]. Le due sindromi sono state chiamate rispettivamente « atonia fastigiale diretta » e « atonia fastigiale crociata ».

Paragonando i risultati di queste ricerche fisiologiche coi dati anatomici, si può rilevare che l'atonia fastigiale crociata è la conseguenza dell'interruzione di impulsi che decorrono lungo il fascio uncinato di Russell, le cui fibre nascono soprattutto nella parte caudale del nucleo del tetto [Jansen e Jansen⁽⁵⁾, Batini e Pompeiano⁽⁶⁾]. L'atonia fastigiale diretta, che si manifesta invece dopo lesione rostrale del nucleo del tetto di un lato, è fenomeno anatomicamente assai complesso. Seguendo infatti il decorso del fascio uncinato in preparati ottenuti col metodo di Marchi [Rasmussen⁽⁷⁾] risulta che una simile distruzione interessa: *a*) parte delle fibre del fascio di Russell dello stesso lato, prima dell'incrociamiento; *b*) quasi tutte le fibre del fascio di Russell del lato opposto, dopo la decussazione; *c*) i neuroni fastigio-bulbari diretti, che sono localizzati principalmente nella parte rostrale del *nucleus fastigii* [Jansen e Jansen⁽⁵⁾].

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Bologna e Pisa.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) W. W. CHAMBERS a. J. M. SPRAGUE, « Science », CXIV, 324 (1951); « J. comp. Neurol. », CIII, 105 (1955).

(2) J. M. SPRAGUE a. W. W. CHAMBERS, « J. Neurophysiol. », XVI, 451 (1953).

(3) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXI, 801 (1955); « Rend. Acc. naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8^a, XVIII, 420 (1955); « J. comp. Neurol. », CVI, 371 (1956).

(4) G. STELLA, P. ZATTI a. L. SPERTI, « Amer. J. Physiol. », CLXXXI, 230 (1955).

(5) J. JANSEN a. J. JANSEN JR., « J. comp. Neurol. », CII, 607 (1955).

(6) C. BATINI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXI, 805 (1955); « Rend. Acc. naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8^a, XX, 504 (1956); « Arch. it. Biol. », XCV, 147 (1957).

(7) A. T. RASMUSSEN, « J. Comp. Neurol. », LVII, 165 (1933).

A fine di analizzare la funzione del sistema fastigio-bulbare diretto abbiamo deciso di condurre i nostri esperimenti su Gatti, complessivamente in numero di 26, i quali venivano decerebrati 2-16 giorni dopo distruzione elettrolitica simmetrica, mediante apparecchio stereotassico, della metà o dei $\frac{2}{3}$ caudali dei due nuclei del tetto. Questi animali presentavano una rigidità estensoria simmetrica dei quattro arti. L'integrità delle porzioni rostrati dei nuclei del tetto era dimostrata sul fondamento tanto dei controlli istologici eseguiti al termine di ogni esperimento, quanto dei risultati funzionali ottenuti stimolando elettricamente le aree corticocerebellari che si proiettano sulle porzioni anzidette dei nuclei medesimi [Jansen e Brodal⁽⁸⁾, Moruzzi e Pompeiano⁽⁹⁾]. In queste condizioni la stimolazione liminale (impulsi rettangolari a 300/sec, 1 msec, di 0,4-1,2 V) della corteccia vermiana del *lobus anterior* di entrambi i lati, in corrispondenza dei lobuli III, IV e V di Larsell⁽¹⁰⁾, e del *lobulus simplex* in corrispondenza dei *folia VI a* e *VI b* produceva, come di norma, inibizione della rigidità estensoria.

In preparati che presentavano questi requisiti venivano studiati gli effetti che sulla rigidità estensoria e sull'eccitabilità della corteccia vermiana producono le lesioni elettrolitiche acute parziali o totali, unilaterali o bilaterali, localizzate alla parte rostrale del nucleo del tetto. Al termine di ogni esperimento la localizzazione anatomica delle lesioni fastigiali, croniche ed acute, veniva controllata in sezioni istologiche seriate, colorate alternativamente coi metodi di Nissl e di Weil.

1) La distruzione totale della metà o del terzo rostrale del nucleo del tetto di un lato produceva la scomparsa della rigidità da decerebrazione negli arti dello stesso lato, e un lieve aumento dell'ipertono estensore negli arti contralaterali. La stimolazione liminale dell'emiverme corrispondente alla lesione rostro-fastigiale non determinava alcuna risposta posturale, mentre rimaneva immutato l'effetto inibitore ottenuto stimolando l'emiverme del lato opposto.

2) Se la distruzione unilaterale era limitata alla parte rostro-mediale del nucleo del tetto, si osservava un'asimmetria posturale in tutto simile a quella più sopra descritta. Per altro, in questi animali la stimolazione dell'emiverme sovrastante la lesione fastigiale rostrale produceva ancora inibizione del residuo tono estensore degli arti ipsilaterali.

3) Se la distruzione era invece localizzata alla parte rostro-laterale del nucleo del tetto di un lato, l'asimmetria posturale era esattamente l'opposto di quella descritta in 1) e 2): essa era contraddistinta da un'accentuazione dell'ipertono estensore negli arti ipsilaterali alla lesione e dalla scomparsa della rigidità da decerebrazione negli arti contralaterali. In questi preparati la stimolazione della corteccia vermiana del *lobus anterior* corrispondente produceva effetti aumentatori sul tono postulare degli arti ipsi-

(8) J. JANSEN e A. A. BRODAL, « J. comp. Neurol. », LXXIII, 267 (1940); « Norske Vid.-Akad. », Oslo, Avh. I. Mat.-Naturv. Kl., III, 1 (1942).

(9) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXX, 493 (1954).

(10) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », IC, 135 (1953).

lateralì, per le stesse intensità di stimolazione (0,6–1,2 V) che, applicate sull'altro emiverme, producevano effetti inibitori sui muscoli estensori corrispondenti. Questi risultati sono in accordo con osservazioni precedenti compiute da Moruzzi e Pompeiano ⁽⁹⁾.

4) Le asimmetrie posturali prodotte dalla distruzione unilaterale della parte rostro-mediale o rostro-laterale del nucleo del tetto non erano di natura irritativa, poiché: *a*) rimanevano immutate per tutta la durata dell'esperimento; *b*) la stimolazione preliminare stereotassica (300/sec; 1 msec; 0,15–0,30 V) delle parti rostro-mediale o rostro-laterale del nucleo del tetto provocavano effetti speculari a quelli prodotti dalla loro successiva distruzione elettrolitica; *c*) l'atonìa estensoria degli arti di un lato scompariva, manifestandosi invece un ipertono simmetrico dei muscoli estensori dei quattro arti, dopo distruzione delle strutture omologhe del nucleo del tetto contralaterale.

5) Negli animali con asimmetrie posturali prodotte da distruzioni rostro-fastigiali parcellari, la deafferentazione totale (da C₅ a T₂) o l'infiltrazione novocainica (1 ml di una soluzione all'1 %) dei muscoli estensori dell'arto anteriore ipertonico producevano atonia dell'arto medesimo e ricomparsa della rigidità estensoria nell'arto omologo contralaterale. Questi dati sono in accordo con osservazioni precedenti eseguite da Moruzzi e Pompeiano ⁽¹¹⁾.

Le presenti ricerche dimostrano che la parte rostrale del nucleo del tetto, da cui origina principalmente il sistema fastigio-bulbare diretto, esercita un'azione continua sul tono posturale, resa complessa dalla presenza di neuroni a funzione antagonista. In particolare la distruzione della parte rostro-mediale del nucleo del tetto produce atonia degli arti ipsilaterali, probabilmente per l'interruzione di un sistema fastigio-bulbare diretto, dotato da azione facilitante sul tono dei muscoli estensori. L'asimmetria prodotta da lesione fastigiale rostro-laterale è invece perfettamente opposta; essa è omologabile cioè a quella consecutiva all'ablazione unilaterale della corteccia vermiana del *lobus anterior* [Sprague e Chambers ⁽²⁾]. Tale asimmetria è verosimilmente la conseguenza dell'inattivazione di un sistema inibitore cortico-fastigio-bulbare diretto: aumenta in tal caso la rigidità da decerebrazione negli arti ipsilaterali alla lesione fastigiale e questo effetto s'accompagna alla scomparsa della rigidità estensoria negli arti contralaterali. Questa atonia, a differenza dell'« atonia fastigiale crociata » prodotta da lesione della parte caudale del nucleo del tetto [Moruzzi e Pompeiano ⁽³⁾], non sembra doversi attribuire essenzialmente ad interruzione di un sistema fastigio-bulbare crociato avente azione aumentatrice: nei nostri preparati, entrambe le metà caudali dei nuclei del tetto erano state infatti distrutte cronicamente e pertanto la maggior parte del sistema fastigio-bulbare crociato doveva

(11) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXI, 803 (1955); « Rend. Acc. naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8^a, XIX, 326 (1955); « J. comp. Neurol. », CVII, 1 (1957).

essere interrotto. L'atonia crociata che consegue a lesione fastigiale rostro-laterale, è probabilmente la conseguenza di un'azione inibitrice riflessa proveniente dai propriocettori degli arti del lato opposto, resi esageratamente ipertonici dalla lesione fastigiale stessa. Influenze inibitrici riflesse tra arti omologhi sono verosimilmente presenti anche nell'animale normale [Stella ⁽¹²⁾, Cardin ⁽¹³⁾] e contribuiscono in ogni caso ad aggravare le asimmetrie posturali prodotte da asimmetriche lesioni fastigiali [Moruzzi e Pompeiano ^(11,14)].

La suddivisione della parte rostrale del nucleo del tetto in due porzioni diverse, mediale e laterale, già prospettata in esperimenti di stimolazione [Moruzzi e Pompeiano ⁽⁹⁾], è in accordo coi risultati di ricerche anatomiche eseguite da Snider ⁽¹⁵⁾: con tali ricerche si è data evidenza al fatto che nel Gatto adulto e nel Coniglio esistono due gruppi di neuroni fastigiali di dimensioni diverse, le grandi cellule multipolari essendo principalmente localizzate nella porzione rostro-mediale del nucleo del tetto. Sarebbe interessante localizzare i neuroni di Purkinje che inviano i loro cilindrassi rispettivamente alle parti rostro-mediale e rostro-laterale dei nuclei del tetto.

Fisiologia. — *Analisi delle risposte posturali alla stimolazione elettrica della parte intermedia del lobus anterior del cervelletto* (*).
Nota di OTTAVIO POMPEIANO, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Ricerche eseguite su animali decerebrati [Stella ⁽¹⁾, Hampson, Harrison e Woolsey ⁽²⁾, Moruzzi ⁽³⁾, Sprague e Chambers ⁽⁴⁾] hanno dimostrato che la stimolazione della corteccia cerebellare corrispondente alla *pars intermedia* del *lobus anterior* aumenta l'ipertono estensorio degli arti ipsilaterali. D'altra parte è noto che la stimolazione della corteccia vermiana del *lobus anterior* determina comunemente una inibizione della rigidità da decerebrazione. Poiché la stimolazione appena sopraliminale di una regione limitata della corteccia cerebellare determina attivazione, mediante meccanismi sinaptici, di regioni corticocerebellari contigue [Pompeiano ⁽⁵⁾], è verosimile

(12) G. STELLA, «Atti Soc. med. chir., Padova», XXIII, 5 (1944).

(13) A. CARDIN, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXII, 81, 607 e 609 (1946).

(14) G. MORUZZI e O. POMPEIANO, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXXI, 1238 (1955); «Rend. Acc. naz. Lincei», Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8^a, XIX, 471 (1955).

(15) R. S. SNIDER, «J. Comp. Neurol.», LXXII, 399 (1940).

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, negli Istituti di Fisiologia umana delle Università di Bologna e Pisa.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) G. STELLA, «Atti Soc. med.-chir., Padova», XXIII, 22 (1944).

(2) J. L. HAMPSON, C. R. HARRISON a. C. N. WOOLSEY, «Feder. Proc.», IV, 31 (1945); «Feder. Proc.», V, 41 (1946); «Res. Publ. Ass. nerv. ment. Dis.», XXX, 299 (1952).

(3) G. MORUZZI, «Rass. Biol. um.», II, 100 (1947).

(4) J. M. SPRAGUE a. W. W. CHAMBERS, «Amer. J. Physiol.», CLXXVI, 52 (1954).

(5) O. POMPEIANO, «Boll. Soc. it. Biol. sper.», XXXI, 808 (1955).

che nel comune preparato decerebrato la risposta sia assai spesso la risultante di un'attivazione di meccanismi cerebellari diversi. A fine di ottenere risposte pure, abbiamo studiato gli effetti della stimolazione della corteccia della *pars intermedia* del *lobus anterior* in animali sottoposti a distruzione cronica, bilaterale e totale, dei nuclei del tetto: venivano così eliminate le risposte posturali prodotte dall'eventuale attivazione della corteccia vermiciana contigua del *lobus anterior* e dei corrispondenti sistemi fastigio-bulbari.

Gli esperimenti sono stati condotti complessivamente su 104 gatti, di cui 40 furono utilizzati anche per esperimenti eseguiti con altro scopo. Le lesioni elettrolitiche fastigiali venivano prodotte mediante elettrodi concentrici orientati con l'apparecchio stereotassico di Horsley-Clarke. L'intervento era eseguito in narcosi da Nembutal (30-35 mg/kg) e in asepsi. Dopo un tempo variabile da 1 a 48 giorni, gli animali venivano sottoposti a decerebrazione precollicolare, eseguita in anestesia eterica. La stimolazione elettrica della corteccia cerebellare era effettuata con eccitatori bipolari d'argento, la distanza interelettrodica essendo di circa 3 mm. Gli elettrodi erano posti, secondo un piano sagittale, sulle aree vermiane ed emisferiche del *culmen* [lobuli IV, V e H IV, H V di Larsell ⁽⁶⁾] e del *lobulus centralis* (lobuli III e H III). Per la stimolazione venivano usati impulsi rettangolari a 300/sec, della durata di 1 msec. Erano poi studiate le modificazioni presentate dalle risposte corticocerebellari dopo lesioni stereotassiche di punti ben definiti dell'interno del cervelletto o sezioni, a differente livello, del tronco dell'encefalo. La localizzazione e l'estensione delle lesioni elettrolitiche, croniche e acute, erano controllate in ogni caso su sezioni istologiche seriate, colorate alternativamente coi metodi di Nissl e di Weil.

1) La stimolazione bipolare liminale (0,6-1 V) della zona longitudinale più interna, paravermiana, della corteccia intermedia del *lobus anterior*, corrispondente al terzo o alla metà mediale dei lobuli H III, H IV e H V, produceva inibizione dell'ipertono estensore, con flessione attiva degli arti ipsilaterali, ed inoltre aumento della rigidità da decerebrazione negli arti contralaterali (risposta A). La stimolazione, con stimoli del medesimo voltaggio, della rimanente corteccia intermedia del *lobus anterior*, corrispondente alla metà o ai due terzi laterali dei lobuli H III, H IV e H V, produceva invece aumento della rigidità estensoria degli arti ipsilaterali, che si accompagnava a risposte aumentatrici dell'arto anteriore o di entrambi gli arti contralaterali (risposta B). Un quadro posturale simile si otteneva occasionalmente, stimolando la rappresentazione rostro-laterale del *lobulus simplex* (lobulo H VI), compresa tra la continuazione laterale della *fissura prima* e la lamella più mediale del *crus I*. Queste risposte erano seguite, al cessare dello stimolo, dal ritorno della rigidità da decerebrazione al grado di partenza; solo per stimoli sopraliminali, le risposte aumentatrici erano seguite da rimbalzo flessorio. La stimolazione di entrambi gli emisferi del

(6) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », IC, 135 (1953).

lobus anterior, in particolare dei lobuli III, IV e V in tutta la loro estensione fino alle venule, non produceva alcuna risposta posturale anche con stimoli di V 4-6, cioè 4-10 volte quello soglia. Questo controllo veniva fatto in ogni esperimento e rappresentava la prova fisiologica della distruzione totale della parte rostrale del nucleo del tetto [Moruzzi e Pompeiano⁽⁷⁾]. Nessuna risposta si otteneva stimolando il *crus I*.

2) Entrambe le risposte A e B, ottenute stimolando rispettivamente la parte mediale e quella laterale dei lobuli H III, H IV e H V, nascevano nella corteccia stimolata, perché: *a*) la soglia di stimolazione usata era molto bassa; *b*) bastava spostare gli elettrodi medialmente alla vena paravermiana, in modo da stimolare l'estremità laterale dei lobuli III, IV e V, o lateralmente al *lobulus simplex* (lobulo H VI) in modo da stimolare il *folium* più mediale del *crus I*, per non osservare più alcuna risposta sul tono posturale; *c*) l'applicazione per 5 min di una soluzione di novocaina all'1% sulla corteccia intermedia del *lobus anterior* ne elevava di 2 o 3 volte la soglia.

3) Le risposte A e B rimanevano immutate dopo i seguenti interventi: *a*) distruzione elettrolitica della metà o dei due terzi caudali del nucleo interposito corrispondente; *b*) distruzione elettrolitica totale del nucleo dentato dello stesso lato; *c*) ablazione unilaterale o bilaterale dei lobuli paramediani; *d*) ablazione della *pyramis* e dell'*uvula*; *e*) ablazione unilaterale o bilaterale del *crus I*.

Per contro le suddette risposte venivano abolite dalla distruzione elettrolitica totale della metà o del terzo rostrale del nucleo interposito o della sostanza bianca immediatamente situata al di sopra e rostralmente ad essa.

Risulta pertanto che i due tipi di risposta che si ottengono stimolando la corteccia intermedia del *lobus anterior*, sono dovuti ad impulsi trasmessi da neuroni localizzati nel terzo rostrale del nucleo interposito o da fibre corticofughe che attraversano questa formazione.

4) La risposta A scompariva dopo una distruzione elettrolitica limitata alla parte rostro-mediale del nucleo interposito o alla sostanza bianca immediatamente sovrastante. In questi casi la metà o il terzo mediale della corteccia intermedia del *lobus anterior* risultava inecceitabile per stimoli soglia. Solo per stimoli sopralimniali la stimolazione di tale area corticale produceva effetti dello stesso segno, ma assai meno intensi, rispetto a quelli ottenuti stimolando la parte laterale della corteccia intermedia del *lobus anterior*. Per contro la risposta B veniva abolita dalla distruzione elettiva della parte rostro-laterale del nucleo interposito o della sostanza bianca immediatamente situata al di sopra e rostralmente ad essa. In questi casi la metà o i due terzi laterali dei lobuli H III, H IV e H V risultavano inecceitabili, mentre rimaneva immutata la risposta A.

5) L'abolizione delle risposte A e B, dopo distruzione elettiva rispettivamente delle parti rostro-mediale e rostro-laterale del nucleo interposito,

(7) G. MORUZZI a. O. POMPEIANO, «Arch. it. Biol.», XCV, 31 (1957).

non era un effetto del trauma chirurgico, perché: *a*) la stimolazione preliminare stereotassica della parte rostro-mediale del nucleo interposito (300/sec, 1 msec, 0,15-0,25 V) produceva flessione attiva degli arti ipsilaterali ed aumento dell'ipertono estensore degli arti contralaterali, mentre la stimolazione della parte rostro-laterale del nucleo medesimo produceva un marcato aumento del tono estensore degli arti ipsilaterali e inoltre del solo arto anteriore o di entrambi gli arti del lato opposto; *b*) era possibile seguire l'abolizione delle risposte corticali, dopo lesioni parziali della parte rostrale del nucleo interposito, per tutta la durata dell'esperimento (fino a 16 h dalla lesione); *c*) la risposta A o la risposta B o entrambe le risposte mancavano nei casi in cui la lesione delle parti corrispondenti del terzo rostrale del nucleo interposito veniva eseguita cronicamente 9-48 giorni prima della decerebrazione.

6) La risposta A era elettivamente abolita dai seguenti interventi: *a*) decerebrazione postcollicolare; *b*) sezione mediana sagittale del mesencefalo; *c*) distruzione elettrolitica totale o della metà caudale del nucleo rosso contralaterale.

Queste lesioni lasciavano per altro imm modificata la risposta B, quando si stimolava la parte laterale dei lobuli H III, H IV e H V.

7) Gli effetti descritti nel paragrafo precedente, e in particolare l'abolizione delle risposte flessorie dopo distruzione del nucleo rosso contralaterale, non erano dipendenti dal trauma chirurgico, perché: *a*) la stimolazione preliminare stereotassica del nucleo rosso di un lato (300/sec, 1 msec, 0,15-0,30 V) produceva una flessione attiva degli arti contralaterali ed una estensione degli arti ipsilaterali [Pompeiano⁽⁸⁾], riproducendo in tal modo il quadro posturale che si otteneva stimolando la parte mediale dei lobuli H III, H IV e H V del lato opposto; *b*) l'abolizione della risposta A dopo distruzione elettrolitica acuta del nucleo rosso contralaterale veniva seguita per tutta la durata dell'esperimento (fino a 4 ore dalla lesione); *c*) la distruzione elettrolitica di regioni dorsali, laterali, ventrali o rostrali al nucleo rosso in esame, non produceva alcuna modificazione delle risposte corticocerebellari; infine *d*) dopo distruzione cronica (8-12 giorni) del nucleo rosso di un lato, non si aveva alcuna risposta stimolando la parte mediale dei lobuli H III, H IV e H V del lato opposto.

Dalle presenti ricerche pertanto risulta che la corteccia intermedia del *lobus anterior* può essere divisa in due zone longitudinali anatomicamente e funzionalmente diverse: 1) una parte mediale, che stimolata produce principalmente contrazione della muscolatura flessoria degli arti ipsilaterali; 2) una parte laterale, che esercita invece un effetto di facilitazione sul tono della muscolatura estensoria degli arti ipsilaterali. L'osservazione secondo cui queste risposte corticocerebellari vengono interamente abolite dalla distruzione totale della parte rostrale del nucleo interposito, è in accordo coi dati

(8) O. POMPEIANO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., ser. 8^a, XXII, 100 (1957).

anatomici di Jansen e Brodal⁽⁹⁾, i quali hanno dimostrato che le fibre cortico-nucleari originate dalla parte intermedia del *lobus anterior* raggiungono il nucleo interposito.

La dimostrazione che le risposte flessorie, ottenute stimolando la rappresentazione mediale della corteccia intermedia del *lobus anterior*, vengono abolite elettivamente dalla distruzione della parte rostro-mediale del nucleo interposito, mentre l'area estensoria (più laterale) risulta ineccitabile in seguito alla distruzione della parte rostro-laterale del nucleo medesimo, suggerisce ricerche anatomiche intese a indagare il problema delle proiezioni delle fibre cortico-nucleari, originanti dalla parte intermedia del *lobus anterior*, sulle parti mediale e laterale del nucleo interposito sottostante. Risulta a ogni modo stabilito che le vie corticifughe a cui sono dovute le risposte A e B, pur avendo un decorso parallelo, sono diverse. È verosimile che gli effetti siano mediati da neuroni situati rispettivamente nelle parti mediale e laterale del nucleo interposito.

È certo che le vie divergono nettamente al di sotto del nucleo interposito. In particolare le risposte flessorie, che si ottengono stimolando la parte mediale dei lobuli H III, H IV e H V, sono trasmesse dal nucleo rosso contralaterale ed è verosimile quindi supporre che tali risposte vengano mediate dal sistema cerebello-rubro-spinale. Per contro gli effetti aumentatori che si ottengono stimolando l'area laterale dei lobuli H III, H IV e H V non sono trasmessi da centri mesencefalici, poiché si osservano ancora dopo decerebrazione retrocollicolare. Risposte flessorie attive erano state ottenute da vari Autori [Bernis e Spiegel⁽¹⁰⁾, Denny-Brown, Eccles e Liddell⁽¹¹⁾, Hampson, Harrison e Woolsey⁽²⁾] in seguito a stimolazione della corteccia cerebellare del *lobus anterior*, ma simili effetti non erano stati differenziati dall'inibizione della rigidità estensoria che si ottenne stimolando la parte vermiana del *lobus anterior*. Ora le vie seguite da questi due tipi di risposte sono completamente differenti, la risposta vermiana essendo mediata da vie fastigio-bulbari dirette, mentre l'effetto flessorio prodotto dalla stimolazione della corteccia intermedia del *lobus anterior* è probabilmente riferibile a meccanismi interposito-rubro-spinali. Anche le risposte estensorie della corteccia intermedia del *lobus anterior* descritte da precedenti Autori [Stella⁽¹⁾, Hampson, Harrison e Woolsey⁽²⁾, Moruzzi⁽³⁾, Sprague e Chambers⁽⁴⁾], e ottenute nei nostri preparati stimolando la metà o i due terzi laterali dei lobuli H III, H IV e H V, seguono vie efferenti del tutto diverse da quelle della metà o del terzo mediale dei suddetti lobuli.

(9) J. JANSEN a. A. BRODAL, « J. comp. Neurol. », LXXIII, 267 (1940).

(10) W. J. BERNIS u. E. H. SPIEGEL, « Arb. neurol. Inst. Univ. Wien », XXVII, 197 (1925).

(11) D. DENNY-BROWN, J. C. ECCLES a. E.G.T. LIDDELL, « Proc. roy. Soc. », London (B), CIV, 518 (1929).

Fisiologia. — *Osservazioni morfologiche ed elettrografiche sul cervelletto di Lucertola* (*). Nota di PAOLO CREPAX e PIER LUIGI PARMEGGIANI, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Le ricerche concernenti i fenomeni elettrici del sistema nervoso centrale dei Rettili sono assai scarse. Ricordiamo le osservazioni di Bremer, Dow e Moruzzi⁽¹⁾ intorno all'attività elettrica degli emisferi cerebrali della Testuggine e le indagini di Winkel e Caspers⁽²⁾, i quali hanno studiato in *Lacerta agilis* l'influenza della stimolazione dei diversi nuclei talamici sull'attività elettrica derivabile dalla superficie degli emisferi cerebrali. Non ci risulta che siano stati indagati fenomeni elettrici cerebellari in animali appartenenti a tale classe di Vertebrati: Jacobs e Snider⁽³⁾, in una breve nota pubblicata nel 1949 e concernente i rapporti tra attività elettrica e istogenesi del cervelletto nella Cavia e nel Ratto, annunciavano un più completo studio dell'argomento, fondato su ricerche estese a specie appartenenti ad altre classi di Vertebrati, compresi i Rettili; ma i risultati di tali indagini non c'è riuscito di conoscere, nel corso delle nostre ricerche bibliografiche.

Il cervelletto dei Rettili è stato invece molto studiato sotto l'aspetto morfologico [cfr. Ariëns Kappers, Huber e Crosby⁽⁴⁾], anche per il fatto che esso offre tra l'altro la possibilità d'indagare, in una medesima classe di Vertebrati, le correlazioni esistenti tra lo sviluppo dei diversi lobi e lobuli cerebellari e quello degli arti, i quali mancano negli Ofidi e assumono invece funzioni ambulatorie notevolmente complesse nei Sauri [Larsell⁽⁵⁾].

Negli esperimenti di cui riferiamo nella presente Nota, abbiamo preso in esame l'attività elettrica spontanea del cervelletto di *L. viridis*. Nell'esporre i risultati non ometteremo tuttavia un breve cenno intorno alle particolarità macro- e microscopiche del cervelletto di tale specie, la quale non è tra quelle prese in esame nei più noti lavori dedicati allo studio morfologico del cervelletto dei Rettili. I nostri rilievi si sono naturalmente limitati a quelle particolarità che attengono alla interpretazione delle osservazioni elettrografiche da noi fatte.

L'intervento preparatorio consisteva nell'apertura di una breccia nelle parti ossee che ricoprono il cervelletto e veniva eseguito in narcosi eterica. Terminato l'intervento, occorre lasciar trascorrere 1-2 h, affinché cessino gli

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) F. BREMER, R. S. DOW a. G. MORUZZI, « J. Neurophysiol. », II, 473 (1939).

(2) K. WINKEL u. H. CASPERS, « Pflüger's Arch. », CCLVIII, 22 (1953).

(3) J. JACOBS a. R. S. SNIDER, « Feder. Proc. », VIII, 80 (1949).

(4) C. V. ARIËNS KAPPERS, G. C. HUBER a. E. C. CROSBY, *The comparative anatomy of the nervous system of Vertebrates, including Man*. New York, MacMillan (1936).

(5) O. LARSELL, « J. comp. Neurol. », XLI, 59 (1926).

effetti del narcotico: contemporaneamente l'attività elettrica cerebellare aumenta di frequenza e di ampiezza.

La derivazione dei potenziali elettrici, fuorché in casi particolari, è stata effettuata col metodo monopolare, tale procedimento ovviando agli inconvenienti che derivano dall'accumulo di sangue e *liquor* al di sopra delle strutture in esame. Un filo di argento o di platino, di calibro variabile tra 10 e 80 μ , è stato impiegato come elettrodo attivo; se ne effettuava il collegamento col preamplificatore mediante un ripetitore catodico Grass, quando la resistenza del conduttore usato per la derivazione lo richiedeva. L'elettrodo indifferente era costituito da un filo di argento clorurato del diametro di 0,5 mm: la sua estremità, rigonfiata in una masserella sferica del diametro di 1 mm, veniva appoggiata sulla superficie cauterizzata dei muscoli della nuca. Due fili di argento del diametro di 50 μ , le cui estremità erano fissate alla distanza di 1 mm ca., servivano per la derivazione dipolare. Gli elettrodi erano montati su portaelettrodi, spostabili nelle diverse direzioni mediante scorrimento su cremagliere.

I potenziali elettrici venivano amplificati per mezzo di preamplificatori Grass P4 e rivelati mediante un oscillografo catodico a due raggi (Du Mont tipo 322 A): per la loro registrazione ci siamo serviti di un fotochimografo Grass (mod. C-4C) ovvero Du Mont (tipo 321).

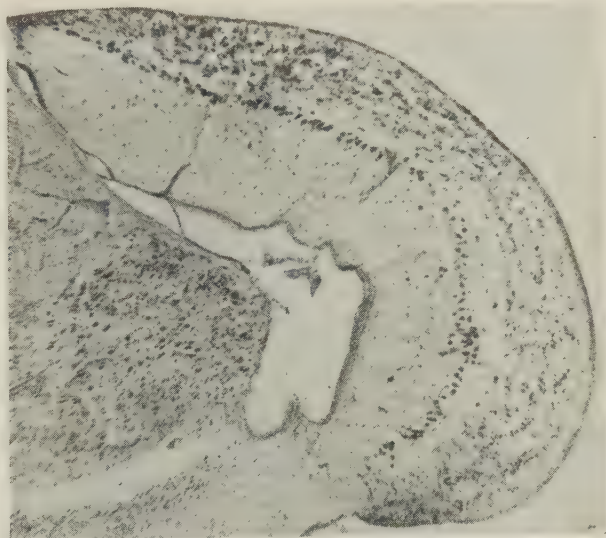
Gli esami istologici sono stati eseguiti su pezzi fissati in una soluzione di formalina al 10% e inclusi in paraffina; le sezioni venivano colorate col metodo di Nissl o quello di Weil.

Il cervelletto di *L. viridis* è costituito da una sottile lamina concavo-convessa, che prende origine dalla superficie dorsale del midollo allungato e si dirige dapprima in senso oro-aborale e poi in senso inverso, così da venire a sormontare il polo aborale dei lobi ottici. La superficie libera della sua faccia dorsale, che utilizzavamo per la derivazione dei potenziali bioelettrici, ha una forma pressoché rettangolare: il suo lato maggiore, trasversale, misura mm 2 ca. e quello minore mm 1.

L'esame istologico (fig. 1) dimostra che lo strato granuloso costituisce la superficie dorsale dell'organo: esso ha uno spessore medio di 190 μ ⁽⁶⁾ e la disposizione dei rispettivi elementi cellulari è contraddistinta, rispetto a quanto si osserva nella corteccia cerebellare di Mammifero, dal fatto che i granuli non sono fittamente addossati gli uni agli altri, ma separati da strati di fibre abbastanza spessi. Al di sotto dei granuli si trova uno strato costituito dai corpi delle cellule di Purkinje, i quali sono allineati abbastanza regolarmente in prossimità del margine libero della lamina, mentre si presentano fittamente addensati gli uni agli altri e con disposizione alquanto irregolare nelle parti profonde. Segue lo strato molecolare, che ha uno spessore di 240 μ .

(6) I valori di spessore indicati per i diversi strati del cervelletto, sono quelli determinati nei preparati istologici. Si tenga conto del fatto che la fissazione e la successiva disidratazione dei tessuti provocano una coartazione dei medesimi.

Fig. 1. — Sezione sagittale mediana del cervelletto di *L. viridis*. Colorazione col metodo di Nissl; ingr. 60 \times .



Le fibre mieliniche, nei preparati allestiti col metodo di Weil, appaiono raccolte in fasci di un certo spessore solo nello strato dei granuli, ove predominano: i fasci stessi si fanno via via più sottili verso il margine orale. Dette fibre sono, in ogni caso, scarse in tutta la porzione libera della lamina cerebellare.

La conformazione esterna e la minuta struttura del cervelletto di *L. viridis* sono quindi simili in tutto a quelle riscontrate da Larsell⁽⁵⁾ nel genere *Sceloporus* (*S. biseriatus* e *S. graciosus*).

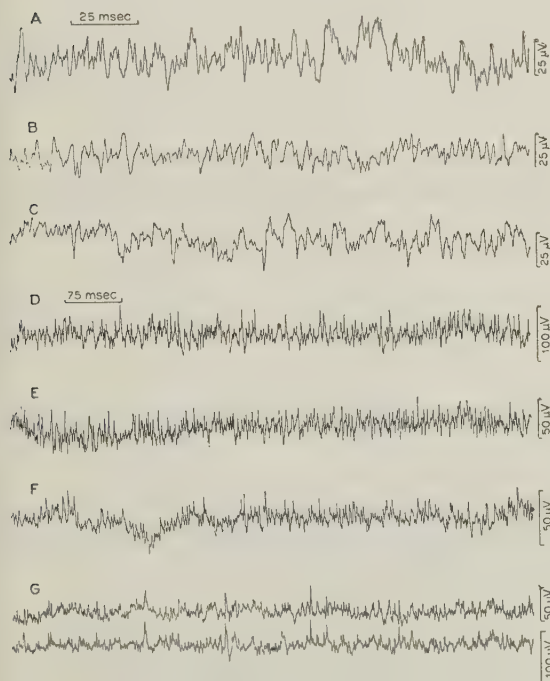


Fig. 2. — Attività elettrica spontanea del cervelletto di Lucertola derivata dalla superficie dorsale mediante elettrodi di diverse caratteristiche.

I tracciati sono stati ottenuti in animali diversi. La derivazione era monopolare negli esperimenti a cui si riferiscono i tracciati A-F, essendo l'elettrodo critico costituito da un filo di argento del diametro rispettivamente di 70 μ (A), di 60 μ (B), di 50 μ (C), di 80 μ (D, E); ovvero da un filo di platino del diametro di 10 μ (F). La derivazione era contemporaneamente monopolare (elettrogramma superiore) e dipolare (elettrogramma inferiore), nella registrazione riprodotta in G; gli elettrodi erano costituiti da fili di argento del diametro di 50 μ . La velocità indicata in A vale anche per B e C; quella indicata in D, anche per E, F e G.

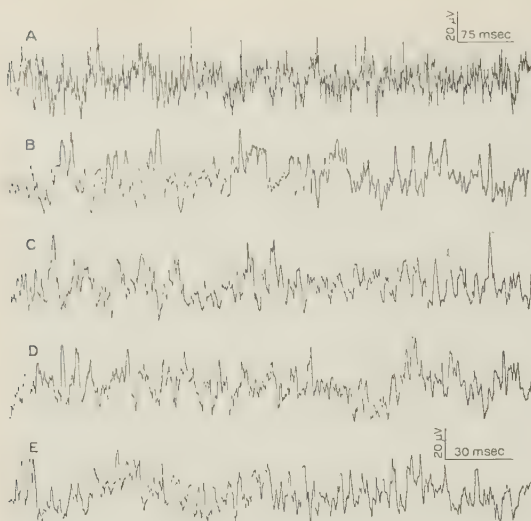


Fig. 3. - Attività elettrica spontanea del cervelletto derivata dalla superficie dorsale dell'organo e caratterizzata dalla presenza di oscillazioni particolarmente rapide (*spikes*).

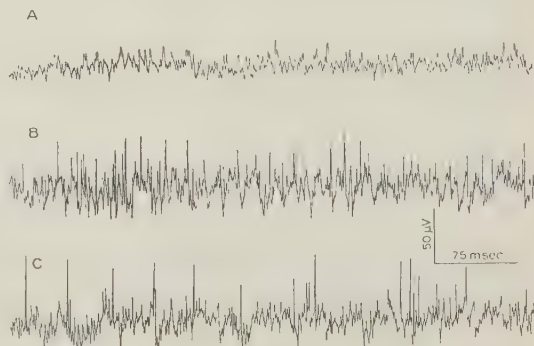
L'elettrogramma A è stato registrato a velocità uguale a quella dei tracciati riprodotti nella fig. 2; la velocità era notevolmente maggiore nel caso delle registrazioni B, C, D, E, per le quali vale la calibrazione indicata in E.

L'attività derivabile dalla superficie dorsale del cervelletto è costituita da oscillazioni di potenziale della frequenza di 300-420 Hz e dell'ampiezza di 30-50 μ V (fig. 2). Mentre il procedimento di derivazione (mono- ovvero dipolare) e le caratteristiche degli elettrodi non modificano l'aspetto dell'elettrogramma cerebellare (fig. 2), i valori dell'ampiezza delle pulsazioni elettriche sono dappprincipio più bassi, se il tempo intercorso tra l'intervento preparatorio e il momento della registrazione è breve, e poi aumentano costantemente.

Quando l'ampiezza delle oscillazioni elettriche è prossima ai valori massimali, nel tracciato compaiono oscillazioni di potenziale negative assai rapide, di una durata dell'ordine di 1 msec (fig. 3), di ampiezza spesso notevolmente maggiore di quella delle pulsazioni componenti il tracciato di fondo (300 μ V) e di una frequenza variabile da caso a caso (da 10 a 80 al sec), succedentisi con ritmo talora non uniforme. Nei casi in cui l'elettrogramma derivato dalla superficie dell'organo documenta un'attività spontanea costituita da onde di un'ampiezza pari ai valori massimi indicati e non presenta le oscillazioni rapide (che denomineremo *spikes*), queste spesso compaiono con l'approfondamento dell'elettrodo nel tessuto (fig. 4).

Fig. 4. - Attività elettrica spontanea del cervelletto derivata dalla superficie dell'organo (A) ovvero dopo approfondamento dell'elettrodo (300 μ ca.: B, C).

La derivazione monopolare era effettuata in questo esperimento con elettrodo costituito da un filo di platino del diametro di 20 μ inguainato fino alla punta da un sottile strato di vetro. La calibrazione indicata in C vale anche per gli altri elettrogrammi.



L'origine cerebellare dei potenziali elettrici derivabili dalla superficie dorsale del cervelletto è stata assodata, sia esaminando l'attività elettrica spontanea delle strutture nervose più vicine al cervelletto (emisferi cerebrali, lobi ottici e midollo allungato, in quest'ultimo caso essendo il cervelletto previamente asportato), sia indagando gli effetti dell'applicazione locale di cocaina e quelli di lesioni meccaniche del tessuto esplorato (schiacciamento). La forma e la frequenza delle pulsazioni elettriche registrabili dalle strutture contigue al cervelletto sono assai diverse da quelle che contraddistinguono l'attività elettrica derivabile dalla superficie dorsale della lamina cerebellare. Trattando la superficie stessa con una soluzione di cocaina al 5 %, si osserva entro brevissimo tempo (2-3 min) la scomparsa di ogni attività elettrica. Lo stesso effetto provoca lo schiacciamento dell'organo; e quando la lesione meccanica sia stata effettuata solo in una metà laterale della lamina, un'attività elettrica del tutto normale può derivarsi dalla superficie della metà illesa. Il trattamento locale del tessuto con una soluzione di cocaina al 0,1 % ovvero di Nembutal al 6 % palesa la particolare suscettività che gli *spikes* presentano all'azione depressiva di tali farmaci.

In sostanza, i fenomeni elettrici in cui si traduce l'attività automatica del cervelletto di Lucertola, sono in tutto simili a quelli registrati dal cervelletto dei Mammiferi. Dal quale, com'è noto, sono derivabili due forme di attività elettrica spontanea: un ritmo pulsatorio di elevata frequenza, costituito da onde difasiche (*waves*), registrato mediante derivazione macroelettrodica superficiale dai primi osservatori [Adrian⁽⁷⁾, Dow⁽⁸⁾] e riconosciuto come caratteristico del cervelletto; inoltre, oscillazioni di potenziale monofasiche rapide, a tipo di *spikes*, che si derivano per mezzo di microelettrodi approfondati nello strato delle cellule di Purkinje o in quello dei granuli e che sono attribuite all'attività dei singoli elementi⁽⁹⁾ di questi strati [Brookhart, Moruzzi e Snider⁽¹⁰⁾; cfr. anche Crepax, Nigro e Parmeggiani⁽¹¹⁾].

La spiegazione del fatto che nella Lucertola le oscillazioni rapide sono derivabili dalla superficie dorsale dell'organo, senza effettuare l'approfondimento dell'elettrodo, ci è data dall'anatomia microscopica: nel cervelletto di Lucertola la disposizione degli elementi cellulari è invertita rispetto a quella propria della corteccia del cervelletto di Mammifero, e cioè partendo dalla superficie dorsale della lamina cerebellare troviamo prima lo strato granuloso, poi le cellule di Purkinje e infine lo strato molecolare.

(7) E. D. ADRIAN, « J. Physiol. », LXXXIII, 32 P (1935).

(8) R. S. DOW, « J. Physiol. », XCIV, 67 (1938).

(9) All'attività di tali elementi sono pure riferibili le onde difasiche che costituiscono il tracciato macroelettrodico. Nonostante la comune origine, « the selective susceptibility of the spike-forming mechanism to cerebellar ischemia indicates that the waves and spikes originate as the result of operation of functionally different mechanism » [BROOKHART, MORUZZI e SNIDER, « J. Neurophysiol. », XIV, 181 (1951)].

(10) J. M. BROOKHART, G. MORUZZI a. R. S. SNIDER, « J. Neurophysiol. », XIII, 465 (1950).

(11) P. CREPAX, A. NIGRO e P. L. PARMEGGIANI, « Arch. Sci. biol. », XLI, 163 (1957).

Zoologia. — *Studio delle lipasi nello sviluppo di Artemia salina*, Leach (*). Nota di LORETA BELLINI e GIUSEPPE SCOLLO LAVIZZARI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In precedenti ricerche è stato studiato il comportamento della alanil-glicina-dipeptidasi, della caseina-proteinasi e della *beta*-amilasi nello sviluppo embrionale del Fillopode *Artemia salina* (Bellini, 1957), e i risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti da Urbani e Coll. (1955, 1956, 1957) sugli stessi enzimi nello sviluppo embrionale degli Anfibi anuri.

Allo scopo di estendere queste ricerche, completandole gradualmente con la analisi di altri sistemi enzimatici, abbiamo preso in esame le lipasi in modo da avere un quadro orientativo dell'atteggiamento dei fermenti che idrolizzano le tre grandi categorie di composti rappresentati nel vitello sia dei Vertebrati che degli Invertebrati e cioè: protidi, glucidi e lipidi.

È necessario rilevare che il termine di *lipasi* è piuttosto generico e in linea generale serve ad indicare quegli enzimi che sono capaci di attaccare la molecola di un grasso neutro risolvendone la glicerina e gli acidi grassi; in realtà si tratta di particolari esterasi (Sumner e Somers, 1953) e ad evitare confusioni ed equivoci intendiamo riferirci nel presente lavoro a quelle idrolasi che agiscono sulla tributirina con « optimum » di attività in ambiente alcalino.

Il materiale usato è costituito da germi incistati di *Artemia salina*, provenienti dalla California ed in vita latente da circa due anni: essi sono gli stessi adoperati nelle nostre precedenti ricerche ed appartengono al biotipo diploide anfimissico. Le cisti poste in acqua salata (30 gr. NaCl/litro) si idratano e schiudono in circa trenta-quaranta ore ma questo tempo è fortemente influenzato dalla temperatura ambiente ed inoltre si incontra una notevole variabilità individuale.

Le cisti messe in acqua, in parte galleggiano ed in parte si depositano sul fondo del recipiente, in queste ultime la percentuale di schiusura è molto elevata e si avvicina al 100 %: per questo motivo per i dosaggi su stadi di sviluppo anteriori alla fessurazione del guscio, quando cioè non si ha modo di vedere se gli embrioni sono vivi o morti, si sono sempre scelte le cisti depositate sul fondo del recipiente.

Lo studio della attività lipasica è stato fatto con il micrometodo titrimetrico di Glick (1949) seguendo due procedure un po' differenti che riteniamo utile descrivere.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia ed Anatomia Comparata della Università di Camerino, con il contributo del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

I^a procedura. - Trecento esemplari ai vari stadi di sviluppo sono stati isolati al microscopio binoculare e quindi omogenati accuratamente in un piccolo omogenizzatore di vetro con 200 μ l di acqua distillata. L'omogenato è stato centrifugato per tre minuti a 3.000 giri ed il supernatante usato per le determinazioni.

Il substrato, per ambedue le procedure, è stato preparato nella seguente maniera. Due gocce di tributirina sono sbattute energicamente in una provetta con 3 ml di tampone glicocollo-soda a pH 9 (Glicocollo 12 gr/400 ml H₂O distillata + 15 ml NaOH 0,1 N). L'emulsione così ottenuta viene lasciata riposare per 30 minuti in «frigorifero» dopodiché se ne prelevano 400 μ l (abbandonando sul fondo della provetta le goccioline più grosse di tributirina che si sono depositate) e si uniscono a 100/ μ l dell'estratto enzimatico. Dopo aver accuratamente mescolato si effettuano rapidamente vari prelievi di 78 μ l che vengono posti in microprovette, ad incubare in bagno termostatico a 39 °C per quarantacinque minuti. Dopo di che la reazione viene bloccata con l'aggiunta di 44,1 μ l di fenolo con indicatore (bleu di bromotimolo) e si titola con alcool cloridrico 0,06 N fino a viraggio del colore dal bleu al verde giallastro. La titolazione è eseguita con microsiringa «Agla» ed agitazione del liquido secondo la tecnica di Linderstrøm-Lang e Holter (1932). Le prove in bianco sono state fatte al *tempo zero* e l'attività enzimatica è espressa in μ l HCl 0,06 N di differenza tra queste ed i campioni che sono stati incubati. È importante per avere dei valori esatti e riproducibili mantenere una durata uniforme del tempo di titolazione.

II^a procedura. - Il substrato e tutti i reattivi sono gli stessi già descritti ed i dosaggi della attività lipasica sono stati effettuati nella seguente maniera. Trecento esemplari ai vari stadi di sviluppo, sono stati omogenati in 200 μ l di acqua distillata e 100 μ l dell'omogenato totale, senza centrifugazione, venivano uniti a 400 μ l di substrato-tampone e posti ad incubare per 45 minuti in bagno termostatico a 39 °C. Dopodiché a tre prelievi di 87 μ l venivano aggiunti 74 μ l di fenolo indicatore e la titolazione fatta nella maniera consueta. Anche in questo caso le prove in bianco sono state eseguite al *tempo zero*.

I risultati ottenuti con ambedue le procedure sono strettamente concordanti e si vede che i germi incistati allo stato secco mantengono conservate le lipasi che entrano immediatamente in azione non appena il materiale viene omogenato con acqua. Ciò dimostra anche per questi enzimi quanto è stato visto, sullo stesso materiale, da Urbani e Coll. (1953, 1954) per le dipeptidasi, proteinasi, amilasi, e fosfatasi.

Con l'idrazione dei germi e la ripresa dello sviluppo (che si era arrestato nelle condizioni di vita latente) si osserva che le lipasi, contrariamente a quanto accade per gli enzimi proteolitici (Bellini, 1957), mantengono un tenore costante ed un aumento di attività si rende evidente a partire dallo stadio nel quale il guscio si fessura e l'embrione fuoriesce. Il massimo di attività lipasica si riscontra allo stadio di nauplio che inizia

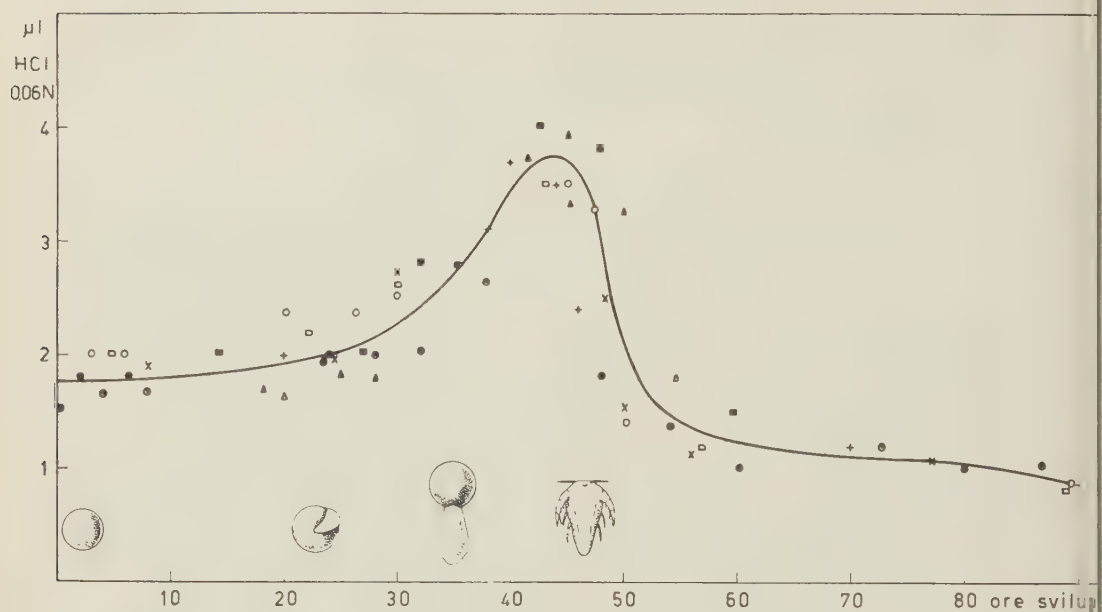


Fig. 1. - Comportamento delle lipasi nello sviluppo di *Artemia salina*.

Determinazioni eseguite con la I^a procedura. In ordinate la attività enzimatica espressa in μl HCl, 0,06 N; in ascisse le ore di sviluppo a 18 °C. Sono rappresentati schematicamente alcuni stadi morfologici più significativi.

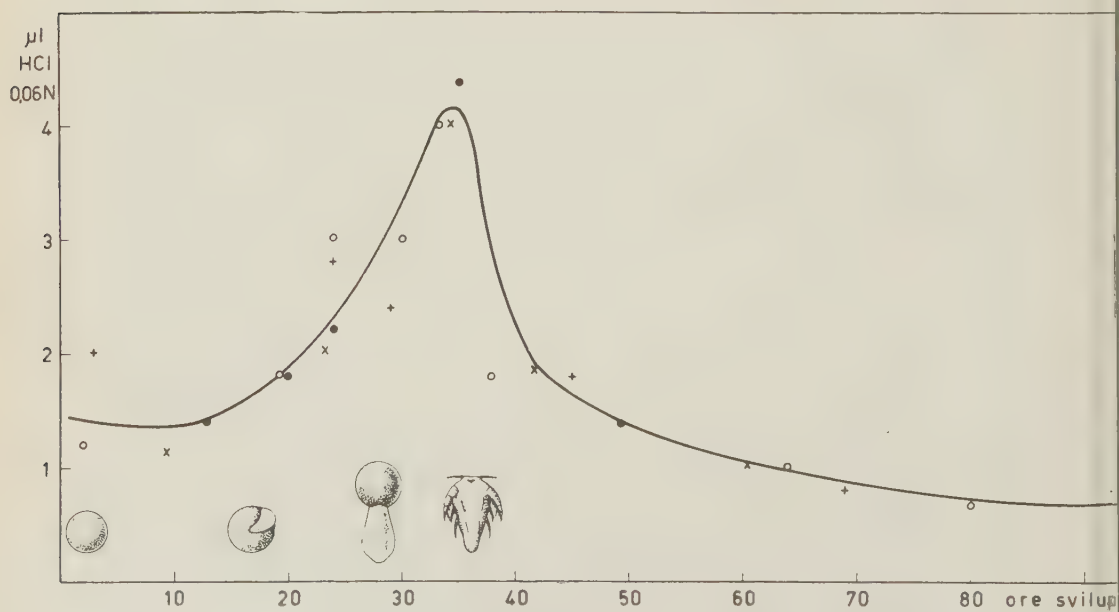


Fig. 2. - Comportamento delle lipasi nello sviluppo di *Artemia salina*.

Determinazioni eseguite con la II^a procedura, temperatura di sviluppo: 22 °C. Altre indicazioni come nella fig. 1. In ambedue i grafici diversi simboli indicano differenti lotti di esemplari ed ogni punto è la media di tre determinazioni titrimetriche.

il nuoto, o immediatamente prima, dopo di che questi enzimi mostrano una decisa diminuzione del loro tenore negli esemplari che non vengono alimentati.

Come si è detto nei lavori precedenti la nutrizione degli animali inizia tra lo stadio di nauplio e quello di metanauplio: segno che in questo periodo le scorte vitelline sono esaurite o insufficienti per le necessità dell'ulteriore sviluppo. Evidentemente anche in questo Fillopode l'esaurimento del deutoplasma determina un cambiamento delle attività metaboliche simile a quello dimostrato da Cotronei (1922, 1930, 1932) nello sviluppo degli Anfibi.

Le figg. 1 e 2 rappresentano chiaramente il comportamento delle lipasi da noi illustrato, c'è da rilevare che l'unica differenza che si incontra tra le figure stesse è nella velocità di sviluppo degli esemplari dipendente dalla temperatura di allevamento che è stata di 18°C (fig. 1, procedura I^a) e di 22°C. (fig. 2, procedura II^a).

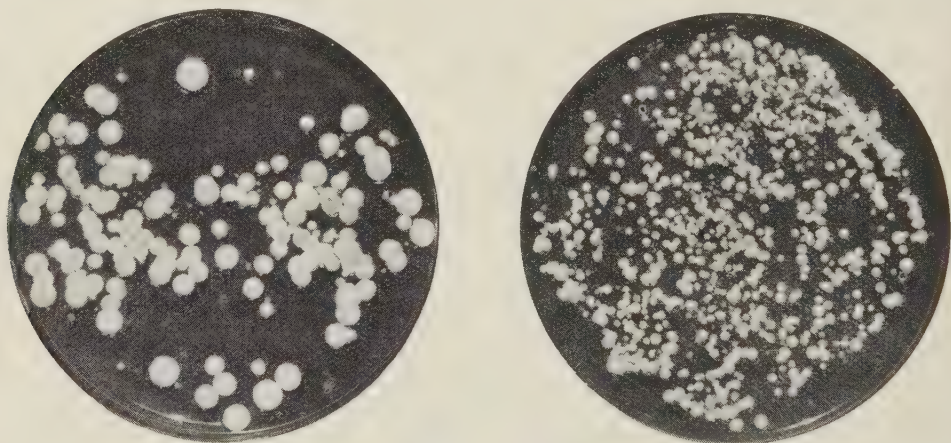
Gli studi qui sono tuttora in estensione allo scopo di apportare un contributo alla conoscenza del significato delle lipasi nei fenomeni della ontogenesi.

BIBLIOGRAFIA.

- BELLINI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 22, 340, (1957).
BELLINI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », (in stampa, 1957).
COTRONEI G., « Arch. Zool. Ital. », 10, 85, (1922).
COTRONEI G., « Mon. Zool. Ital. », 41, 8, (1930).
COTRONEI G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 15, 236, (1932).
GLICK D., *Techniques of Histo- and Cytochemistry*. Ed. Interscience (1949).
LINDERSTRØM-LANG K. U. e HOLTER H., « Z. Physiol. Chem. », 204, 15, (1932).
SUMNER J. B. e SOMERS G. F., *Chemistry and Methods of Enzymes*. Ed. Acad. Press Inc. (1953).
URBANI E., Atti Soc. Ital. Anat. Relazione al XVII Convegno Sociale (1956).
URBANI E., « Rend. Ist. Lombardo Sci. Lett. », B, 92, 69 (1957).
URBANI E. e DE CESARIS COROMALDI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 14, 144, (1953).
URBANI E., ROGNONE L. e RUSSO S., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 13, 300, (1953).
URBANI E., RUSSO S. e ROGNONE L., « Rend. Acc. Naz. Lincei », 14, 697, (1953).
URBANI E. e SCOLLO LAVIZZARI G., « Ric. Sci. » 25, 2119, (1955).
URBANI E. e URBANI MISTRUZZI L., « Rend. Acc. Naz. Lincei » 15, 126 (1953).

Genetica. — *Riattivazione con cloruro di manganese di conidi inattivati con azotoiprite in *Penicillium chrysogenum* (*)*. Nota di GIUSEPPE SERMONTI e GIORGIO MORPURGO, presentata (**) dal Socio straniero E. B. CHAIN.

La metil-bis(β -cloroetil)amina, azotoiprite⁽¹⁾, è un efficiente agente mutageno in *Penicillium chrysogenum* [1] e produce un forte incremento della segregazione somatica di diploidi eterozigoti della stessa specie [2]. Dette azioni si producono in condizioni in cui l'azotoiprite determina l'inattivazione quasi totale dei conidi trattati. In questa Nota sarà considerato in particolare questo ultimo effetto.



[Fig. 1 - Colonie di *Penicillium chrysogenum* (diploide XXXIV S) che sviluppano dalla semina di circa 8.000 conidi trattati con azotoiprite.

All'agar della piastra di sinistra è aggiunto $\text{MnCl}_2 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$ (0,8 %).

La tecnica impiegata per il trattamento con azoiprite è descritta in particolare in un'altra pubblicazione [2]. I conidi sono posti a contatto con l'agente in soluzione acquosa e l'azione di questo è interrotta dopo uno o quattro minuti per diluizione della sospensione conidica in una soluzione decontaminante a base di glicina. I conidi sono quindi seminati sulla superficie di piastre di Petri contenenti un terreno completo [3] agarizzato.

Si considerano « vitali » i conidi che producono colonie macroscopiche nelle condizioni suddette. La sopravvivenza dei conidi è valutata in base al numero dei conidi vitali, rapportato al numero totale dei conidi seminati. Quest'ultimo è valutato per conteggio alla camera di Thoma e controllato

(*) Istituto Superiore di Sanità, Centro Internazionale di Chimica Microbiologica, Capo Prof. E. B. Chain, F.R.S.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) « Cloramin », SIMES, Milano.

seminando un campione della sospensione da trattare, opportunamente diluito, prima di porre la sospensione stessa a contatto dell'azotoiprite.

La sopravvivenza dei conidi varia a seconda del ceppo impiegato e della durata del trattamento. Nelle esperienze che saranno riferite essa va da un massimo di 2,3 % dopo 1 minuto di trattamento, ad un minimo di 0,015 % dopo 4 minuti.

Ad alcune piastre di terreno completo destinate ad essere seminate con conidi trattati con azotoiprite è stato aggiunto cloruro di manganese ($\text{MnCl}_2 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$) al fine di studiare l'effetto di questo composto, in particolare sui fenomeni indotti dall'azotoiprite nei ceppi diploidi eterozigoti (vedi avanti). Il MnCl_2 è stato aggiunto all'agar fuso alle dosi del 0,4, 0,6 o 0,8 %.

TABELLA I.

*Azione del MnCl_2 su conidi del ceppo diploide XXXIV S di *Penicillium chrysogenum*, senza previo trattamento e dopo trattamento inattivante con azotoiprite.*

Concentrazione di MnCl_2 nell'agar	Controllo (Colonie (*)) per piastra n°)	Trattamento con azotoiprite		
		(conidi per piastra n°)	Tratt. 1 min' (colonie per piastra n°)	Tratt. 4 min' (colonie per piastra n°)
—	40,4 \pm 1,2	8.000	108 \pm 8	2,3 \pm 0,3
0,4 %	36,0 \pm 1,6	8.000	755 \pm 16	48 \pm 4,6
0,8 %	22,7 \pm 2,7	8.000	1.051 (**)	119 \pm 12

Accanto ai valori medi sono riportati gli errori standard.

(*) Seminati circa 70 conidi per piastra.

(**) Il numero di colonie per piastra è troppo alto per una valutazione accurata.

Dopo 3, 4 giorni di incubazione a 24 °C sulle piastre contenenti MnCl_2 si osserva un numero di colonie notevolmente superiore a quello che si sviluppa in assenza di MnCl_2 . Ciò significa che un gran numero di conidi incapaci di sviluppare su terreno completo, cioè di conidi inattivati, dà luogo a colonie in presenza di MnCl_2 . Questo sale agisce dunque come agente riattivante di tali conidi. Un modello di esperimento è riportato nella Tabella I. Come si osserva nella prima colonna il MnCl_2 ha una significativa azione depressiva sul numero di colonie che sviluppano da conidi non trattati (controllo). Le dimensioni delle colonie sono altresì ridotte a tale l'effetto è più evidente con l'aumentare della concentrazione del MnCl_2 . A dosi superiori all'1 % la crescita del *Penicillium* è praticamente abolita. I conidi trattati con azotoiprite (vedi ultime due colonne) danno invece luogo ad un numero di colonie fortemente superiore in presenza di MnCl_2 . L'effetto riattivante

aumenta con la concentrazione del sale, mentre le dimensioni delle colonie risultano viepiù ridotte.

Questo fenomeno che chiameremo riattivazione da $MnCl_2$, è stato osservato, sostanzialmente inalterato, anche su conidi conservati, dopo trattamento con azotoiprite, per 10 giorni a $+5^\circ C$ (vedi Tabella II).

La inattivazione da azotoiprite e la riattivazione da $MnCl_2$ sono state sperimentate su alcuni altri ceppi di *P. chrysogenum*, con i risultati riportati nella Tabella II.

TABELLA II.

*Riattivazione da $MnCl_2$ in alcuni ceppi di *Penicillium chrysogenum*.*

Ceppo	Grado di ploidia	Trattam. con azotoipr. (min')	Conidi per piastra (n°)	Colonie per piastra			
				$MnCl_2$ assente (n°)	$MnCl_2$ 0,4 % (n°)	$MnCl_2$ 0,6 % (n°)	$MnCl_2$ 0,8 % (n°)
XXXIVS (*)	diploide	4	8.000	$14,4 \pm 1,4$	161 ± 7	—	292 ± 15
206	aploide	1	7.800	152 ± 8	115 ± 7	—	218 ± 8
		4	7.800	45 ± 2	38 ± 3	—	95 ± 7
XXXIV	diploide	1	8.460	192 ± 7	—	1.024 ± 74	—
		4	8.460	$14,7 \pm 1,6$	—	133 ± 8	—
31 py	aploide	1	11.600	$10,3 \pm 1,2$	—	$36 \pm 4,7$	—

Accanto ai valori medi sono riportati gli errori standard.

(*) Conidi conservati 10 giorni a $+5^\circ C$ dopo il trattamento con azotoiprite.

La riattivazione è un fenomeno generale, ma la sua intensità varia notevolmente tra ceppo e ceppo. Il ceppo aploide 206 risulta, tra quelli sperimentati, il meno riattivabile: la riattivazione si osserva solo alle dosi superiori di $MnCl_2$ ed è di lieve entità, benché statisticamente significativa ($P < 0,01$).

Un certo numero di colonie (80) « riattivate » da $MnCl_2$ sono state trasferite su agar completo non addizionato del sale, ed hanno dimostrato di svilupparvisi normalmente. Ciò sta ad indicare che una colonia riattivata richiede il $MnCl_2$ per superare la crisi « letale » prodotta dall'azotoiprite, ma può in seguito continuare a svilupparsi anche in assenza del principio riattivante.

L'azione del $MnCl_2$ è stata provata anche su conidi inattivati da raggi ultravioletti e da raggi X. Il trattamento con ultravioletti è stato fatto su conidi in sospensione acquosa in una provetta di quarzo - agitati per gorgogliamento con O_2 - con una lampada a vapori di mercurio posta a 20 cm dalla provetta. Il trattamento con raggi X è stato fatto su conidi in sospensione acquosa in provette di vetro, con un tubo a raggi X a 245 KV, 15 mA, filtrazione 1 mm Al.

Come risulta dalla Tabella III il $MnCl_2$ non ha proprietà riattivanti né suoi conidi inattivati da raggi X, né suoi conidi inattivati da raggi ultravioletti. La sua azione riattivante presenta quindi una forte specificità nei rispetti dell'agente inattivante.

TABELLA III.

Inefficienza del $MnCl_2$ nella riattivazione di conidi inattivati da raggi X e raggi ultravioletti (Diploide XXXIV S).

Trattamento inattivante	Esposizione	Conidi per piastra	Colonie per piastra	
			$MnCl_2$ assente (n°)	$MnCl_2$ 0,8 % (n°)
raggi X (controllo)	—	—	$47,5 \pm 2,4$	$41,8 \pm 3,1$
raggi X	25.000 r	2.110	296 ± 6	207 ± 22
raggi X	50.000 r	2.110	$13,2 \pm 2,9$	$8,2 \pm 2,2$
raggi U. V. (controllo)	—	—	$35,6 \pm 2,2$	$32,0 \pm 5,4$
raggi U. V.	(2 min')	2.450	260 ± 13	143 ± 9

Accanto ai valori medi sono riportati gli errori standard.

L'azione riattivante del $MnCl_2$, si aggiunge ad altri effetti biologici già conosciuti di questo composto, tutti altrettanto misteriosi nel loro meccanismo. Il $MnCl_2$ è noto come potente mutageno in *Escherichia coli* [4]; esso in unione con ATP, ristabilisce la fosforilazione aerobica in mitocondri inattivati per trattamento con Ca^{++} [5]; come altri ioni bivalenti il Mn^{++} promuove l'assorbimento dell'acido desossiribonucleico (DNA) da parte del collagene, e si suppone che partecipi a legami elettrovalenti tra proteine e DNA nelle nucleoproteine [6]. Inoltre ricerche in corso nel nostro laboratorio hanno mostrato che il $MnCl_2$ è un potente inibitore di processi di segregazione somatica indotti da mutageni in diploidi di *P. chrysogenum*.

Gli Autori desiderano ringraziare la dott.ssa A. Scafati per il trattamento con i raggi X, il prof. E. B. Chain, F.R.S. per il suo costante interessamento e il prof. F. Navazio per le utili discussioni.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] ROEGNER F. R., STAHMANN M. A. e STAUFFER J. G., «Amer. J. Bot.», 41, p. 1 (1954).
- [2] MORPURGO G. e SERMONTI G., IV Riunione Assoc. Genet. Ital., 1957, Suppl. a «La ricerca Scientifica» (in stampa) (1958).
- [3] SERMONTI G., «Genetics», 42, p. 433 (1957).
- [4] DEMEREC M. e HANSON J., «Cold Spring Harbor Symp. quant. Biol.», 16, p. 215 (1951).
- [5] LINDBERG O. e ERNSTER L., «Nature, Lond.», 173, p. 1038 (1954); ERNSTER L. e LOW H., «Experimental Cell Research», Suppl. III, p. 133 (1955).
- [6] KIRBY K. S., «Biochem. J.», 66, p. 495 (1957).

Biologia. — *Sul trapianto di abbozzi di Triton su embrioni di Rana esculenta e possibilità di differenziamento e di maggior resistenza alla distruzione a seguito di un nuovo metodo sperimentale*^(*). Nota di ALDO SPIRITO e CARLO BONDI, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

Il grande sviluppo che hanno avuto, dal 1929 in poi, le ricerche del Cotronei e della sua Scuola sui problemi della costituzione zoologica studiata con il metodo dei trapianti, espianti e parabiosi, ci esime dal dire, in questa Nota, dettagliatamente di esse: ci limiteremo qui a ricordare soltanto i risultati di rapida distruzione (distruzione embrionale di Cotronei) degli abbozzi di Urodeli (*Triton* e *Axolotl*) trapiantati su embrioni di alcuni Anuri (*Bufo*, *Rana esculenta*)⁽¹⁾; risultati ai quali uno di noi (Spirito) concorse avendo l'onore di essere collaboratore del Cotronei che aveva ideato e diretto le ricerche in questione^(2,3,4, ecc.)

Sulla base di questi risultati e di altri, che mettevano in luce come la distruzione degli abbozzi trapiantati fosse legata al metabolismo vitellino, il Cotronei emetteva fino da allora la sua teoria sull'importanza determinante del vitello stesso nei processi di lisi degli abbozzi di Urodeli trapiantati xenoplasticamente. Una prova sperimentale della veridicità di tale concezione del Cotronei fu data nel 1932 da uno di noi (Spirito)⁽⁵⁾ mediante la realizzazione di un particolare accorgimento sperimentale (consistente nel trapiantare gli abbozzi di *Triton* su parti isolate di *Rana esculenta* povere o ricche di vitello) con il quale si otteneva differenziamento e resistenza alla distruzione della vescicola ottica e dell'abbozzo olfattivo di *Triton* trapiantati su parti embrionali di *Rana esculenta* povere di vitello, laddove la distruzione era rapida e pronta per gli stessi abbozzi trapiantati su parti ricche di tale materiale.

Dopo molti anni—riprendendo queste ricerche nell'Istituto di Biologia generale dell'Università di Perugia — uno di noi (Bondi) otteneva di nuovo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia generale dell'Università di Perugia.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) Ricordiamo qui che Cotronei e collaboratori avevano anche trovato che gli stessi abbozzi di Urodeli non vanno soggetti a tale distruzione se trapiantati su embrioni di altri Anuri (per esempio *Hyla*)

(2) G. COTRONEI e A. SPIRITO, *Costituzione zoologica e trapianti. Esperienze tra Anuri e Urodeli*. Nota II. « Rendic. Acc. Lincei », vol. XI, 425 (1930).

(3) G. COTRONEI e A. SPIRITO, *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli*. Nota III. « Rend. Acc. Lincei », Vol. XI, 854 (1930).

(4) G. COTRONEI e A. SPIRITO, *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri e Urodeli*. Nota VII. « Rend. Acc. Lincei », vol. XIV, 149 (1931).

(5) A. SPIRITO, *Ricerche di innesti e di trapianto su parti embrionali isolate negli embrioni di Anfibi*. « Roux. Archiv. », vol. 127, 61 (1932).

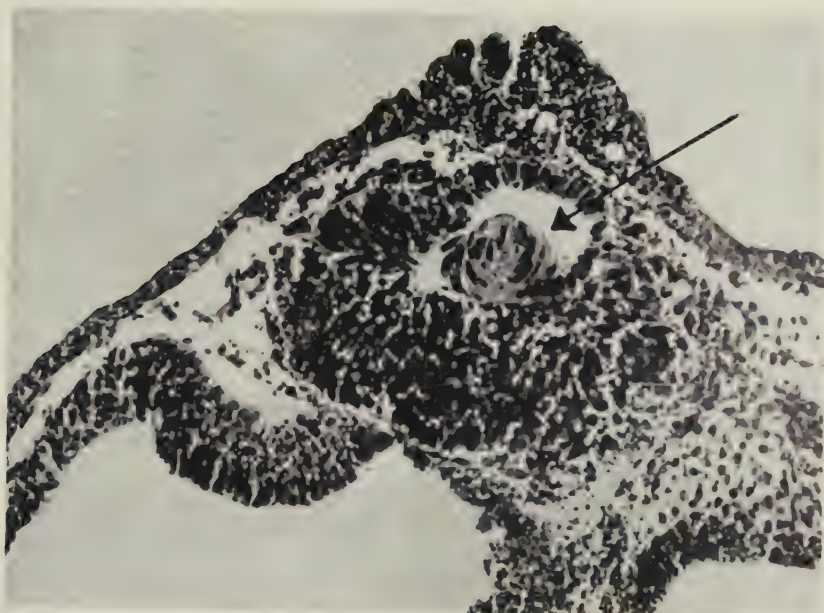


Fig. 2. - Sezione trasversale dell'embrione pretrattato di *Rana esculenta*. La freccia indica l'abbozzo oculare di *Triton* (si osservi la formazione del calice ottico e del cristallino) ancora ben evidente dopo uguale periodo dal trapianto.

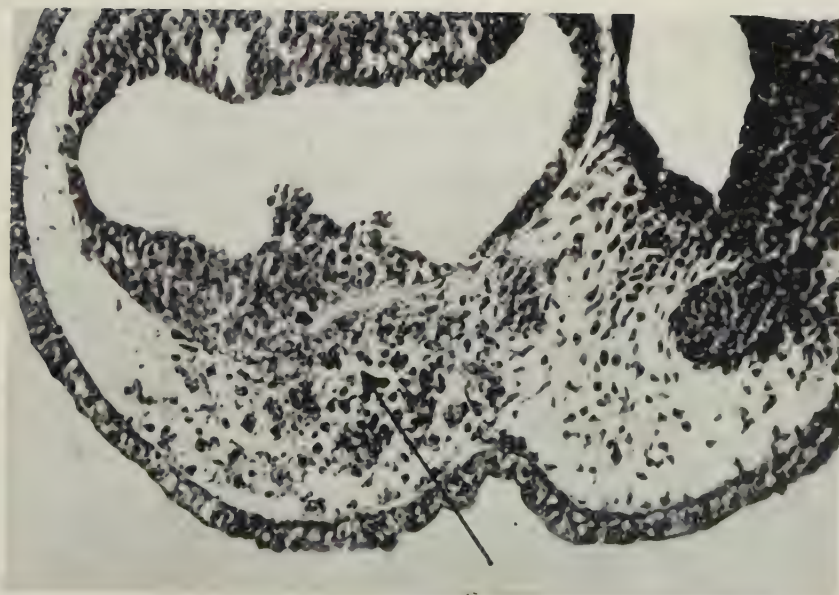
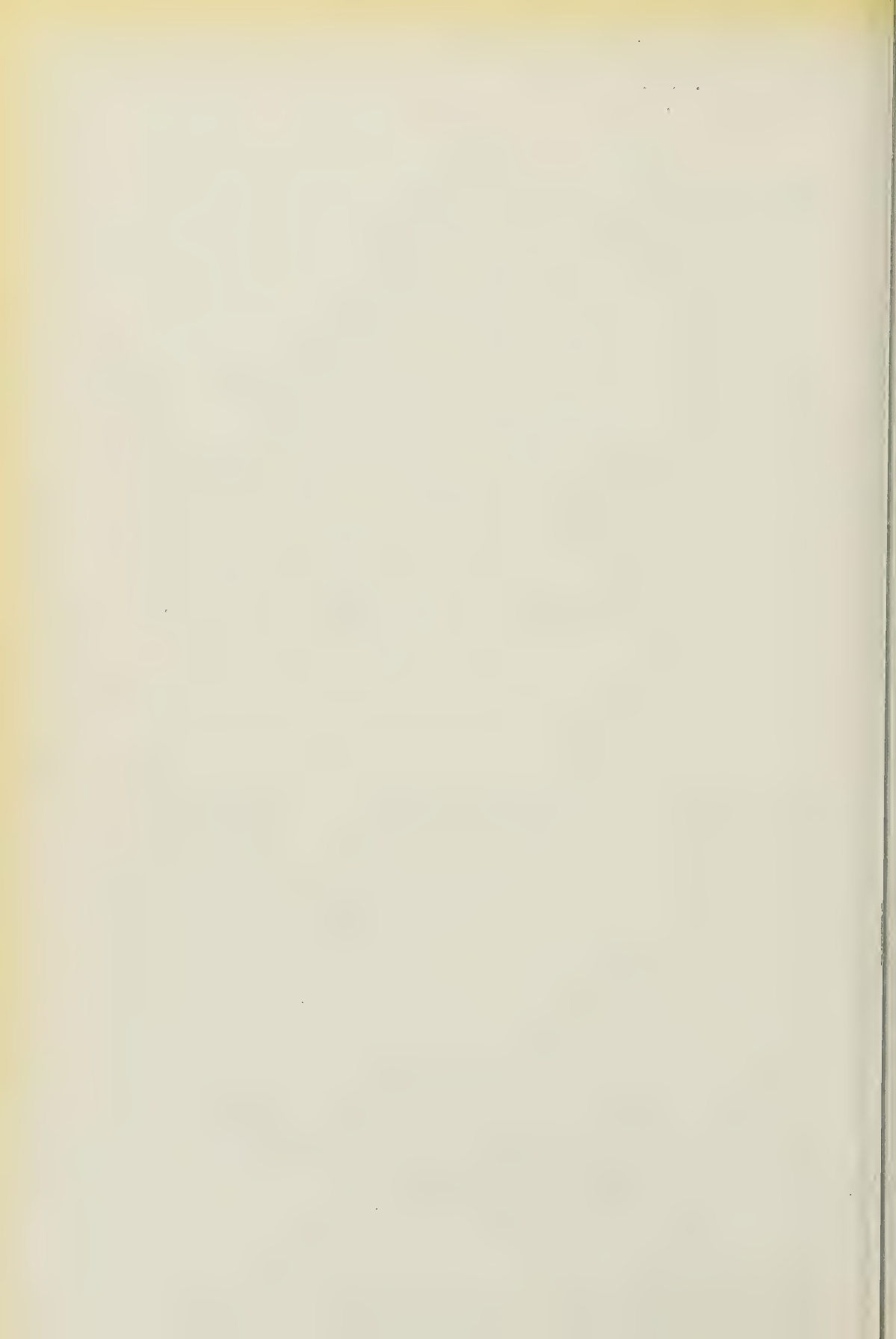


Fig. 1 - Sezione trasversale dell'embrione controllo di *Rana esculenta*. La freccia indica i residui dell'abbozzo oculare di *Triton* trapiantato quattro giorni prima.



la possibilità di differenziamento e di resistenza alla distruzione di abbozzi di *Triton* trapiantati, non più su parti isolate, ma su embrioni di *Rana esculenta* ai quali veniva preliminarmente asportata gran parte della riserva vitellina ventrale. Questi risultati rappresentavano, quindi, un ulteriore passo avanti dopo le predette indagini di Spirito (ottenute con l'uso di parti embrionali isolate) in quanto, nelle esperienze di Bondi, l'embrione di *Rana* – ad eccezione di una molto minor quantità di vitello – veniva lasciato integro nei suoi organi essenziali e quindi l'embrione manteneva in atto gli scambi tra le varie parti dell'organismo.

A seguito di quanto sopradetto e richiamandoci ancora una volta alla predetta teoria del Cotronei sull'influenza del vitello nei processi di incompatibilità embrionale – riaffermati ed ancora più profondamente lumeggiati in una Nota del Cotronei del 1952 ⁽⁶⁾ – abbiamo voluto riprendere nuovamente queste ricerche nel tentativo di giungere ad una ulteriore tappa delle indagini stesse nella quale, non con l'uso di parti embrionali isolate, non con l'uso di embrioni privati di una gran parte del vitello, ma addirittura con embrioni interi, si potesse giungere a processi di differenziamento e di maggior resistenza alla distruzione degli abbozzi di *Triton* trapiantati su *Rana esculenta*.

A questo scopo abbiamo introdotto una nuova metodica sperimentale consistente nel trapiantare una o più volte tessuti embrionali di *Triton* a diretto contatto del vitello di embrioni di *Rana esculenta* e successivamente trapiantando un abbozzo oculare di *Triton* al posto dell'abbozzo oculare di *Rana*, laddove da controllo fungeva un altro embrione di *Rana*, derivato dalla stessa madre, al quale veniva trapiantato in sede oculare l'abbozzo simmetrico dello stesso donatore *Triton*, ma che non era stato assoggettato ai predetti trapianti preliminari in sede ventrale.

Il significato di siffatte operazioni ci sembra ben chiaro. Infatti si poteva pensare che le cospicue masse di tessuti di embrione di Urodelo, poste nell'embrione di *Rana*, proprio a diretto contatto con il vitello di questo – e quindi nella più favorevole condizione per impegnare nella sicura loro distruzione i prodotti che scaturivano dal metabolismo vitellino e necessari per il completamento della reazione litica immunitaria – potevano sottrarre buona parte di tali prodotti, in modo che l'abbozzo oculare trapiantato nella parte cefalica ne ricevesse in minor misura e quindi risentisse meno di quello posto nell'altro embrione di *Rana*, usato come controllo, e che non aveva subito i suddetti trapianti ventrali.

I risultati ottenuti con tali operazioni, e che saranno descritti *in extenso* da uno di noi (Bondi) insieme ad una documentazione iconografica, hanno

(6) G. COTRONEI, *Risultati sperimentali e problemi sui trapianti, espianti, parabiosi xenoplastiche negli Anfibi*. « Rend. Acc. Lincei », vol. XIII, 223 (1952).

dimostrato tutta una gamma di reperti che giunge, nei casi migliori, alla dimostrazione della possibilità di differenziamento degli abbozzi di *Triton* trapiantati su *Rana esculenta*, mentre il controllo relativo sta a dimostrare l'avvenuta rapidissima solita distruzione embrionale. E si è giunti così, nei casi migliori (Tavola I, figg. 1 e 2), ad avere pochi residui cellulari degli abbozzi di *Triton* trapiantati sull'embrione di *Rana* non pretrattato (Tavola I, fig. 1), laddove l'abbozzo derivato dallo stesso donatore e posto su embrione di *Rana* precedentemente trattato con uno o più trapianti di tessuti dell'Urodela in sede di vitello ventrale, aveva subito un buon differenziamento organologico, permanendo in buone condizioni nelle sue varie parti (retina, cristallino) (Tavola I, fig. 2).

Le premesse teoriche da cui eravamo partiti nell'impostare la presente ricerca (e cioè la possibilità di sottrarre mediante trapianti preliminari le sostanze derivanti dal metabolismo vitellino e responsabili della solita rapida distruzione embrionale) si sono dimostrate pertanto veramente proficue e la teoria del Cotronei sul valore del vitello nella distruzione embrionale dei trapianti di abbozzi di Urodela su alcuni Anuri riceve dalle nostre esperienze una nuova conferma chiara ed inequivocabile.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Nello Beccari

tenuta (*) dal Socio GIUSEPPE LEVI

Nel 1905 Nello Beccari, studente al 4° anno di medicina, era allievo interno nell'Istituto anatomico di Firenze. Giulio Chiarugi gli aveva suggerito di intraprendere uno studio sui neuroni di Mauthner negli Anfibi Urodela. Io ero allora assistente in quell'Istituto, e Beccari, che era divenuto mio amico, mi teneva a giorno del progresso delle sue ricerche; la nostra amicizia si mantenne inalterata per 50 anni. Un giorno dimostrai a Beccari dei preparati di avanotti di trota, che avevo allestito proprio allora col metodo all'argento ridotto (detto impropriamente metodo fotografico), scoperto a quell'epoca da Cajal e che avevo utilizzato per i miei studi sui neuroni sensitivi.

Beccari, dotato sin dagli anni giovanili di quell'intuito, che nella ricerca scientifica permette di sceverare l'importante dall'accessorio, dote che non si acquista coll'esperienza, ma che è innata e che egli aveva ereditato dal padre, l'insigne botanico Odoardo Beccari (già socio nazionale della nostra

(*) Nella seduta del 14 dicembre 1957.

Accademia), comprese subito quale partito egli avrebbe potuto ritrarre per le sue ricerche dall'applicazione sugli embrioni del metodo all'argento ridotto e se ne valse per il suo studio sul neurone di Mauthner non solo, ma nella più gran parte delle sue ricerche successive.

A torto questo metodo d'indagine viene dalla grande maggioranza degli istologi posto allo stesso livello di altri metodi per la colorazione elettiva delle neurofibrille; ben pochi si sono resi conto che la tecnica di Cajal applicata sugli embrioni ha la proprietà di porre in risalto in modo elettivo, mercé l'intensa colorazione delle neurofibrille, i rari neuroni precocemente differenziati in tutta la loro estensione, in confronto agli elementi indifferenziati, i quali rimangono incolori. Di conseguenza non si vede nel nevrasso degli embrioni, come nella sostanza grigia degli animali adulti, un inestricabile intreccio di ramificazioni dei dendriti e dei neuriti. E poiché il metodo dà, ripeto, risultato positivo anche in embrioni precoci, nei quali i neuroni differenziati sono scarsissimi, e nei quali la distanza che separa l'origine dalla terminazione dei neuriti è molto breve, è possibile di seguire il tragitto delle vie nervose primordiali in tutta la loro lunghezza.

E poiché d'altro lato la differenziazione dei vari sistemi durante l'ontogenesi non avviene simultaneamente ma a tappe, negli embrioni colorati con quel metodo si distinguono i neuroni di singoli sistemi più precocemente differenziati da quelli di altri.

Il metodo presenta adunque alcuni dei pregi della reazione cromoargenica, ma da vari punti di vista le è superiore: per la maggior costanza dei risultati, perché è applicabile anche ad embrioni molto precoci ed anche perché con esso si ottengono immagini più fini.

Di tutto ciò si resero conto dopo Cajal, ben pochi studiosi di morfologia del sistema nervoso; Tello, Beccari, Terni, Leghissa, Levi Montalcini e qualche altro. Ed a Beccari spetta particolarmente il merito di aver applicato il metodo ai centri nervosi di Vertebrati inferiori; Petromizonti, Selaci, Teleostei e Rettili.

Poco dopo la laurea Egli frequentò per un anno il « Seckenbergisches Institut » di Francoforte, diretto da Ludwig Edinger, a ragione considerato come il fondatore dell'Anatomia comparata del sistema nervoso; per Edinger, Beccari conservò profonda devozione e volle partecipare nel luglio del 1955 alla riunione che si tenne a Groningen, dedicata alla memoria di Edinger, in occasione del centenario della sua nascita.

Nel 1909 Beccari, ritornato a Firenze, succedette a me nel posto di assistente dell'Istituto anatomico, in seguito alla mia nomina nell'Università di Sassari. Da allora Beccari lavorò, ininterrottamente sotto la guida di Chiarugi sino al 1922. Durante la guerra italo-austriaca prestò servizio militare quale ufficiale medico; nel dicembre 1917 fu lievemente ferito alla stazione di Mestre durante un bombardamento aereo. Nel 1922 fu nominato, in seguito a concorso, Professore di Anatomia umana a Catania, ove rimase sino al 1925. In quell'anno la Facoltà di Scienze di Firenze propose ed ottenne il suo trasferimento alla cattedra di Anatomia comparata in quell'Università; cattedra rimasta vacante dopo la morte di David Carazzi.

Il passaggio del Beccari dall'Anatomia umana all'Anatomia comparata incontrò invero qualche opposizione. Un zoologo che faceva parte del Consiglio Superiore dell'Istruzione, combattè la proposta della Facoltà di Firenze, contestando che tra Anatomia umana ed Anatomia comparata vi fosse affinità. Ma il trasferimento di Beccari avvenne egualmente. Non è questa la sede adatta a discutere se quest'affinità tra le due discipline esiste o meno. La mia convinzione personale è che questo « spirito corporativo » che tuttora si manifesta spesso negli ambienti dell'alta cultura, è pernicioso. Nel caso particolare di Beccari, è certo che da tutta la sua opera scientifica emerge che ben pochi come lui hanno inteso quale dovesse essere il moderno orientamento dell'Anatomia comparata. Per di più, Egli s'interessò sempre di Zoologia sistematica; durante i suoi viaggi in Eritrea (nel 1906) e nella Gujana inglese (nel 1931) raccolse un ricco materiale ornitologico; nel 1907 appare un suo scritto sull'avifauna della Colonia Eritrea. Il materiale raccolto durante il suo secondo viaggio (compiuto sotto gli auspici della Società geografica italiana) fu da lui donato al Museo di Storia naturale di Firenze.

Del resto la conoscenza di Beccari del metodo d'indagine della Zoologia sistematica risulta anche dall'Introduzione al suo libro di Anatomia comparata dei Vertebrati, del quale parleremo più oltre.

Beccari conservò l'insegnamento dell'Anatomia comparata a Firenze sino al giorno in cui fu collocato a riposo.

Nel 1934 quando Chiarugi lasciò l'insegnamento per limiti d'età, tenne per un anno l'incarico dell'Anatomia umana. La Facoltà di medicina di Firenze avrebbe desiderato che Egli accettasse di succedere al suo Maestro; ma Beccari era troppo affezionato al suo Istituto di Via Romana per decidersi ad abbandonarlo. Egli era circondato da numerosi allievi di grande valore. E tre di questi si affermarono vigorosamente ed occupano attualmente cattedre universitarie: Emanuele Padoa è suo successore a Firenze, Claudio Galgano, professore d'Istologia a Napoli, e Valdo Mazzi, professore di Anatomia comparata a Torino.

Se prescindiamo da alcuni studi che risalgono ai suoi anni giovanili, quali le sue memorie sulla struttura e sullo sviluppo delle tasche e delle ghiandole suborbitali in varie specie di ruminanti, due argomenti furono prediletti da Beccari: la Morfologia comparata e la Istologia dei centri nervosi; in oltre l'origine e la differenziazione delle cellule sessuali negli Anfibi.

Gli studi di Neurologia comparata risalgono al primo periodo della sua attività scientifica, quelli sulle cellule sessuali al secondo. Però Egli continuò per tutta la sua vita ad interessarsi del primo argomento; interesse che è documentato dal suo bellissimo trattato « Neurologia comparata » apparso nel 1943, del quale parleremo tra breve.

Le eccezionali doti di ricercatore di Beccari si palesano già nella sua memoria giovanile, che presentò quale dissertazione di laurea sui neuroni di Mauthner. Il reperto più originale, e sul quale Egli ritornò più tardi, in palese contrasto colla formula della polarizzazione dinamica nella conduzione della corrente nervosa, consiste nella dimostrazione dell'esistenza di sinapsi asso-

assoniche; queste sinapsi si riscontrano tanto nel tragitto del neurite gigantesco di Mauthner nel midollo spinale, che nell'Oblongata. Nel midollo la sinapsi si istituisce tra le collaterali tozze e brevi della fibra gigantesca ed il neurite di una cellula radicolare motrice; nell'Oblongata tra le collaterali della fibra gigantesca e le collaterali brevi di fibre del fascio longitudinale mediale.

In quanto al significato morfo-funzionale del neurone di Mauthner, Egli ritiene che appartenga, come quello di Müller, al centro tegmentale rom-bencefalico. L'argomento fu ulteriormente svolto in un periodo molto più recente, da Alberto Stefanelli; questo neurone ha lo stesso significato di altri neuroni giganteschi, quali i tegmentali dei Petromizonti, quelli detti premauteriani situati nelle larve di Anfibi all'altezza della radice del trigemello. Secondo Beccari tutti questi neuroni rientrano nella categoria degli elementi tegmentali; si sarebbero differenziati in relazione ai movimenti del tronco e della coda nel nuoto (Stefanelli).

Durante il suo soggiorno al «Seckenbergisches Institut» il Nostro studiò, per suggerimento di Edinger, la regione paraolfattoria del telencefalo, che Edinger riteneva estranea alla funzione dell'olfatto e destinata piuttosto alla sensibilità della lingua e del becco. Le conclusioni alle quali pervenne il Nostro, non si accordavano del tutto colle idee di Edinger, perché fu dimostrata una costante relazione tra lo sviluppo delle due regioni nei vari animali; però questo non pregiudicherebbe, secondo Beccari, il concetto più essenziale di Edinger, «perché le due regioni potrebbero aver risentito gli effetti della stessa causa modificatrice ed essere contemporaneamente ed in proporzioni analoghe sviluppate, pur rimanendo funzionalmente indipendenti».

Nel 1913 il Nostro scoperse un fatto molto importante. Vari anni prima V. Lenhossék aveva dimostrato colla reazione cromoargentica l'esistenza nelle radici posteriori nell'embrione di pollo di fibre efferenti che si originano da cellule radicolari anteriori del midollo spinale; il reperto, che fu poco dopo confermato da Cajal e da van Gehuchten, contrastava colla nozione di dominio comune, confortata dall'esperienza fisiologica, che le fibre delle radici posteriori sono sensitive ed hanno il centro trofico nel ganglio spinale. Le fibre di Lenhossék erano state interpretate come viscerali.

Beccari dimostrò in embrioni di *Lacerta* (e successivamente in quelli di uccelli) che le fibre somatomotrici dorsali sono limitate alla zona di transizione cefalo-spinale, cioè alle radici più craniali del tronco ed alle più caudali della testa; prendono origine da grandi cellule situate nella stessa colonna di quelle dalle quali si originano le fibre ventrali dei nervi spinali ed hanno lo stesso significato di quelle cellule. Appartengono alla porzione spinale del nervo accessorio. Innervano organi derivati dai somiti della regione branchiale, e più precisamente la lamina muscolare corrispondente al trapezio dei mammiferi. Il reperto di Beccari fu confermato da Vermeulen e da Addens.

A varie riprese Egli ha studiato, valendosi sempre del metodo all'argento ridotto, la morfologia della regione oscipitale della testa, problema formidabile che appassionò molti dei grandi morfologi del secolo scorso: Gegenbaur, Fürbringer, Dohrn, Chiarugi, Froriep ed altri ancora. Nella

monografia del 14 (la quale riguarda in prevalenza reperti sovra embrioni di *Lacerta*) il Nostro perviene alla conclusione che alla formazione della regione occipitale della testa hanno concorso per lo meno 7 metameri somatici, ai quali hanno corrisposto 7 archi branchiali. Nei sauri e nei mammiferi si riconoscono nel vago e nel glossofaringeo un gruppo gangliare spinale ed uno branchiale. Il gruppo branchiale è unico nel glossofaringeo e corrisponde alla 2^a tasca branchiale, è duplice nel vago e corrisponde alla 3^a e 4^a tasca branchiale. Il gruppo spinale sembra semplice nel glossofaringeo, nel vago è costituito da 6 aggruppamenti ai quali corrispondono 6 radici e forse 6 gangli dorsali segmentali. Nel vago si avrebbe adunque la funzione di elementi spinali e branchiali appartenenti a vari segmenti. Nei sauri e nei mammiferi i nervi ed i gangli branchiali superstiti nella regione occipitale sono soltanto 3; uno per glossofaringeo e due per il vago. Dalla riunione di elementi somatomotori situati con un numero variabile di radici dorsali, si costituisce il nervo accessorio spinale. Nei riguardi del significato di questo nervo Beccari nei suoi scritti più antichi lo considerava un nervo spinale; e l'Addens (1933) si associò a quest'interpretazione. Ma nella sua pubblicazione del 1942 Beccari riconosce che la sua prima ipotesi è infondata e ritorna al concetto antico, secondo il quale il nervo accessorio spinale va considerato come un nervo branchiale. Per osservazioni sui telostei è indotto a ritenere che si sia formato per un processo di concentrazione simile a quello di altri nervi rombencefalici.

Beccari ha per il primo illustrato in modo completo i neuroni tegmentali nei vertebrati inferiori. Questo sistema, sul quale già Bechterew aveva richiamato l'attenzione, fu più ampiamente studiato dall'Edinger e da vari altri. Il Nostro preferisce per questo sistema la denominazione di interstiziale o meglio ancora di reticolare. Nel 22 lo studiò negli embrioni di rettili, nel 30 negli embrioni di Selacei, in altre memorie in quelli di teleostei. Secondo Beccari il sistema reticolare meso-diencefalico è rappresentato dal nucleo del fascicolo longitudinale mediale; il centro metencefalico è il nucleo reticolare medio di Kappers, il quale assomiglia al nucleo metencefalico di *Lacerta*. Il gruppo mielencefalico corrisponde al nucleo reticolare inferiore già visto da Hoevell. In complesso vi è perfetta omologia tra questi centri dei Selacei e quelli da lui antecedentemente descritti in *Lacerta*. Beccari considera i neuroni reticolari quale un sistema paleoencefalico, il quale avrebbe importanza soprattutto nei vertebrati inferiori.

I neuroni giganteschi di Mauthner e di Müller rientrerebbero pure nel sistema interstiziale, come fu già detto. Tutti i neuroni interstiziali, anche prescindendo da quelli giganteschi, hanno un considerevole volume; sono sparsi nella callotta del mielencefalo, del metencefalo, del mesencefalo e, secondo Beccari, anche del diencefalo. Il sistema interstiziale meso-diencefalico si collega colle vie discendenti del tetto del mesencefalo e dei corpi genicolati. Quasi tutte le fibre originatesi da neuroni interstiziali si raccolgono nel fascio longitudinale mediale e forse discendono nel midollo; sarebbero, effettori di 2° ordine; il loro neurite non raggiunge, come i neuroni primari,

l'organo terminale ma forma una via che coordinatamente influenza i neuroni primari. Nei vertebrati inferiori presiederebbero alle funzioni di deambulazione automatica. La deambulazione pura sarebbe localizzata nel centro tegmentale mielencefalico, la coordinazione dei movimenti richiederebbe l'integrità anche del centro tegmentale metencefalico.

Nei mammiferi e nell'uomo i neuroni reticolari (studiati più tardi ampiamente dal Castaldi) sono sparsi nella sostanza reticolata del rombencefalo e del mesencefalo, non costituiscono aggruppamenti ben delimitati; è certo che non hanno la medesima importanza che nei vertebrati più bassi.

Segneremo ancora le sue ricerche sui nuclei del nervo vestibolare e sulle connessioni di questi nuclei nella serie dei vertebrati. Nei teleostei vi sono due sorta di connessioni vestibolo-oculomotorio; quella col nucleo tangenziale, e l'altra col nucleo di Deiters, per non parlare dei nuclei minori. Il nucleo di Deiters raccoglie più particolarmente sensazioni dal sacculo e le trasmette al midollo per mezzo del fascio vestibolo-spinale diretto. Con il sacculo è pure collegata la cellula di Mauthner. Il nucleo tangenziale costituirebbe un apparato vestibolo-motorio, deputato principalmente ai movimenti degli occhi, il nucleo di Deiters ed il neurone di Mauthner, un apparato vestibolo-motorio spinale.

I Selacei non possiedono un nucleo tangenziale, né un neurone di Mauthner; mancando il nucleo tangenziale non si riscontrano nelle cellule del nucleo oculomotorio le caratteristiche sinapsi a forma di cupola che nei teleostei e nei rettili sono fornite dalle fibre originatesi dal nucleo tangenziale.

Mancando il nucleo tangenziale i Selacei non possiedono, come i teleostei un apparato vestibolo-oculomotorio separato. E mancando il neurone di Mauthner, le sole vie vestibolo-spinali sono rappresentate dai neuroni del nucleo di Deiters e dal nucleo della radice discendente vestibolare.

I neuroni di questi due nuclei mediante il fascio vestibolo-spinale diretto ed il fascio longitudinale mediale assicurano nei Selacei tanto il riflesso vestibolo-oculomotorio che il riflesso vestibolo-motorio spinale. Nei Selacei le connessioni dei neuroni dei nuclei vestibolari con altri centri si avvicinano maggiormente a quelle dei mammiferi che a quelle dei teleostei.

Nell'evoluzione l'importanza del nucleo tangenziale diminuisce, mentre aumenta quella del nucleo di Deiters, il quale finisce coll'assumere da solo tutte le funzioni di elaborazione di stimoli vestibolari e successivo coordinamento di quelli motori, elaborazione che nei vertebrati inferiori avviene col concorso di due sistemi.

Nella monografia sui nervi encefalici di *Lacerta* sono per la prima volta descritti nei Rettili i due nuclei del nervo cocleare, che denominò anteriore e posteriore. De Lange, Kappers ed altri confermano la descrizione di Beccari; oggi sono denominati magnicellulare ed angolare. In questa stessa specie scopre l'esistenza di fibre che dai nuclei cocleari si portano al cervelletto, accompagnando le fibre provenienti dai nuclei vestibolari. Dimostrò inoltre che nei rettili la radice sensitiva del VII nervo si dirige verso il cervelletto, accompagnando quella dell'VIII.

In via incidentale ha studiato i mutamenti che avvengono nei neuroni sensitivi e viscerali coll'accrescimento somatico. In una grossa tartaruga trova che la superficie del pirenoforo è ricoperta da numerosissimi lobi (forma a testa di medusa). Importante mi sembra la sua osservazione che nella lampreda le cellule dorsali del midollo sono, come quelle dei gangli spinali, negli animali di gran mole, fenestrate; la circostanza che vanno soggette a trasformazioni analoghe a quelle dei gangli sensitivi si accorda coll'interpretazione che le cellule dorsali del midollo siano di natura sensitiva: interpretazione che è del resto oggi da tutti accettata.

In varie memorie Egli si occupa dei caratteri strutturali delle sinapsi interneuroniche. Ho accennato al suo reperto di sinapsi asso-ssoniche. Mediante il confronto tra i caratteri delle sinapsi tra fibre del fascicolo longitudinale posteriore e cellule d'origine del nervo oculomotore comune nel periodo embrionale e nell'adulto, Beccari ha dimostrato che i caratteri della sinapsi si modificano profondamente. Mentre che nell'embrione la fibra afferente assume contatto col pirenoforo del neurone del III nervo, terminando in forma di una coppa molto circoscritta, nell'adulto, in relazione al rilevante aumento di volume del pirenoforo, che si manifesta coll'accrescimento somatico, la fibra afferente si divide in un gran numero di rami intimamente aderenti al pirenoforo; in tal maniera la superficie di contatto diviene più estesa. Un mutamento nei caratteri della sinapsi, ma meno pronunciato, si manifesta pure nella sinapsi tra fibre del nervo vestibolare e le cellule del nucleo tangenziale dei rettili.

Uno dei punti maggiormente discussi, di grande importanza fisiologica, è se nelle sinapsi interneuroniche vi sia continuità o discontinuità materiale. Secondo Beccari, nelle connessioni vestibolo-tegmentali, in quelle tra fibre vestibolari ed i pirenofori dei neuroni di Mauthner, nelle connessioni axo-dendritiche ed axo-ssoniche esistenti in quel neurone, sarebbe interposto uno strato sinaptico non fibrillare, a conferma delle osservazioni di Barthelmez e di Bodian. Più tardi, nella sua monografia « Il problema del neurone » modifica la sua prima ipotesi, ed accetta un altro punto di vista che si avvicina a quello da me esposto molti anni or sono: che in determinati momenti funzionali esista nelle sinapsi un confine fisico, rappresentato da una membrana duplice o forse unica, derivata dalla coalescenza di due membrane e che sarebbe formata da uno strato di molecole superficiali orientate differenzialmente dalle molecole profonde; in breve nelle sinapsi le sostanze neuro-fibrillari di due neuroni sarebbero separate soltanto da uno strato d'ordine di grandezza molecolare.

Nel trattato « Neurologia comparata » emerge la profonda conoscenza che Beccari aveva di tutta l'Anatomia dei centri nervosi. Un'opera analoga apparve quasi contemporaneamente per opera di Arijens Kappers e collaboratori; ma secondo il mio giudizio sebbene il libro di Kappers, più esteso, contenga molte più notizie e sia perfettamente aggiornato, l'opera di Beccari lo supera per chiarezza e per il modo con cui la materia è ordinata. Questo sia detto senza voler diminuire i grandi meriti di Kappers, insigne neuro-

logo, troppo presto scomparso, per il quale anche Beccari aveva la più alta considerazione.

Nel libro di Beccari anche gli argomenti nei quali Egli non aveva esperienza personale, sono discussi con acume e con perfetta conoscenza dell'argomento, ad esempio l'oscuro problema delle vie olfattive e delle relazioni funzionali vicendevoli tra archipallio e paleopallio.

La sua rassegna critica « Il problema del neurone » è un felice tentativo di porre in raffronto in modo esauriente e colla più scrupolosa obiettività i fatti in apparenza discordanti che emergono dagli studi sul sistema nervoso dei vertebrati e degli invertebrati.

Nei suoi studi sulle cellule sessuali Egli affronta principalmente due problemi: l'origine dei gonociti e le condizioni determinanti la persistenza di cellule di sesso opposto in alcune specie di Anfibi.

La prima origine dei gonociti o *protogoni* (denominazione preferita da Beccari) fu da Lui studiata in *Salamandrina perspicillata* ed in *Bufo viridis*. La sua conclusione che le cellule sessuali assumono caratteri citologici specifici in un periodo relativamente inoltrato dello sviluppo e che queste cellule sono per la prima volta riconoscibili, nel mesoderma negli Urodeli, nel contorno dorsale dell'entoderma negli Anuri, per poi spostarsi in questi ultimi secondariamente nelle lamine laterali mesodermiche, è oggi superata, dopo la scoperta di Bonoure: sappiamo infatti oggi che nella rana, come negli uccelli ed in molti altri animali vertebrati ed invertebrati, le cellule sessuali sono riconoscibili per caratteri citologici propri in periodi precocissimi dell'ontogenesi: Bonoure dimostrò infatti che nell'uovo di rana vi è una zona di citoplasma caratterizzata da un addensamento di mitocondri; questa zona durante la segmentazione dell'uovo si segrega in una determinata cellula, la cellula sessuale primordiale.

Tuttora accettabile è invece l'osservazione di Beccari, che precocemente durante la vita larvale, si costituiscono due specie differenti di cellule genitali, i protogoni che persistono senza differenziarsi sin nell'adulto, ed i gonociti larvali, che anticipano nella larva la formazione degli elementi, definitivi e specifici del sesso.

Dai suoi studi sull'organo di Bidder nei Bufonidi il Nostro trae la conclusione, che mentre nei maschi, com'era noto, quest'organo persiste per tutta la vita, nella femmina ad un certo periodo dello sviluppo più non si riconosce, restando incluso nell'ovario definitivo. Le cellule genitali indifferenziate sarebbero negli anfibii fondamentalmente femminili. Quando i fattori determinanti del sesso non fanno sentire la propria influenza, le cellule genitali indifferenziate evolvono secondo il sesso fondamentale e si giunge alla formazione dell'ovaio; quando invece tali fattori intervengono direttamente o indirettamente, attraverso ad uno stadio intersessuato, si giunge alla formazione del testicolo.

La insorgenza di una precoce ovogenesi che porta alla formazione in tutti gli individui di un organo femminile primordiale, sarebbe l'esponente della costante tendenza verso il sesso fondamentale delle cellule genitali,

che per prime si localizzano nella cresta genitale. Invece l'attitudine a cambiare sesso sarebbe posseduta dalle cellule genitali che più tardi si accingono alla medesima funzione (Beccari, 1929).

L'ipotesi di una tendenza dei protogoni, cellule indifferenziate, al viraggio verso il sesso femminile sarebbe secondo Beccari, confermata dai suoi risultati di ricerche compiute più tardi di innesti di testicoli in esemplari adulti di tritone di sesso maschile castrati; nel frammento innestato in via di rigenerazione si formano a spese di protogoni persistenti nella gonade adulta, cellule femminili, le quali pervengono ad una fase inoltrata di accrescimento.

Nel 1950 Egli iniziò la pubblicazione di un trattato di Anatomia comparata dei Vertebrati, il primo in Italia. Finora ne sono apparse due parti. La 1^a tratta della classificazione dei vertebrati e dell'apparato tegumentario; la 2^a è dedicata all'apparato scheletrico. Anche in quest'opera risaltano le segnalate doti di espositore del Beccari. Esprimiamo l'augurio che altri si assumano il non lieve compito di completarla.

Beccari aveva interessi molteplici ed una vasta coltura anche in argomenti estranei alla disciplina da lui professata: per la Zoologia sistematica, per l'Antropologia per la Paleontologia, come risulta da alcuni suoi scritti minori: ad esempio la Nota sopra un getto lapideo di un ungulato della Valdelsa che egli ebbe opportunità di esaminare, e la Nota critica sull'importanza della morfologia cerebrale nella classificazione delle scimmie.

In tutti gli scritti di Beccari redatti in perfetto stile, con chiarezza ed in forma attraente, è riflessa la sua mente lucida, che rifuggiva dalle ipotesi nebuloze; Egli rifuggiva dal parlare di argomenti che non gli erano familiari: pur seguendo il metodo comparativo, si manteneva lontano dalle infatuazioni filogenetiche, alle quali era improntata essenzialmente l'Anatomia comparata del secolo scorso. Mi piace di riferire quanto Egli scrisse nel libro di Neurologia comparata sui mutamenti nei caratteri della corteccia cerebrale nella serie di vertebrati: « Il reperto filogenetico aiuta poco per comprendere l'origine dei sei strati, esistendo un salto dai Sauropsidi ai Mammiferi . . . Appare oggi eccessivo di parlare di evoluzione di un organo nella scala zoologica. Ma non si può disconoscere che molte specie possono essere ordinate in serie tenendo conto complessivamente del grado di differenziamento di alcuni organi, e che in questa serie la forma e la struttura di alcuni organi si corrispondono presentando talora soltanto differenze di complicazione ».

Beccari visse durante il periodo del grandioso rivolgimento nei fini e nei metodi della Morfologia, da descrittiva in causale e sperimentale; rivolgimento iniziato in Germania e che conquistò ben presto molti studiosi anche in Italia. Andrea Giardina nella prolusione che egli tenne al suo corso di Anatomia comparata a Pavia al principio di questo secolo, preconizzò poco meno che l'abolizione dell'Anatomia comparata o più esattamente la sua trasformazione in Morfologia sperimentale.

Il Nostro non fu attratto dal nuovo orientamento della Morfologia. Era ben dotato sia dal punto di vista tecnico che intellettuale, e certamente

Egli avrebbe potuto intraprendere con successo ricerche sperimentali. Non ne abbiamo mai parlato tra noi; ma ritengo che Egli intuisse di essere più adatto a ricerche con metodo descrittivo, piuttosto che ad interpretare i risultati dell'esperimento. E d'altra parte Egli aveva una personalità scientifica troppo pronunziata ed un carattere troppo indipendente per piegarsi a seguire un orientamento diverso da quello per il quale sentiva maggiore inclinazione, anche se questo poteva apparire antiquato.

Certamente Egli non considerò con ostilità le indagini di morfologia sperimentale; ed attenendosi al principio della scuola di Chiarugi, il quale lasciò sempre piena libertà ai suoi collaboratori di scegliere l'argomento da loro preferito, incoraggiò Padoa nelle sue ricerche sperimentali sulla determinazione del sesso nelle larve di Anfibi, le quali ebbero larga eco.

Beccari fu una nobile figura di studioso e di uomo, sdegnoso di futili ambizioni. Egli sentiva intimamente il grande fascino della ricerca scientifica. Poteva apparire a chi non lo conosceva intimamente di carattere freddo. In realtà era un fedele amico. La devozione che aveva per il suo Maestro Giulio Chiarugi appare dal Necrologio che Egli scrisse nel 1945 dopo la liberazione di Firenze. Ai suoi collaboratori era affezionatissimo; e quando Padoa fu perseguitato per ragioni politiche, in un primo tempo continuò a dargli ospitalità nell'Istituto; e quando ciò non fu più possibile fece in modo che fosse accolto alla Stazione zoologica di Napoli.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI.

1907. — *Ricerche sulle cellule e fibre del Mauthner e sulle loro connessioni in pesci ed anfibi (Salmo fario, Salmo irrideus e Salamandrina perspicillata)*, « Arch. it. Anat. Embr. », 6, 660.

1907. — *Contributo all'avifauna nella colonia Eritrea*, « Ann. Museo civico St., nat. » in Genova, ser. 3, vol. 3.

1908. — *Escursione nell'alto bacino del Barca. Gita a Fitfio (Colonia eritrea)* « Riv. geogr. ital. », 15.

1909. — *Le cellule dorsali o posteriori dei ciclostomi*, « Monit. zool. it. », 20.

1909. — *Le ghiandole suborbitali nella Gazella dorcas*, « Monit. zool. it. », 20, 1.

1909. — *Sovra alcuni rapporti del fascicolo longitudinale posteriore con i nuclei dei nervi oculomotore e trocleare dei teleostei*, « Monit. zool. it. », 20, 242.

1910. — *Il lobo parolfattorio dei mammiferi*, « Arch. it. Anat. ed Embr. », 9, 173.

1910. — *Ricerche intorno alle tasche ed ai corpi ghiandolari suborbitali in varie specie di ruminanti. (Anatomia, struttura e sviluppo)*, « Arch. it. Anat. Embr. », 9, 660.

1911. — *La sostanza perforata anteriore ed i suoi rapporti col rinencefalo nel cervello dell'uomo*, « Arch. it. Anat. Embr. », 10, 261.

1911. — *Le strie olfattive nel cervello dell'uomo*, « Monit. zool. it. », 22, 255.

1912. — *La costituzione, i nuclei terminali e le vie di connessione del nervo acustico nella Lacerta muralis*, « Arch. it. Anat. Embr. », 10, 646.

1912. — *La superficie degli emisferi cerebrali dell'uomo nelle regioni prossime al rinencefalo*, « Arch. it. Anat. Embr. », 10, 482.

1913. — *Sulla spettanza delle fibre del Lenhossék al sistema del nervo accessorio e contributo alla morfologia di questo nervo (osservazioni in Lacerta muralis)*, « Arch. it. Embr. », 11, 299.

1914. - *Il IX, X, XI e XII paio di nervi cranici ed i nervi cervicali negli embrioni di Lacerta muralis*, « Arch. Anat. Embr. », 13, 1.
1915. - *Il muscolo traverso del torace e le inserzioni sternocostali del diaframma nell'uomo*, « Arch. it. Anat. Embr. », 12, 110.
1915. - *L'organo tegumentario frontale in larve di Anfibi*, « Arch. it. Anat. Embr. », 13, 379.
1916. - *Gangli simpatici sul decorso di rami del V nervo negli embrioni di rettili*, « Arch. it. Anat. Embr. », 15, 64.
1917. - *Le cellule dei gangli spinali e simpatici di una grossa tartaruga (Testudo calcaruta)*, « Mon. zool. it. », 28, 45.
1919. - *Duplicità delle cellule e delle fibre del Mauthner in un avanotto di trota*, « Monit. zool. it. », 30, 88.
1920. - *Peculiari modalità nelle connessioni di alcuni neuroni del sistema nervoso centrale dei pesci*, « Arch. it. Anat. Embr. », 17, 239.
1921. - *Studi sulla prima origine delle cellule genitali dei vertebrati. - I. Storia delle indagini e stato attuale della questione*, « Arch. it. Anat. Embr. », 18, 157.
1922. - *Studi sulla prima origine delle cellule genitali dei vertebrati. - II. Ricerche sulla Salamandrina perspicillata*, « Arch. it. Anat. Embr. », Suppl. al vol. 18, 29.
1922. - *Studi comparativi sulla struttura del rombencefalo. - I. Nervi spino-occipitali e nervo ipoglosso. - II. Centri tegmentali*, « Arch. it. Anat. Embr. », 19, 123.
1922. - *Lo scheletro, i miotomi e le radici nervose nella regione occipitale degli avanotti di trota*, « Arch. it. Anat. Embr. », 19, 1.
1922. - *I centri tegmentali del rombencefalo*, « Riv. Pat. nerv. ment. », 27, 1.
1922. - *La natura del ganglio ottico basale o ectomammillare dell'Edinger, i fasci discendenti genicolare e pretettale ed i loro nuclei interstiziali nei rettili*, « Monit. zool. it. », 23, 72.
1922. - *Il getto lapideo della cavità endocranica di un ungulato pliocenico della Valdelsa (Toscana)*, « Monit. zool. it. », 23, 147.
1923. - *Primo differenziamento dei nuclei motori dei nervi cranici*, « Mon. zool. ital. », 34, 161.
1923. - *A proposito di una nota del Luna sopra un nucleo a grosse cellule del rombencefalo e sopra i gruppi cellulari del nucleo dell'ipoglosso nel Sus scrofa*, « Mon. zool. it. », 34, 238.
1923. - *Il centro tegmentale ed interstiziale ed altre formazioni poco note nel mesencefalo e nel diencefalo di un rettile*, « Arch. ital. Anat. Embr. », 20, 560.
1924. - *Studi sulla prima origine delle cellule genitali nei vertebrati. - III. Ricerche nel « Bufo viridis »*, « Arch. it. Anat. Embr. », 21, 332.
1925. - *La costituzione del fascio ottico basale dei rettili e la sua probabile importanza nella produzione del riflesso pupillare*. VI Congr. Soc. ital. Neur. Napoli, 5-8 novembre 1923.
1925. - *Ovogenesi larvale; organo di Bidder e differenziazione del sesso nel « Bufo viridis »*, *Studi sulla prima origine delle cellule genitali nei vertebrati*, « Arch. it. Anat. Embr. », 22, 483.
1925. - *Il problema del differenziamento del sesso degli Anfibi*, « Arch. Fisiol. », 23.
1927. - *Odoardo Beccari nel Mar Rosso e tra i Bogos*, « Boll. Soc. Geogr. it. », 11-12.
1928. - *Organo di Bidder e sessualità nei Bufonidi*, « Boll. Soc. it. Biol. sperim. », 3, 660.
1928. - *Rigenerazione testicolare e genealogia delle cellule testicolari in « Triton cristatus »*, « Boll. Soc. it. Biol. sperim. », 3, 669.
1929. - *Osservazioni preliminari sulla rigenerazione degli innesti testicolari nel « Triton crist. »*, « Boll. Soc. Biol. sperim. », 4, 858.
1929. - *Dati e considerazioni sull'organo di Bidder dei Bufonidi (Ulteriori osservazioni su « Bufo viridis »)*, « Arch. it. Anat. Embr. », 26, 273.
1930. - *Differenze di forma e di grandezza in rapporto con l'età nelle terminazioni a coppa del nervo oculomotore dei pesci teleostei*, « Monit. zool. it. », 41, 132.
1930. - *La inversione sperimentale del sesso*, « Atti Soc. Progr. Scienze », 18ª Riunione.
1930. - *I centri tegmentali dell'asse cerebrale dei Selaci*, « Arch. zool. it. », 14, 411.
1930. - *Intorno alla secrezione di pigmento da parte dei corpi ghiandolari cutanei della faccia delle gazzelle e delle antilopi*, « Boll. Soc. it. Biol. sperim. », 5, 83.

1930. — *Il nucleo tangenziale dell'acustico ed il riflesso vestibolo-oculomotorio nei pesci teleostei*, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », 5, 644.
1930. — *Ovociti nella rigenerazione di innesti testicolari eteroplastici omosessuali nel Triton crist.*, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », 5, 791.
1931. — *Studi comparativi sopra i nuclei terminali del nervo acustico nei pesci*, « Arch. zool. it. », 16, 732.
1931. — *Contributo alla miglior conoscenza delle terminazioni centrali del nervo acustico nei pesci*, « Phys. a Neurol. Bladen. Jahrg. », 1934, nn. 3 e 4.
1931. — *Terminazioni a cupola e caliciformi nel nucleo del nervo oculomotore dei pesci teleostei*, « Monit. zool. it. », 41.
1931. — *Terminazioni a cupola e probabile connessione vestibolo-rubra nei teleostei*, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », 6, 375.
1931. — *Sinapsi ed orientamenti neurofibrillari nelle cellule del nucleo vestibolare nei pesci ossei*.
1931. — *La rigenerazione degli innesti in Triton crist. Laur.*, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », 6, 685.
1932. — *Studi comparativi sopra i nuclei terminali del nervo acustico nei Pesci*, « Atti II. Congr. intern. Zoologia, Arch. zool. ital. ».
1932. — *A proposito di nomenclatura delle cellule genitali degli Anfibi*, Suppl. al vol. 42, « Monit. zool. it. », 89.
1932. — *Seconda lettera del Prof. Nello Beccari dalla Gujana britannica*, « Boll. R. Soc. Geogr. », ser. II, IX, 515.
1933. — *Cellule genitali femminili nella rigenerazione sperimentale del testicolo degli Anfibi*, Suppl. al vol. 44, « Monit. zool. ital. », 288.
1933. — *Existe il un noyau rouge chez les poissons téléostéens?*, « C. r. Assoc. Anat. », 28^e Réunion Lisbonne, 51.
1934. — *Connessioni nervose e strato sinaptico*, Suppl. al vol. 45, « Monit. zool. ital. », 36.
1934. — *Osservazioni sulla struttura della testa nella lieve duplicità anteriore di un avanotto di trota*, « Arch. it. Anat. Embr. », 33, 14.
1934. — *Intorno all'esistenza di uno strato sinaptico nelle connessioni di alcuni neuroni nei Pesci*, « Monit. zool. it. », 45, 220.
1934. — *Contributi alla miglior conoscenza delle terminazioni centrali del nervo acustico nei Pesci*, « Psych. en Neur. Blaaden Jahrgang. », 1931.
1934. — *Corde dorsale, hypophyse et sac vasculaire dans la legere duplicité antérieure d'un alevin de rutite*, « C. r. Assoc. anat. », 29^e Reunion Bruxelles 25-28 Mars 1934.
1942. — *Revisione del problema del nervo accessorio (con nuove osservazioni nei teleostei)*, « Arch. it. An. Embr. », 47, 7.
1943. — *Ameranthr Popoides Loysi, gli Atelini e l'importanza della morfologia cerebrale nella classificazione delle scimmie*, « Arch. Antr. Etnol. », 73, 1.
1943. — *Neurologia comparata anatomo-funzionale dei vertebrati compreso l'uomo*, 771 p., 429 figure. Sansoni Ediz. scientif., Firenze.
1945. — *La vita e l'opera di Giulio Chiarugi*, « Arch. it. Anat. Embr. », 50, 232.
1944. — *Il problema del neurone*. — P. I. *Le differenti teorie della struttura fondamentale del sistema nervoso, Problemi di Scienza*, 1^o « La Nuova Italia », Firenze; *Il problema del neurone*. — P. 2^a. *Il problema generale negli invertebrati e quello di alcune sinapsi dei vertebrati*. — *Problemi di Scienza*, 5^o « La Nuova Italia », Firenze.
1950. — *I problemi biologici del sesso in generale*. — *Introduzione*, « Accad. naz. Lincei. — Problemi attuali di scienza e di cultura » Quaderno, n. 22, Roma 1950.
1951. — *Anatomia comparata dei vertebrati*. — I. *Classificazione dei vertebrati. Apparecchio tegumentario*, 265 p. 131 fig, Sansoni Edizione scientifiche, Firenze; II. *Apparecchio scheletrico*, 489 p. 326 fig., Sansoni Edizioni scientifiche Sansoni Firenze.
1954. — *Osso e cartilagine nella evoluzione dello scheletro dei vertebrati*, « Gazeta medica portuguesa », 7, 147.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente comunica che, su richiesta del prof. Ezio Falla Caravino, si deve procedere all'apertura del plico suggellato consegnato all'Accademia dal professore stesso in data 17 dicembre 1955, contenente, come risulta da un sommario applicato sulla busta, uno studio dal seguente titolo: « Relazione scientifica alla Accademia Nazionale dei Lincei di Ezio Falla Caravino - Teoria generale della Esponenzialità - Sintesi: Le potenze spaziali (potenza zero); Afisicità e atermia dello spazio; Natura della 'energia'; L'esponente unitario termico e sue leggi; Il magnetismo universale; L'elettricità; La 'luce'; Raggi cosmici; Processo al sole. Concetti nuovi di fisica generale raccolti dall'autore in due volumi dai titoli: Vol. I - L'armonia universale in rapporto ad un ordinamento matematico. Vol. II - La natura mi ha parlato ».

Detto plico, in conformità della prassi accademica, fu presentato alla Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali nella seduta ordinaria del 14 gennaio 1956 e, dopo la verifica dell'integrità dei suggelli da parte della Classe stessa, trasmesso all'archivio accademico per essere conservato a disposizione dell'autore. Con lettera in data 30 dicembre 1957, il prof. Falla Caravino ha rivolto istanza all'Accademia per l'apertura del citato plico, al fine di far constatare la priorità di una sua scoperta scientifica. Detto professore, con la citata lettera del 30 dicembre, chiedeva però che, dopo l'apertura del plico per la constatazione di quanto sopra, il plico stesso venisse risuggellato in considerazione del fatto che la relazione in esso contenuta si riferisce anche ad altre nuove leggi che l'autore non intende rendere ancora note. La Presidenza rispondeva di essere senz'altro disposta a procedere all'apertura del plico, ma di non poter accedere alla richiesta di risuggellare successivamente lo stesso, essendo evidente che, una volta effettuata l'apertura, vengano meno quelle garanzie di assoluta segretezza che caratterizzano appunto i plichi suggellati, garanzie che non potrebbero, come è ovvio, essere ripristinate da una nuova risuggellatura.

Il prof. Falla Caravino, preso atto della risposta della Presidenza, ha presentato istanza, con lettera in data 9 corrente, per l'apertura del plico in conformità della prassi accademica, rinunciando cioè alla successiva risuggellatura.

Ciò premesso, il Presidente Giordani, constatata l'integrità dei suggelli, con l'assistenza del Segretario Accademico prof. Signorini, dà inizio alle operazioni per l'apertura del plico, alla presenza dei Soci dell'Accademia e del pubblico, nel cui settore ha preso posto il prof. Falla Caravino.

Aperto il plico, il Presidente annunzia che nello stesso sono contenuti i seguenti tre fascicoli:

a) 1 fascicolo dal titolo: « Relazione scientifica alla Accademia Nazionale dei Lincei di Ezio Falla Caravino - Sintesi: Le potenze spaziali (potenza zero); Afisicità e atermia dello spazio; Natura della 'energia'; L'espo-

nente unitario termico e sue leggi; Il magnetismo universale; L'elettricità; La 'luce'; Raggi cosmici; Processo al sole. Concetti nuovi di fisica generale raccolti in due volumi dai titoli: Vol. I - L'armonia universale in rapporto ad un ordinamento matematico. - Vol. II - La natura mi ha parlato ».

Detto fascicolo consta di 74 pagine dattiloscritte che sono tutte numerate e firmate dal Presidente e contrassegnate con il timbro tondo dell'Accademia.

b) 1 fascicolo dal titolo: «Processo al 'Sole' - La grande teoria solare».

Detto fascicolo consta di 18 pagine dattiloscritte che sono tutte numerate e firmate dal Segretario Accademico prof. Signorini e contrassegnate con il timbro tondo dell'Accademia.

c) 1 fascicolo contenente delle tavole che, secondo la numerazione a matita apposta dall'autore, sarebbero 15 ma che, in realtà, risultano 14, in quanto manca la tavola n. 13.

Detto fascicolo consta di 14 pagine, che sono tutte numerate e firmate dal Presidente Giordani e contrassegnate con il timbro tondo dell'Accademia.

Il Presidente comunica che i sopra citati studi saranno trasmessi, per la verifica del contenuto, ad una apposita Commissione che la Classe nominerà oggi stesso in seduta segreta.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente informa i Colleghi che il Socio G. Levi ha predisposto e inviato all'Accademia il testo della commemorazione del compianto prof. Beccari ma che, purtroppo, a causa di una grave operazione alla quale si è dovuto recentemente sottoporre, non ha avuto la possibilità di intervenire alla seduta e ha quindi rivolto preghiera al Collega Cotronei di voler leggere la citata commemorazione.

Il Presidente desidera formulare, per il Socio Levi, un vivo ringraziamento e l'affettuoso augurio dell'intera Classe e suo personale per una sollecita e felice guarigione, in modo che egli possa riprendere, il più presto possibile, quella fervida e mirabile attività che l'ha sempre caratterizzato.

Il Socio Cotronei, prima di leggere il testo della commemorazione predisposta dal prof. Levi, pronuncia le seguenti parole:

«Leggerò io la dotta commemorazione che il Collega prof. Giuseppe Levi aveva approntata con così sollecito spirito di memore amicizia verso Nello Beccari. Mi sia consentito che io esprima a nome di tutti noi fervidi voti per la salute di Levi, impossibilitato oggi a essere presente. Tutti noi, anche quelli che qualche volta da lui dissentirono, sentiamo profonda ammirazione per lo scienziato illustre, per il Maestro impareggiabile, per il cittadino esemplare che tutta la sua vita dedicò al culto del vero e del giusto.

E prima che io presti la mia voce alla parola del Levi, desidero esprimere il rimpianto, tuttora cocente, a nome dei zoologi, degli anatomi-com-

parati, e posso ben dire, di tutti i biologi italiani, per la perdita irreparabile di Nello Beccari. Mi si consenta anche di rievocare la lunga amicizia che a Lui mi legava.

Sentirete ora parlare del suo indirizzo scientifico; poteva sembrare che l'apparente differenza dei nostri indirizzi ci rendesse estranei l'uno all'altro, ma non fu così: proprio gli anni passati all'Accademia servirono a farci meglio conoscere.

Nello Beccari sentì l'influenza scientifica di Chiarugi, di Levi, di Edinger; ma come tutti gli uomini dotati di una forte potenziale personalità seppe trovare, e non tardi, una via propria: si servì del metodo di Cajal, fattogli conoscere da Levi per approfondire le ricerche di Giulio Chiarugi sui nervi cranici, indagini che culminarono nei mirabili studi sul sistema tegmentale dei Vertebrati inferiori.

Il Beccari si valse del metodo comparativo; ma questo metodo non conosce tramonti, perché è, e sarà sempre, tanta parte di ogni processo conoscitivo.

Io che, modestamente, ho coltivato coi miei allievi l'indirizzo morfologico sperimentale, sono convinto che a torto si è voluto vedere in questo indirizzo una sostituzione o, peggio, un annullamento di quello morfologico-comparato; le mie personali ricerche sui trapianti tra forme lontane di anfibi mi chiarirono quanto fosse necessario, in quei casi, l'integrare la comparazione con la ricerca sperimentale. Nel ricordo della feconda opera di Beccari è opportuno esortare i giovani ricercatori, che si accingono con ragione a seguire i nuovi indirizzi biologici, a non svalutare la tradizione morfologico-comparata.

E in quest'aula, dove noi lo vedemmo per dieci anni assiduo ai nostri lavori, voglio rievocare il prezioso contributo di saggezza, di equilibrio, di onesta valutazione che Nello Beccari sempre recò nella sua attività accademica: nelle molte relazioni, specialmente dei concorsi a premi, dove sempre la sua serena parola seppe avere, per la profonda stima che di lui si aveva, una decisiva, benefica influenza ».

Il Socio Cotronei legge quindi il testo della commemorazione.

Alla cerimonia assistono i proff. Galgano e Mazzi, rispettivamente dell'Università di Napoli e di Torino, discepoli del compianto scienziato, mentre hanno inviato messaggi di adesione il fratello di Lui anche a nome della vedova, attualmente in Scozia, il prof. Padoa dell'Università di Firenze, anch'egli discepolo del Beccari, e numerosi Soci dell'Accademia.

Il Presidente ringrazia il prof. Cotronei e si rende ancora una volta interprete dei sentimenti di cordoglio dell'Accademia per la scomparsa dell'insigne Collega.

Il Presidente propone di inviare messaggi di augurio ai Colleghi Casisin e Cantelli, che sono stati malati ma che ben presto potranno nuovamente partecipare alle tornate accademiche.

La Classe si associa.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Colonnetti presenta il III volume della sua opera: «Scienza delle Costruzioni», che si riferisce a una categoria di problemi i quali, per la loro intrinseca complessità, non possono venire trattati con i metodi dell'analisi matematica, illustrati nei due precedenti volumi, e che sono stati affrontati, con risultati veramente brillanti, da pionieri arditamente cimentatisi nella nuovissima tecnica. Il volume contiene saggi dell'arch. Pier Luigi Nervi, del prof. Eduardo Torroja e del prof. Guido Oberti e, alla fine, un lavoro dello stesso Socio Colonnetti dal titolo: «Saggio di impostazione generale del problema dell'equilibrio delle pareti sottili».

Il Socio Tonzig presenta il V volume dei «Lavori dell'Istituto Botanico dell'Università di Milano». Il volume contiene una raccolta di estratti di lavori pubblicati, in Riviste e in Atti di Accademie, nel 1956: il presentatore si augura che il loro contributo al progresso della Fisiologia vegetale sia pari alla favorevole accoglienza ch'essi hanno avuto da parte dei cultori di tale disciplina.

Il Socio Margaria presenta l'VIII edizione della sua opera sui «Principii di chimica e fisico-chimica fisiologica».

Il Presidente ringrazia i Soci che hanno offerto opere in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Signorini, Picone, Chisini, Segre, Bonino, Rossi-Fanelli, Cambi, Pupilli, Puntoni, Cotronei, Chain, Natta e Caglioti.

Il Socio Picone presenta una Memoria del prof. Ennio De Giorgi dal titolo: «Sulle proprietà isoperimetriche dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata secondo Caccioppoli di misura finita».

Per l'esame di detta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Picone e dal Collega Caccioppoli.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

KRALL G. — Stabilità trasversale degli archi da ponte Nota I.

BIOCCA E. e FERRETTI G. — Un nuovo trematode: *Dollfusinus frontalis* gen. nov. et spe nov. parassita dei seni naso-frontali di *Erinaceus europaeus* (pres. dal Socio V. PUNTONI).

CHABAUD A. — Osservazioni sulla classificazione del sottordine *Strongylina* e creazione di una nuova sotto-famiglia: *Archeostrongylinae* (pres. dal Socio V. PUNTONI).

DRAGOS L. — Sur un mouvement fluide barotrope (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

TALLINI G. – Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti. Nota II (pres. dal Socio B. SEGRE).

THEODORESCU R. – Sur certains processus à liaisons complètes (pres. dal Socio M. PICONE).

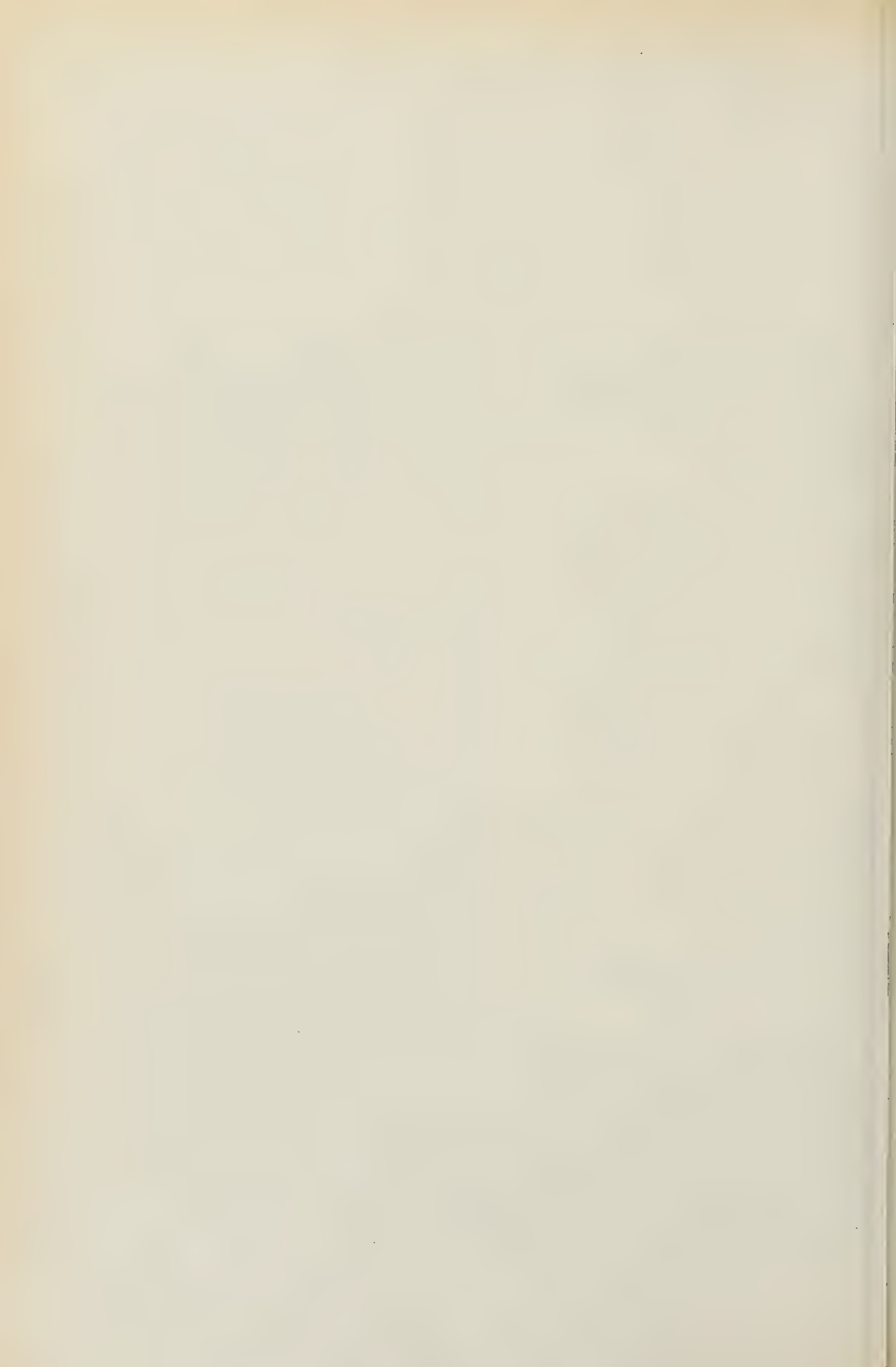
COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente Giordani dà notizia del Symposium sull'aerodinamica e l'aeroterminica dei gas rarefatti, che avrà luogo a Nizza dal 2 al 5 luglio 1958. Comunica quindi che giovedì 23 corrente, alle ore 17,30, sarà inaugurata nella Sala accademica di S. Cecilia, un ciclo di conferenze, dirette ad integrare su argomenti specifici la cultura artistica e musicale, organizzato da quell'Accademia d'intesa con il nostro Sodalizio e con l'insigne Accademia Nazionale di San Luca.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 11 gennaio 1958

- ARCIDIACONO Giuseppe e ARCIDIACONO Salvatore. — *Visione unitaria dell'universo alla luce delle teorie di Luigi Fantappiè*. Roma, Edizione dell'Unione Italiana Insegnanti Medi, 1958. Pp. 72, in-8° (Luce nella Professione, 21).
- ARCIDIACONO Salvatore. — Vedi: ARCIDIACONO Giuseppe e ARCIDIACONO Salvatore.
- BEATTY W. B. and LANGAN Lee. — *Sources of information on Geology and Mining in the Western States*. Stanford, Stanford University School of Mineral Sciences, 1957. Pp. 52, in-4° (In ciclostile).
- COLONNETTI Gustavo. — *Scienza delle costruzioni*. Vol. III: *La tecnica delle costruzioni: le pareti sottili*. Realizzazioni di P. L. Nervi, E. Torroja e G. Oberti. Torino, Ed. Scientifiche Einaudi, 1957. Pp. 123, in-8°, con figg. (Manuali. Serie di Ingegneria).
- CONGRESUL NATIONAL DE ŞTIINŢE MEDICALE. 5-11 MAI 1957. — *Lucrările. I: Rapoarte*. Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1957. Pp. VIII — monografie con impag. propria (Ministerul Sănătăţii. Societatea Ştiinţelor Medicale).
- KÜSTER Ernst. — *Erinnerungen eines Botanikers*. Giessen, Brühlesche Universitätsdruckerei, s. d. Pp. 456, in-8°.
- LANGAN Lee. — Vedi: BEATTY W. B. and LANGAN Lee.
- Lavori dell'Istituto Botanico dell'Università di Milano. Vol. V, 1956. [Volume miscelaneo composto di opuscoli numerati da 119 a 145 preceduti dagli indici di questo e dei precedenti volumi].
- LOTZE Franz. — *Geotektonisches Symposium zu Ehren von Hans Stille als Festschrift zur Vollendung seines 80. Lebensjahres*. Überreicht von der Deutschen Geologischen Gesellschaft, der Geologischen Vereinigung und der Paläontologischen Gesellschaft. Stuttgart, Kommissions-Verlag von Ferdinand Enke, 1956. Pp. XX-483, in-8°, con figg. e tavv.
- MARGARIA Rodolfo. — *Principi di chimica e fisico-chimica fisiologica*. 8ª ed. Milano, Casa Ed. Ambrosiana, 1958. Pp. XVI-682, in-8°.
- MÉHES Kálmán. — *Radiogeológia és radiometria*. Budapest, 1957. Pp. 144, in-8°, con figg. (A Magyar Állami Földtani Intézet Kiadványa).
- NERVI Pier Luigi. — Vedi: COLONNETTI Gustavo.
- OBERTI Guido. — Vedi: COLONNETTI Gustavo.
- PANIN S. — *Coleoptera familia scarabaeidae*. Bucureşti, Academia Republicii Populare Romîne, 1957. Pp. 315, in-8°, con tavv. (Fauna Republicii Populare Romîne. Insecta, vol. X, fasc. 4).
- PARK Charles F. (Jr.). — *The zonal theory of ore deposits*. Estr. da «Economic Geology». Fiftieth Anniversary Volume, 1955.
- POMINI Luigi e TIBALDESCHI Cesare. — *Micologia pedemontana*. Vercelli, 1956. Pp. 97, in-8°, con figg. (Collana Culturale Scientifica dell'Istituto Tecnico Agrario di Vercelli, n. 5).
- ROSSINI Angelo. — *Determinazione delle dimensioni di tutte le grandezze elettriche e magnetiche nel sistema LMT. — Il potenziale degli ioni e la spiegazione della forza elettromotrice Voltaica*. Vetralla, Tip. Gerardi-Alessandrini, 1957. Pp. 9, in-4°.
- TIBALDESCHI Cesare. — Vedi: POMINI Luigi e TIBALDESCHI Cesare.
- TORROJA Eduardo. — Vedi: COLONNETTI Gustavo.



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 febbraio 1958

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Chimica. — *Polimorfismo del tricloruro di titanio cristallino* (*).

Nota di GIULIO NATTA, PAOLO CORRADINI, IVANO WALTER BASSI e LIDO PORRI presentata (**) dal Socio G. NATTA.

Nel quadro delle ricerche svolte nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano sulla polimerizzazione stereospecifica delle olefine e delle diolefine si è avuto modo di approfondire lo studio del sistema catalitico alluminioalchili-tricloruro di titanio.

È stato osservato che, a seconda del modo in cui il tricloruro di titanio viene preparato, si ottengono catalizzatori che presentano, in presenza di alluminioalchili, diversa attività stereospecifica. Ciò è particolarmente evidente nel caso delle diolefine. Per esempio, nella polimerizzazione dell'isoprene si ottengono polimeri che hanno una struttura altamente regolare con concatenamento delle unità monomeriche 1-4 trans (come nella guttaperca naturale) quando il tricloruro di titanio viene preparato per riduzione del tetracloruro di titanio con idrogeno a 800-900°, mentre si ottengono polimeri con concatenamento delle unità monomeriche 1-4 cis (come nella gomma naturale), quando il $TiCl_3$ viene preparato per reazione del $TiCl_4$ con alluminioalchile in soluzione idrocarburica [1].

Questi fatti ci hanno indotto a prendere in esame il problema di un possibile polimorfismo del tricloruro di titanio, da cui potesse dipendere la differente stereospecificità dei sistemi catalitici esaminati.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano con il contributo della Società Montecatini.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

I risultati del nostro studio ci hanno portato alla messa a punto della preparazione di tre forme allotropiche del TiCl_3 allo stato puro, che ci è stato possibile caratterizzare attraverso gli spettri ai raggi X, riportati nella Tabella I.

TABELLA I.

Descrizione degli spettri ai raggi X (Cu $K\alpha$) delle tre forme allotropiche di TiCl_3 .

Forma α			Forma β			Forma γ		
Int.	2θ	$d(\text{\AA})$	Int.	2θ	$d(\text{\AA})$	Int.	2θ	$d(\text{\AA})$
<i>f</i>	15,00	5,91	<i>f</i>	16,30	5,43	<i>m</i>	15,00	5,91
<i>md</i>	30,50	2,93	<i>dd</i>	30,90	2,89	<i>d</i>	16,90	5,24
<i>ff</i>	32,90	2,72	<i>mf</i>	32,50	2,76	<i>ddd</i>	19,30	4,60
<i>mf</i>	42,60	2,12	<i>dd</i>	34,95	2,57	<i>ddd</i>	29,80	3,00
<i>ddd</i>	45,70	1,99	<i>m</i>	42,30	2,14	<i>d</i>	30,40	2,94
<i>m</i>	51,40	1,78	<i>dd</i>	46,00	1,97	<i>md</i>	32,80	2,73
<i>d</i>	53,80	1,70	<i>d</i>	50,50	1,81	<i>mf</i>	35,60	2,52
<i>md</i>	55,70	1,65	<i>dd</i>	55,10	1,67	<i>ddd</i>	36,90	2,44
<i>ddd</i>	61,00	1,52	<i>dd</i>	61,15	1,52	<i>ddd</i>	38,40	2,34
<i>d+</i>	62,40	1,49	<i>ddd</i>	64,30	1,45	<i>d</i>	42,50	2,13
<i>d+</i>	63,40	1,47	<i>ddd</i>	67,50	1,39	<i>dd</i>	46,00	1,97
<i>d</i>	68,90	1,36	<i>ddd</i>	83,00	1,16	<i>mf</i>	51,40	1,78
<i>d</i>	79,20	1,21	<i>ddd</i>	85,30	1,14	<i>d</i>	53,90	1,70
<i>d</i>	84,80	1,14	<i>ddd</i>	90,50	1,09	<i>dd</i>	55,40	1,66
<i>md</i>	85,90	1,13				<i>dd</i>	60,80	1,52
<i>dd</i>	89,00	1,10				<i>d+</i>	63,00	1,48
<i>d</i>	90,80	1,08				<i>dd</i>	64,00	1,46
						<i>dd</i>	75,30	1,26
						<i>d+</i>	85,80	1,13

Indicheremo nel seguito del lavoro tali forme come α , β , γ .

PREPARAZIONE DELLE FORME POLIMORFE DEL TiCl_3 ALLO STATO PURO.

Forma α . - Il classico metodo per riduzione del TiCl_4 con H_2 a 800-900° dà un prodotto di colore violetto che, secondo le nostre analisi ai raggi X, è costituito dalla forma α praticamente pura.

Forma β . — Un metodo di preparazione di questa forma, di colore bruno marrone, è fornito dall'azione di scariche oscure su una miscela gassosa di idrogeno e TiCl_4 , secondo quanto descritto da F. Böck e L. Moser nel 1912 [2]. Il prodotto ottenuto per questa via risulta di frequente impuro per TiCl_2 .

Prodotti, contenenti la modificazione β , possono essere ottenuti per reazione tra quantità equimolecolari di alluminotriacilchile e TiCl_4 . È opportuno condurre la reazione in soluzione idrocarburica, aggiungendo gradualmente alla soluzione, tenuta in agitazione, del TiCl_4 la soluzione dell'alluminotriacilchile. Invece di quest'ultimo può essere usato alluminodiacilchilmonocloruro, in eccesso di almeno due volte rispetto alla quantità stechiometrica di TiCl_4 . Il tricloruro di titanio ottenuto per questa via risulta però impuro per piccole quantità di alluminocloroalchili adsorbiti, come rivela l'analisi chimica.

La forma β allo stato chimicamente puro è stata da noi ottenuta per decomposizione del TiCl_3CH_3 , composto che è stato recentemente descritto [3], e che può essere isolato allo stato puro, per distillazione sotto vuoto dai prodotti di alchilazione del TiCl_4 con $\text{Al}(\text{CH}_3)_3$.

Il TiCl_3CH_3 si decompone lentamente a temperatura ambiente, dando un precipitato costituito da TiCl_3 . Noi abbiamo osservato che se la decomposizione avviene in soluzione idrocarburica (o in un altro solvente inerte) il TiCl_3 che si forma è costituito dalla forma β pura.

Forma γ . — Riscaldando a $250\text{--}300^\circ$ per 2–3 ore, in ambiente di gas inerte la forma β , di colore marrone, si ottiene la trasformazione di questa ultima nella forma γ che appare di colore violetto, come la α .

La forma γ può anche essere ottenuta direttamente per decomposizione del TiCl_3CH_3 . Abbiamo infatti osservato che se quest'ultimo viene lasciato a temperatura ambiente, allo stato puro e non disciolto in un solvente, il TiCl_3 che si ottiene non risulta costituito dalla forma β , ma dalla forma γ . Quest'ultimo metodo dà però risultati non sempre ripetibili perché si ottengono talvolta miscele della forma β e della forma γ , sia pure con larga prevalenza di quest'ultima.

Il primo metodo, per riscaldamento della forma β , è pertanto da preferirsi.

POLIMORFISMO DEL TiCl_3 .

Lo spettro X della forma α è già stato descritto da Klemm [4] nel 1947, ed è stato interpretato attribuendo al TiCl_3 un reticolo a strati, derivabile da un impacchettamento esagonale compatto di atomi di cloro, nel quale gli atomi di titanio si sistemano in strati, succedentisi ogni due strati di atomi di cloro, perpendicolarmente alla direzione dell'asse ternario.

La cella elementare risultante (fig. 1) ha costanti $a = b = 6,12 \text{ \AA}$, $c = 17,50 \text{ \AA}$, $\gamma = 120^\circ$, gruppo spaziale $R\bar{3}$ con gli atomi di titanio in $0; 0; 1/3$ e gli atomi di cloro in $1/3; 0; 0,079$.

La interpretazione dello spettro fornito dalla forma β , non ancora descritto in letteratura, è risultata facilitata dal fatto che un caso analogo di polimorfismo è stato recentemente dimostrato da Klemm per il tribromuro di titanio.

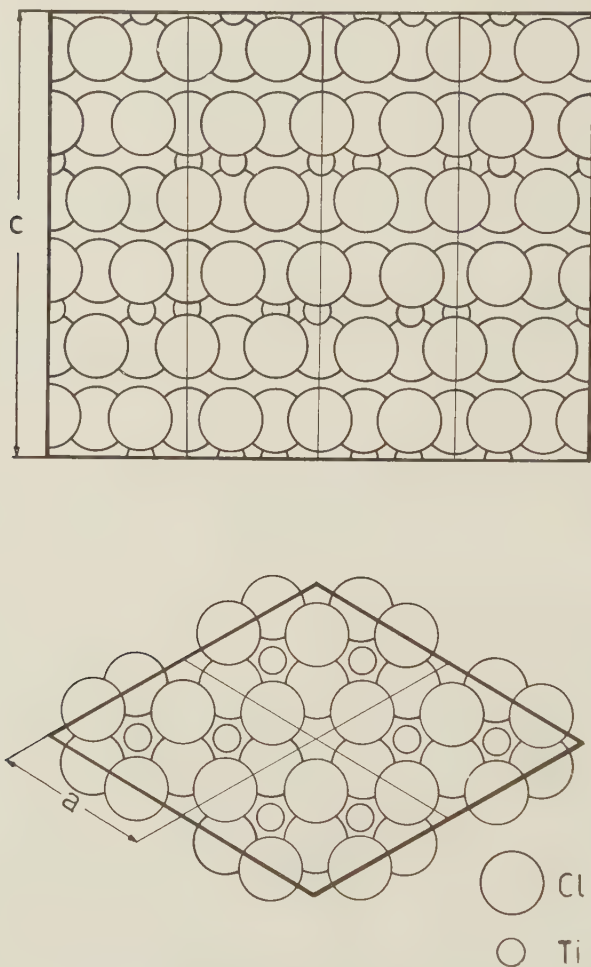


Fig. 1. - Modello della struttura della forma α del TiCl_3 .

Questo autore ha descritto la struttura di una modificazione del TiBr_3 , blu-scura a forma di lamelle ad habitus esagonale, in tutto analoga a quella del TiCl_3 violetto, e quella di una modificazione nera del TiBr_3 [5] a forma di aghetti.

La struttura della modificazione nera del TiBr_3 può essere derivata in prima approssimazione dall'impacchettamento esagonale compatto di atomi di alogeno (esistente nella forma violetta), per addensamento delle molecole di TiCl_3 in filari paralleli all'asse ternario.

In entrambe le forme α e β la coordinazione degli atomi di alogeno attorno al titanio è ottaedrica, ma il modo di sistemarsi tra loro degli atomi

di titanio e quindi le distanze di massimo avvicinamento relativo risultano nei due casi completamente differenti.

Klemm ha ammesso [5], anche per il tricloruro di titanio, l'esistenza di due modificazioni cristalline diverse ed in particolare di una forma bruna, analoga a quella corrispondente del tribromuro, che non ci risulta però ulteriormente descritta.

A noi è stato possibile interpretare interamente lo spettro fornito dalla forma β bruna del TiCl_3 sulla base di una cella esagonale con costanti $a = 6,27 \text{ \AA}$, $c = 5,82 \text{ \AA}$ contenenti due molecole, in tutto analoga a quella descritta da Klemm per il tribromuro di titanio.

TABELLA II.

Confronto fra le distanze reticolari calcolate ed osservate della forma β del TiCl_3 .

hkl	$d_{\text{calc.}} (\text{\AA})$	$d_{\text{oss.}} (\text{\AA})$	hkl	$d_{\text{calc.}} (\text{\AA})$	$d_{\text{oss.}} (\text{\AA})$	hkl	$d_{\text{calc.}} (\text{\AA})$	$d_{\text{oss.}} (\text{\AA})$
0001	5,82	ass. sist.	20 $\bar{2}$ 3	1,58	ass. sist.	22 $\bar{4}$ 3	1,22	—
10 $\bar{1}$ 0	5,43	5,43	22 $\bar{4}$ 0	1,57	—	21 $\bar{3}$ 4	1,19	—
10 $\bar{1}$ 1	3,98	ass. sist.	30 $\bar{3}$ 2	1,54	—	31 $\bar{4}$ 3	1,19	—
11 $\bar{2}$ 0	3,14	—	22 $\bar{4}$ 1	1,51	1,52	41 $\bar{5}$ 0	1,19	—
0002	2,91	2,89	31 $\bar{4}$ 0	1,51		0005	1,16	ass. sist.
11 $\bar{2}$ 1	2,76	2,76	31 $\bar{4}$ 1	1,46	1,45	41 $\bar{5}$ 1	1,16	1,16
20 $\bar{2}$ 0	2,71	—	0004	1,46		32 $\bar{5}$ 2	1,15	
10 $\bar{1}$ 2	2,57	2,57	10 $\bar{1}$ 4	1,41	—	10 $\bar{1}$ 5	1,14	ass. sist.
20 $\bar{2}$ 1	2,46	ass. sist.	21 $\bar{3}$ 3	1,41	—	30 $\bar{3}$ 4	1,14	1,14
11 $\bar{2}$ 2	2,13	2,14	22 $\bar{4}$ 2	1,38	1,39	40 $\bar{4}$ 3	1,11	ass. sist.
21 $\bar{3}$ 0	2,06	—	40 $\bar{4}$ 0	1,36	—	41 $\bar{5}$ 2	1,10	—
20 $\bar{2}$ 2	1,99	1,97	31 $\bar{4}$ 2	1,34	—	11 $\bar{2}$ 5	1,09	1,09
21 $\bar{3}$ 1	1,94	—	30 $\bar{3}$ 3	1,32	ass. sist.	50 $\bar{5}$ 0	1,09	—
0003	1,94	ass. sist.	40 $\bar{4}$ 1	1,32	ass. sist.	20 $\bar{5}$ 0	1,07	—
10 $\bar{1}$ 3	1,83	ass. sist.	11 $\bar{2}$ 4	1,32	—	22 $\bar{4}$ 4	1,07	—
30 $\bar{3}$ 0	1,81	1,81	20 $\bar{2}$ 4	1,28	—	50 $\bar{5}$ 1	1,07	ass. sist.
30 $\bar{3}$ 1	1,73	ass. sist.	32 $\bar{5}$ 0	1,25	—	31 $\bar{4}$ 4	1,05	—
21 $\bar{3}$ 2	1,68	1,68	40 $\bar{4}$ 2	1,23	—	32 $\bar{5}$ 3	1,05	—
11 $\bar{2}$ 3	1,65	1,68	32 $\bar{5}$ 1	1,22	—			

Il rapporto assiale risulta $c/a = 0,928$, che è minore di quello, $0,943 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, che si avrebbe nel caso che gli atomi di alogeno formassero un reticolo esagonale compatto.

È stato scelto il gruppo spaziale D_{6h}^3 ($C 6/mcm$), come quello a più alta simmetria compatibile con i nostri dati sperimentali. Esso richiede l'estinzione dei riflessi di tipo h o l con $l \neq 2n$, nessuno dei quali è stato da noi osservato.

Nella Tabella II è dato un confronto tra distanze reticolari osservate e distanze reticolari calcolate per questa forma.

Lo spettro della forma γ , di colore violetto come la α , non è stato da noi ancora interpretato, ma probabilmente proviene, come per la forma α , da un reticolo a strati.

Diamo nella Tabella III un quadro riassuntivo, comprendente dati nostri e dati di Klemm, delle costanti reticolari e delle forme allotropiche ora note degli alogenuri di titanio.

TABELLA III.

Confronto fra le costanti reticolari di alcune forme allotropiche di trialogenuri di titanio.

TiCl ₃		TiBr ₃		TiI ₃
α	β	α	β (*)	β (*)
C_{3i}^2	D_{6h}^3	C_{3i}^2	D_{3h}^3	D_{3h}^3
$a = b = 6,12$	$a = b = 6,27$	$a = b = 6,4$	$a = b = 6,68$	$a = b = 7,12$
$c = 17,50$	$c = 5,82$	$c = 18,7$	$c = 6,12$	$c = 6,48$
$\frac{c}{a} = 2,86$	$\frac{c}{a} = 0,928$	$\frac{c}{a} = 2,89$	$\frac{c}{a} = 0,916$	$\frac{c}{a} = 0,910$
$d_x = 2,71$	$d_x = 2,59$	$d_x = 4,22$	$d_x = 4,04$	$d_x = 5,00$

(*) Dati comunicati dal prof. W. Klemm al Congr. Int. di Chimica Pura ed Applicata, Parigi 1957.

STRUTTURA DELLA FORMA β DEL TiCl₃.

La struttura delle forma β è risultata completamente interpretabile in analogia alla struttura fibriforme proposta da Klemm per il TiBr₃ nero.

In un primo calcolo delle intensità abbiamo supposto gli atomi di cloro nelle posizioni corrispondenti a un reticolo esagonale compatto e cioè in $x = 1/3$, $z = 1/4$, mentre gli atomi di titanio erano posti in $x = 0$, $z = 0$, nel gruppo spaziale D_{6h}^3 [6].

Già da questo primo calcolo l'accordo era risultato abbastanza soddisfacente. Un netto miglioramento si è avuto spostando gli atomi di cloro in $x = 0,315$, $z = 1/4$ (fig. 2).

Riportiamo l'accordo che risulta da questa ipotesi tra intensità calcolate e intensità osservate nella Tabella IV.

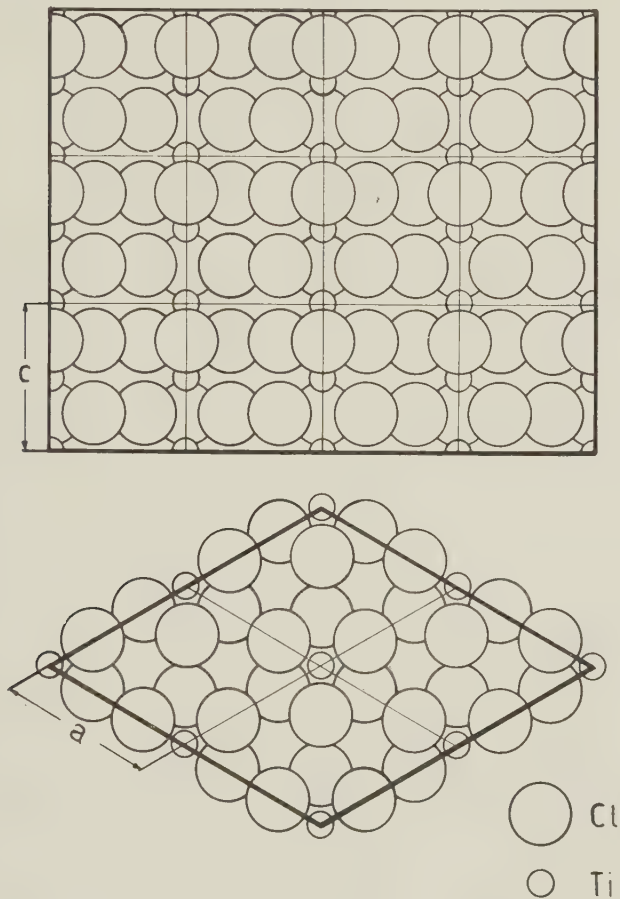
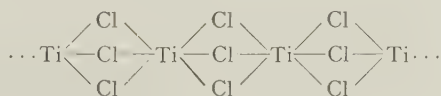


Fig. 2. - Modello della struttura della forma β del TiCl_3 .

Le distanze $\text{Ti}-\text{Cl}$ risultano uguali a $2,45 \text{ \AA}$, (da confrontare con la distanza $2,46 \text{ \AA}$ nella forma α e di $2,21 \text{ \AA}$ nel TiCl_4), mentre le distanze $\text{Cl}-\text{Cl}$ risultano uguali a $3,42 \text{ \AA}$ e $3,51 \text{ \AA}$, tra gli atomi di cloro appartenenti a ciascuno dei filari lungo l'asse c



a seconda rispettivamente che appartengano o no al ponte tra gli stessi atomi, ed uguali a $3,72 \text{ \AA}$ (quasi corrispondente a quella del contatto di Van der Waals in strutture molecolari di composti omopolari) tra atomi di Cl di filari adiacenti.

TABELLA IV.

Confronto tra intensità calcolate ed osservate per la forma β del TiCl_3 .

hkl	$d(\text{\AA})$	$I_{\text{calc.}} (*)$	$I_{\text{oss.}}$	hkl	$d(\text{\AA})$	$I_{\text{calc.}} (*)$	$I_{\text{oss.}}$
10 $\bar{1}$ 0	5,43	1222	<i>f</i>	40 $\bar{4}$ 0	1,36	39	—
11 $\bar{2}$ 0	3,14	1	—	31 $\bar{4}$ 2	1,34	20	—
0002	2,91	82	<i>dd</i>	11 $\bar{2}$ 4	1,32	—	—
11 $\bar{2}$ 1	2,76	1017	<i>mf</i>	20 $\bar{2}$ 4	1,28	11	—
20 $\bar{2}$ 0	2,71	70	—	32 $\bar{5}$ 0	1,25	5	—
10 $\bar{1}$ 2	2,57	173	<i>dd</i>	40 $\bar{4}$ 2	1,23	2	—
11 $\bar{2}$ 2	2,13	577	<i>m</i>	32 $\bar{5}$ 1	1,22	9	—
21 $\bar{3}$ 0	2,06	92	—	22 $\bar{4}$ 3	1,22	58	—
20 $\bar{2}$ 2	1,99	178	<i>dd</i>	21 $\bar{3}$ 4	1,19	27	—
21 $\bar{3}$ 1	1,94	30	—	31 $\bar{4}$ 3	1,19	3	—
30 $\bar{3}$ 0	1,81	346	<i>d</i>	41 $\bar{5}$ 0	1,19	—	—
21 $\bar{3}$ 2	1,68	144	<i>dd</i>	41 $\bar{5}$ 1	1,16	96	<i>ddd</i>
11 $\bar{2}$ 3	1,65	183		32 $\bar{5}$ 2	1,15	69	
22 $\bar{4}$ 0	1,57	—	—	30 $\bar{3}$ 4	1,14	148	<i>ddd</i>
30 $\bar{3}$ 2	1,54	49	—	41 $\bar{5}$ 2	1,10	110	<i>ddd</i>
22 $\bar{4}$ 1	1,51	123	<i>dd</i>	11 $\bar{2}$ 5	1,09	50	
31 $\bar{4}$ 0	1,51	75		50 $\bar{5}$ 0	1,09	1	—
31 $\bar{4}$ 1	1,46	7	—	22 $\bar{4}$ 4	1,07	—	—
0004	1,46	56	<i>ddd</i>	31 $\bar{4}$ 4	1,05	49	—
10 $\bar{1}$ 4	1,41	41	—	32 $\bar{5}$ 3	1,05	6	—
21 $\bar{4}$ 3	1,41	9	—				
22 $\bar{4}$ 2	1,38	116	<i>ddd</i>				

(*) Le intensità calcolate sono in scala relativa e non sono state corrette per il fattore termico e per il fattore di assorbimento.

Nella forma α le distanze di contatto Cl—Cl sono di 3,45 \AA tra atomi di ponti tra gli stessi atomi, di 3,53 \AA tra atomi di uno stesso strato, ma appartenenti a ponti tra atomi diversi e di 3,69 \AA tra strati diversi.

Infine, mentre nella struttura della forma α ogni atomo di titanio ne ha altri tre (giacenti nello stesso piano) come immediati vicini alla distanza

di 3,53 Å, i ponti tra due atomi metallici essendo in questo caso realizzati da due soli atomi di cloro, nella forma β ogni atomo di titanio ne ha altri due (lungo un filare) come immediati vicini alla distanza di 2,91 Å, e i ponti tra i due atomi di titanio sono realizzati in questo caso da tre atomi di cloro.

Le due strutture, rispettivamente della forma α e della forma β , pur avendo alcune caratteristiche in comune, come l'impacchettamento pressoché compatto degli atomi di alogeno e la coordinazione ottaedrica degli atomi di cloro intorno al metallo di transizione, presentano perciò peculiari differenziazioni.

In particolare la forma α può essere considerata come un polimero bidimensionale (come la grafite o la mica) e la forma β come un polimero lineare (come l'amianto).

Le relazioni di carattere generale intercorrenti tra le caratteristiche strutturali del catalizzatore ed il meccanismo della catalisi, che conferisce differente stereospecificità nelle reazioni di polimerizzazione delle diolefine alle due forme del TiCl_3 , verranno discusse in prossimi lavori. Nel caso del TiCl_3 appare chiaramente come la stereospecificità, che esso-esplica nella catalisi eterogena, sia connessa con la sua struttura reticolare.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] Brev. it. N. 536.631.
- [2] F. BÖCK, L. MOSER, «Monatsh», 33, 1407 (1912); *ibid.*, 34, 1825 (1913).
- [3] Brev. Belga N. 553.477.
- [4] W. KLEMM, E. KROSE, «Z. Anorg. Chem.», 253, 209/217 (1947).
- [5] W. KLEMM, *Comunicazione tenuta al XVI Congresso di Chimica Pura ed Applicata*, Parigi 1957.
- [6] *Int. Tabellen für Kristallographie* - Gebrüder Borntraeger, Berlin (1935).

Chimica inorganica. — *Cianurazione dell'oro e di metalli analoghi con acido cianidrico e ossigeno*^(*). Nota^(**) preliminare del Socio LIVIO CAMBI.

1. La ricerca che comunico in via preliminare non ha avuto per movente la revisione del noto processo idro-metallurgico di estrazione dell'oro con i cianuri alcalini. Rientra invece in un più vasto campo di indagini cui mi dedico, riguardante le reazioni dell'acido cianidrico con metalli e sali metallici diversi.

Sono partito dall'ipotesi che l'adsorbimento di HCN sulle superfici di alcuni metalli, come l'oro, recasse ad una attivazione dell'idrogeno della molecola cianidrica stessa. Ho supposto cioè che l'acido cianidrico fosse trattenuto alla superficie, dell'oro ad esempio, mediante affinità emananti dal carbonio e che ne risultasse un'attivazione dell'idrogeno analoga a quella

(*) Ricerca compiuta presso il Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R., Università di Milano.

(**) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1958.

che si manifesta negli idrochinoni in genere, negli idrazoderivati, tipo idrazobenzolo e analoghi, i quali, come noto, si autoossidano per somma di O_2 .

Ho supposto lo schema, grossolano, seguente:



Le esperienze sono state condotte nel modo più semplice.

In un cilindro chiuso, del diametro di 2 cm. e dell'altezza di 18 cm., con condutture di adduzione ed uscita dei gas, è stata immersa verticalmente, in acqua degasata, una lamina d'oro di 130×12 mm., spessore 0,1 mm. Ho fatto gorgogliare nell'acqua azoto puro per circa 5 ore allo scopo di eliminare completamente l'ossigeno. La temperatura è stata mantenuta a $14-15^\circ C$. Ho introdotto poi l'HCN gassoso fino a saturazione dell'acqua. Infine l'ossigeno è passato in flusso che lambiva la superficie del metallo, che con relativa rapidità perde la brillantezza per la formazione superficiale di AuCN. Nella soluzione si rilevava la presenza di acqua ossigenata, sia con la reazione cromatica di perossititanato, sia con la salda d'amido iodurata.

Le determinazioni approssimate dell'acqua ossigenata formatasi nelle diverse esperienze, hanno dato valori dell'ordine di 3 mg/litro.

Il processo naturalmente si arresta per la formazione dell'AuCN, insolubile, alla superficie metallica, a parte l'azione catalitica dell'oro che, per quanto depressa dall'HCN, deve manifestarsi. Il cianuro è stato riconosciuto anche per dissoluzione nel tiosolfato.

Doveva dimostrarsi il potere riducente dell'acido cianidrico adsorbito, e infatti ho notato che la lamina d'oro, saturata di acido cianidrico, a temperatura ambiente decolora il bleu di metilene: per 100 cm^2 di superficie metallica è risultata una riduzione pari a $12 \cdot 10^{-7}$ moli del colorante stesso.

Queste ricerche, tuttora in corso, sono state estese all'argento e al mercurio. L'argento si comporta analogamente all'oro, ma meno spiccatamente. In questo caso non si può escludere la cianurazione diretta con liberazione di idrogeno. Col mercurio ho notato fenomeni finora non conosciuti. Si generano in soluzione quantità relativamente elevate di H_2O_2 e di cianuri mercurici e, contrariamente a quanto si verifica con i sali mercurici, l'acqua ossigenata persiste a lungo nella soluzione ciano-mercuriale.

2. Per quanto esuli dallo scopo principale di questa ricerca, i risultati sopra accennati impongono la revisione delle interpretazioni chimiche del processo di cianurazione dell'oro e dei minerali auriferi finora accettate.

Si è portati a formulare le seguenti preposizioni:

i) la cianurazione risulta dall'acido cianidrico adsorbito alla superficie metallica (oro) e dalla ossidazione dell'idrogeno (cianidrico) operata dall'ossigeno, con formazione di acqua ossigenata;

ii) la formazione di acqua ossigenata è primaria, non è dovuta cioè a idrogeno spostato dal metallo, ma alla perossidazione diretta dell'idrogeno

cianidrico attivato dall'adsorbimento alla superficie del metallo stesso; l'acqua ossigenata non partecipa probabilmente al processo di cianurazione propriamente detto;

iii) il cianuro alcalino agisce come generatore di HCN, per idrolisi, e quale solvente del cianuro auroso.

Queste premesse sono alla base delle ulteriori ricerche sulle reazioni sopra indicate.

Ringrazio il dott. Cenzo Sironi per l'aiuto prestatomi nella esecuzione delle esperienze.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sul teorema del massimo modulo per le equazioni lineari ellittiche in due variabili a coefficienti reali.* Nota di CARLO MIRANDA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

È noto che, se $\mathfrak{L}[u]$ è un operatore ellittico del secondo ordine soddisfacente ad opportune ipotesi, per le funzioni u soluzioni in un dominio T dell'equazione $\mathfrak{L}[u] = f$ sussiste una formula di maggiorazione del tipo:

$$(1) \quad \max_T |u| \leq \max_{\mathfrak{ST}} |u| + k \max_T |f|.$$

Il caso tipico di validità della (1) è quello in cui il coefficiente della u nell'operatore \mathfrak{L} è non positivo. La (1) vale però anche in casi più generali ⁽¹⁾ e si può inoltre affermare che, se i coefficienti di \mathfrak{L} sono sufficientemente regolari, ogni ipotesi che assicuri il verificarsi della (1) è pure sufficiente ad assicurare la validità del teorema di esistenza (e di unicità) per la soluzione del problema di Dirichlet relativo all'equazione $\mathfrak{L}[u] = f$.

Scopo della presente Nota è di indicare come un risultato di questo tipo possa essere stabilito anche per un'equazione ellittica di ordine superiore in due variabili a coefficienti reali. Per quanto mi risulta una tale estensione non è mai stata finora conseguita tranne che nel caso dell'equazione $\Delta\Delta u = 0$, da me considerato circa dieci anni fa ⁽²⁾.

Avverto anche che in questa Nota mi limiterò a riassumere i risultati da me ottenuti, dando in poche righe un brevissimo cenno del procedimento seguito. Un'esposizione dettagliata della dimostrazione, che richiede sviluppi piuttosto ampi, sarà fatta in altra sede.

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) Vedi per esempio: M. PICONE, *Su alcuni problemi d'analisi matematica posti dalla fisica*, « Esercitazioni Matematiche », Catania (1922).

(2) C. MIRANDA, *Formule di maggiorazione e teorema di esistenza per le funzioni biarmoniche di due variabili*, « Giorn. Mat. Battaglini », 78 (1948-49).

1. Consideriamo un'equazione ellittica di ordine $2m$ in due variabili, che, adoperando notazioni oramai consuete, possiamo scrivere nella forma:

$$(2) \quad \mathfrak{L}[u] = \sum_{p,q}^{0 \dots m} D^p (a^{pq} D^q u) = f.$$

Nella (1) i coefficienti a^{pq} si suppongono funzioni reali definite in un dominio T del piano $x_1 x_2$ ed ivi di classe $C^{(p+1)} \cap C^{(q+1)} \cap C^{(2)}$. La funzione f sia invece misurabile e limitata in ogni dominio interno a T e tale da risultare:

$$M[f] = \sup_{T - \mathfrak{F}T} [d^{m+1-\lambda} |f|] < \infty,$$

λ essendo un numero positivo maggiore di $1/2$ e $d(x_1, x_2)$ essendo la distanza da $\mathfrak{F}T$ del punto (x_1, x_2) . Infine si supponga che il dominio T sia regolare e di classe $2m + 2$.

Per ogni dominio A interno a T indichiamo poi con $H^{(n)}(A)$ lo spazio di Hilbert che si ottiene completando $C^{(n)}(A)$ secondo la norma

$$\|u\|_n^A = \left[\sum_p^n \int_A (D^p u)^2 dx \right]^{1/2}$$

e sia $K^{(n)}$ la classe delle funzioni u definite in T che godono delle seguenti proprietà:

$$\begin{array}{ll} 1^\circ) & u \in C^{(m-1)}(T), \\ 2^\circ) & u \in H^{(n)}(A) \quad \text{per ogni } A \subset T - \mathfrak{F}T, \quad n \geq m. \end{array}$$

I risultati che ci proponiamo di esporre si riferiscono al seguente:

PROBLEMA DI DIRICHLET: Detta s un'ascissa curvilinea su $\mathfrak{F}T$ e assegnate su $\mathfrak{F}T$ m funzioni $\varphi_0(s), \varphi_1(s), \dots, \varphi_{m-1}(s)$ tali che:

$$\varphi_j \in C^{(m-1-j)}(\mathfrak{F}T),$$

determinare una funzione $u \in K^{(2m)}$ che verifichi la (2) e che soddisfi alle condizioni al contorno:

$$(3) \quad \frac{d^j u}{dn^j} = \varphi_j(s), \quad (j = 0, 1, \dots, m-1),$$

n designando la normale esterna a $\mathfrak{F}T$.

Per lo studio di tale problema è fondamentale un'ipotesi che, nel caso di un'equazione del secondo ordine, è senz'altro verificata se il coefficiente della u nell'operatore \mathfrak{L} è non positivo. Per formulare tale ipotesi poniamo innanzi tutto:

$$B[u_1, u_2] = \sum_{p,q}^{0 \dots m} (-1)^p \int_T a^{pq} D^p u_1 D^q u_2 dx,$$

e diciamo $H_0^{(m)}$ il sottospazio di $H^{(m)}(T)$ che si ottiene completando secondo la norma $\|u\|_m^T$ lo spazio $C_0^{(m)}(T)$ delle funzioni di classe $C^{(m)}(T)$ che sono nulle in un intorno di $\mathfrak{F}T$. La nostra ipotesi è allora la seguente:

G) Esiste una costante c_0 tale che per ogni $\tau \in H_0^{(m)}$ risulti:

$$\|\tau\|_m^T \leq c_0 B[\tau, \tau].$$

Tale ipotesi è stata già largamente usata per scopi consimili da vari Autori ed è noto (Garding) che essa è senz'altro verificata se si presenta l'una o l'altra delle seguenti circostanze:

a) l'operatore \mathcal{L} è a coefficienti costanti e contiene soltanto le derivate di ordine massimo;

b) il coefficiente della u in \mathcal{L} ha il segno di $(-1)^m$ e, nel caso $m > 1$, è anche abbastanza grande in valore assoluto;

c) il diametro di T è abbastanza piccolo.

Dopo ciò il risultato principale delle nostre ricerche può così enunciarsi:

Se è soddisfatta l'ipotesi G) il problema di Dirichlet ammette una e una sola soluzione di classe $K^{(2m)}$ e per essa vale la formula di maggiorazione:

$$(4) \quad \sum_{\beta=0}^{0 \dots m-1} \max_T |D^\beta u| \leq k \left[M[f] + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\max |\varphi_j| + \max \left| \frac{d^{m-1-j} \varphi_j}{ds^{m-1-j}} \right| \right) \right],$$

dove k è una costante che dipende solo dal dominio T e dall'operatore \mathcal{L} ⁽³⁾.

2. Accenniamo ora ad alcune estensioni e conseguenze del risultato più sopra enunciato.

Innanzitutto ci si può domandare se non si possa ottenere una limitazione analoga alla (4) anche quando si prescinda dall'ipotesi G). In tal caso non si può certo stabilire un teorema di esistenza e di unicità, si può però dimostrare che per ogni eventuale soluzione del problema di Dirichlet vale ancora una limitazione del tipo (4) a condizione di aggiungere al secondo membro di detta formula un termine del tipo:

$$k \int_T u^2 dx.$$

Osserviamo ora che per ogni soluzione u del problema di Dirichlet si ha: $B[\tau, u] = (\tau, f)$, essendo τ un'arbitraria funzione di classe $C_0^{(m)}$. È perciò naturale di considerare il problema generalizzato di Dirichlet consistente nella ricerca di una funzione $u \in K^{(m)}$ che soddisfi alle (3) e che per ogni $\tau \in C_0^{(m)}$ verifichi l'equazione:

$$B[\tau, u] = \sum_{\beta}^{0 \dots m} (D^\beta \tau, f^\beta).$$

Si dimostra che per tale problema valgono risultati del tutto analoghi a quelli più sopra enunciati, con le sole varianti che $K^{(2m)}$ è sostituita da $K^{(m)}$ e, nella (4), ad $M[f]$ subentra la quantità

$$\sum_{\beta}^{0 \dots m} \sup_{T-\bar{S}T} [d^{m+1-\beta-\lambda} |f^\beta|].$$

Aggiungeremo infine che i risultati ottenuti permettono di apportare un perfezionamento al teorema di analiticità recentemente dimostrato da C. B. Mor-

(3) Il modo di dipendere di k da \mathcal{L} può essere opportunamente precisato.

rey jr. e L. Nirenberg ⁽⁴⁾. Tale perfezionamento consiste nel fatto che in detto teorema l'ipotesi, implicitamente ammessa da questi Autori, che sia $u \in H^{(m)}(T)$ può essere sostituita dall'altra meno restrittiva: $u \in K^{(m)}$.

3. Daremo ora qualche cenno del procedimento seguito per dimostrare il teorema del n. 1. Tale procedimento consiste nel dimostrare in primo luogo il teorema nel caso di condizioni al contorno omogenee. Per questo ci si può valere di un metodo già adoperato da L. Nirenberg ⁽⁵⁾, opportunamente integrato sia con alcuni lemmi recentemente dimostrati da C. B. Morrey jr. e L. Nirenberg ⁽⁶⁾, sia con alcuni procedimenti di maggiorazione da me precedentemente utilizzati in una Memoria relativa alle equazioni del secondo ordine ⁽⁷⁾. Ciò allo scopo di conseguire il teorema di esistenza e di unicità, nonché certe formule di maggiorazione, in ipotesi e in classi funzionali diverse da quelle considerate da L. Nirenberg e più adatte allo scopo che si vuol conseguire.

Il passaggio dal caso delle condizioni al contorno omogenee a quello generale viene poi effettuato nel modo più naturale e cioè sottraendo dalla funzione incognita u un'altra, funzione $z \in K^{(2m)}$ che verifichi le condizioni al contorno. Il problema di Dirichlet per l'equazione $\mathfrak{L}[u] = f$ si trasforma così in analogo problema, con condizioni al contorno omogenee, per l'equazione: $\mathfrak{L}[v] = f - \mathfrak{L}[z]$ con $v = u - z$. La costruzione della z è però resa piuttosto delicata dal fatto che per essa si richiede che sia:

$$M[\mathfrak{L}[z]] \leq k \sum_{j=0}^{m-1} \left(\max |\varphi_j| + \max \left| \frac{d^{m-1-j} \varphi_j}{ds^{m-1-j}} \right| \right).$$

Si supera questa difficoltà con un artificio che credo nuovo e che consiste sostanzialmente nel costruire, in via preliminare, la funzione z in relazione non all'operatore \mathfrak{L} ma ad un operatore \mathfrak{L}_1 che approssima \mathfrak{L} in un intorno di $\mathfrak{F}T$ e i cui coefficienti si conservano costanti lungo la normale a $\mathfrak{F}T$. La riuscita di questa costruzione preliminare è peraltro subordinata in modo essenziale all'utilizzazione della formula risolutiva del problema di Dirichlet, in un semipiano, relativo a un'equazione a coefficienti costanti, formula che è stata recentemente stabilita da S. Agmon ⁽⁸⁾. Ed è appunto la necessità di valersi dei risultati di S. Agmon che circoscrive la nostra trattazione al caso di due variabili.

Aggiungerò infine che, per applicare la formula di Agmon, occorre previamente dimostrare che essa è valida anche in ipotesi più generali di quelle indicate da detto autore.

(4) C. B. MORREY e L. NIRENBERG, *On the analyticity of the solutions of partial differential equations*, «Comm. on pure and applied math.», 10 (1957).

(5) L. NIRENBERG, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, «Comm. on pure and applied math.», 8 (1955).

(6) Vedi loc. cit. ⁽⁴⁾.

(7) C. MIRANDA, *Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni a derivate parziali del primo ordine, in n variabili indipendenti*, «Memorie Acc. Naz. Lincei», 3 (1952).

(8) S. AGMON, *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane I*, «Comm. on pure and applied math.», 10 (1957).

Geometria. — *Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti.* Nota II (*) di GIUSEPPE TALLINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

5. Proseguendo nello studio dell'insieme \mathfrak{S} (n. 2) e dell'insieme \mathfrak{S}^* ad esso associato (n. 4), dimostriamo che:

Un iperpiano congiungente due piani π_1 e π_2 di \mathfrak{S}^ interseca \mathfrak{S} solamente nei punti delle coniche C_1 e C_2 , sezioni rispettive di π_1 e π_2 con \mathfrak{S} . Onde mai più di due piani di \mathfrak{S}^* appartengono ad uno stesso iperpiano.*

Il piano tangente ad \mathfrak{S} nel punto $T_3 = \pi_1 \cap \pi_2 = C_1 \cap C_2$ (cfr. ultima prop. n. 4) appartiene a quell' S_4 (cfr. seconda prop. n. 4). Supposto ora che esista in S_4 un punto T di \mathfrak{S} non giacente nè in π_1 nè in π_2 , scelto un punto T_2 su C_1 , distinto da T_3 , e denotati con π_3 il piano di \mathfrak{S}^* per TT_2 e con C_3 la conica (non degenera) sezione di π_3 con \mathfrak{S} , il piano π_3 giacerebbe nell' S_4 , dovendo congiungere i tre punti indipendenti (perché appartenenti a C_3) T , $T_1 = \pi_3 \cap \pi_2 = C_3 \cap C_2$, $T_2 = \pi_3 \cap \pi_1 = C_3 \cap C_1$ di S_4 . Ma allora all' S_4 apparterrebbero anche i piani (di \mathfrak{S}) tangenti ad \mathfrak{S} in T_1 e T_2 e ciò è assurdo in base all'ultima prop. del n. 3, contenendo l' S_4 le tre distinte coniche C_1 , C_2 , C_3 .

Stabiliamo ora la proposizione seguente:

La proiezione dell'insieme \mathfrak{S} da un piano τ , tangente ad \mathfrak{S} in un suo punto T , è un cono quadrico con piano vertice in τ .

Sia T' un punto di \mathfrak{S} distinto da T . L' S_3 proiettante T' da τ risulta evidentemente lo spazio congiungente τ con il piano di \mathfrak{S}^* per TT' (cfr. seconda prop. n. 4). Ne segue, facendo variare T' in \mathfrak{S} , che la proiezione di \mathfrak{S} da τ coincide con i $q + 1$ S_3 , tra loro distinti (cfr. ultima prop. n. 4), congiungenti τ con i $q + 1$ piani di \mathfrak{S}^* per T .

Un piano α , sghembo con τ , incontra i $q + 1$ S_3 suddetti in $q + 1$ punti distinti e a tre a tre non allineati — se tre di essi fossero allineati su una retta r , l' $S_4 = r \cup \tau$ conterrebbe tre piani di \mathfrak{S}^* e ciò è escluso (cfr. prop. precedente) — e quindi in una conica (B. Segre [5] e [6] (5)), onde l'asserto.

Dimostriamo infine che:

La proiezione Γ dell'insieme \mathfrak{S} da una retta secante \mathfrak{S} in due punti T' e T'' , risulta un cono quadrico di tipo iperbolico con spazio vertice in quella retta.

Siano τ' e τ'' i piani tangenti in T' e T'' ad \mathfrak{S} , e π il piano di \mathfrak{S}^* per $T' T''$. Denotiamo inoltre con π'_i e π''_k ($i, k = 1, 2, \dots, q$) rispettivamente l' i -esimo piano di \mathfrak{S}^* per T' , distinto da π , e il k -esimo piano di \mathfrak{S}^* per T'' , distinto da π .

(*) Continuazione della Nota I, pubblicata a p. 19 di questo volume dei « Rendiconti ».

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(5) I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della Nota I.

$L'S_3 = \pi'_i \cup T'T''$ e $l'S_3 = \pi''_k \cup T'T''$, coincidendo rispettivamente con le proiezioni, dalla retta $T'T''$, delle coniche sezioni di \mathfrak{F} con π'_i e π''_k , appartenono a Γ . Al variare degli indici i, k si ottengono così rispettivamente un primo e un secondo sistema di S_3 , ognuno, costituito da q S_3 di Γ . Si ha poi che due S_3 dello stesso sistema, $\pi'_i \cup T'T''$ e $\pi'_j \cup T'T''$ ($i \neq j$), s'intersecano solamente lungo $T'T''$ (altrimenti $l'S_4$ loro congiungente incontrerebbe \mathfrak{F} nelle due coniche sezioni di \mathfrak{F} con π'_i e π'_j , e nel punto T'' , che non giace su tali coniche, e ciò è escluso per la prima prop.), mentre due S_3 di sistemi diversi, $\pi'_i \cup T'T''$ e $\pi''_k \cup T'T''$, s'incontrano in un piano per $T'T''$ (il piano congiungente $T'T''$ con il punto $\pi_i \cap \pi''_k$).

$L'S'_3 = T'T'' \cup \tau' (\supset \pi$, cfr. seconda prop. n. 4) appartiene a Γ , in quanto tra i $q+1$ piani del fascio per $T'T''$ contenuto in S'_3 , il piano π appartiene ovviamente a Γ e gli altri sono intersezioni di S'_3 con i q $S_3 (\subset \Gamma)$ del secondo sistema (cfr. seconda prop. n. 4). Inoltre $l'S'_3$ interseca ciascun $S_3 = \pi'_i \cup T'T''$ del primo sistema solamente lungo la $T'T''$ (altrimenti $l'S_4$ loro congiungente, conterrebbe, oltre a $\tau' (\in \mathfrak{F})$, i piani $\pi (\subset S'_3)$ e π'_i e quindi anche $\tau' (\in \mathfrak{F})$ e ciò è escluso in base all'ultima prop. del n. 3).

Analogamente $l'S'_3 = T'T'' \cup \tau' (\supset \pi)$ appartiene a Γ , interseca gli S_3 del primo sistema in piani per $T'T''$ e gli S_3 del secondo sistema solamente lungo la $T'T''$. Inoltre S'_3 e S'_3 s'intersecano in π .

Il cono Γ contiene dunque due schiere di S_3 : la prima costituita dagli S_3 del primo sistema e da S'_3 , la seconda dagli S_3 del secondo sistema e da S'_3 . I $q+1$ S_3 di ognuna delle due schiere esauriscono evidentemente con i loro punti Γ , inoltre due S_3 di una stessa schiera s'intersecano solamente lungo $T'T''$, mentre due S_3 di schiere diverse s'incontrano in un piano per $T'T''$.

La sezione di Γ con un \tilde{S}_3 sghembo con la $T'T''$, risulta allora, evidentemente, una quadrica rigata, ne segue l'asserto.

6. Siano A_{00}, A_{11}, A_{22} tre punti di \mathfrak{F} , non giacenti in uno stesso piano di \mathfrak{F}^* , e τ_0, τ_1, τ_2 i relativi piani tangenti ad \mathfrak{F} . Posto $A_{ij} = A_{ji} = \tau_i \cap \tau_j$ ($i, j = 0, 1, 2; i \neq j$), il piano $A_{ii} A_{jj} A_{ij}$ risulta il piano di \mathfrak{F}^* per $A_{ii} A_{jj}$, le rette $A_{ii} A_{ij}$ e $A_{jj} A_{ij}$ essendo le tangenti in A_{ii} e A_{jj} alla conica C_{ij} sezione di detto piano con \mathfrak{F} (n. 4).

I sei punti A_{ij} ($i, j = 0, 1, 2$) sono indipendenti (altrimenti sarebbero immersi in un S_4 il quale dovrebbe contenere i tre distinti piani di \mathfrak{F}^* : $A_{ii} A_{jj} A_{ij}$ ($i, j = 0, 1, 2; i \neq j$) e ciò è assurdo in base alla prima prop. del n. 5), possiamo dunque sceglierli come punti fondamentali di un riferimento proiettivo di coordinate $X_{ij} = X_{ji}$ ($j, i = 0, 1, 2$) di $S_{5,q}$. Si può inoltre prendere il punto unitario del riferimento coincidente con un qualsiasi punto U di \mathfrak{F} , distinto dai punti delle tre coniche C_{ij} (in quanto evidentemente i piani fondamentali del riferimento suddetto incontrano \mathfrak{F} solamente nei punti di una o due tra tali coniche, in base all'ultima prop. del n. 3 e alla prima del n. 5).

Denotato con i, j, l una permutazione ciclica di $0, 1, 2$, il cono quadrico proiezione di \mathfrak{F} da τ_l (cfr. seconda prop. n. 5) interseca il piano $A_{ii} A_{jj} A_{ij}$, che è sghembo con τ_l ($\equiv A_{il} A_{jl} A_{li}$), proprio nella conica C_{ij} . Nel riferimento scelto allora il suddetto cono — dovendo contenere anche il punto unitario — avrà equazione $X_{ii} X_{jj} = X_{ij}^2$. Inoltre il cono quadrico iperbolico proiezione di \mathfrak{F} da $A_{ii} A_{jj}$ (cfr. ultima prop. n. 5) contiene, oltre al punto unitario, i quattro S_3 congiungenti la $A_{ii} A_{jj}$ con i seguenti piani: τ_i ($\equiv A_{ii} A_{ij} A_{il}$), τ_j ($\equiv A_{jj} A_{ji} A_{jl}$), $A_{ii} A_{ll} A_{il}$, $A_{jj} A_{ll} A_{jl}$, e quindi ha equazione $X_{ll} X_{ij} = X_{jl} X_{li}$.

L'insieme \mathfrak{F} è allora contenuto nei sei con:

$$(2) \quad X_{ii} X_{jj} = X_{ij}^2, \quad X_{ll} X_{ij} = X_{jl} X_{li} \quad (i, j, l \text{ permutazione ciclica di } 0, 1, 2).$$

D'altra parte, eliminando dalle (1) del n. 1 i parametri x_i ($i = 0, 1, 2$) si ottengono ancora le (2), quindi la superficie di Veronese di equazioni parametriche (1) è l'intersezione completa dei sei con (2). Ne segue che l'insieme \mathfrak{F} è contenuto in una siffatta superficie, anzi coincide con essa in quanto il numero dei punti di \mathfrak{F} (che è $q^2 + q + 1$, n. 2) coincide con quello di tale superficie.

Si conclude con il seguente:

TEOREMA I. — *Un insieme \mathfrak{F} di $q^2 + q + 1$ piani congiunti da un $S_{5,q}$ ($q = p^h$, $p \neq 2$), a due a due incidenti in un punto e tali che mai più di due passino per uno stesso punto, coincide con la totalità dei piani tangenti ad una superficie di Veronese.*

7. Dimostriamo infine il seguente:

TEOREMA II. — *Un insieme \mathfrak{R} di k ($\geq q^2 + q + 1$) piani congiunti da un $S_{r,q}$ ($r \geq 5$, $q = p^h$ e $p \neq 2$) a due a due incidenti e tali che mai più di due passino per uno stesso punto, costituisce la totalità dei piani tangenti ad una superficie di Veronese.*

Il teorema segue dal Teorema I non appena si dimostri — come ora faremo — che un tale insieme \mathfrak{R} può esistere solamente se sono simultaneamente verificate le seguenti circostanze: i piani di \mathfrak{R} siano a due a due incidenti in un sol punto, sia $k = q^2 + q + 1$ e $r = 5$.

Cominciamo a provare che i piani di \mathfrak{R} sono a due a due incidenti in un sol punto.

Ragionando per assurdo, supposto che esistano due piani di \mathfrak{R} , α_1 e α_2 , intersecantisi in una retta r , uno qualsiasi dei $k - 2$ piani rimanenti non può incontrare α_1 in una retta — altrimenti per il punto d'incontro di r con la retta sezione di α_1 con tale piano, passerebbero tre piani di \mathfrak{R} — e quindi lo interseca in un sol punto, distinto dai punti di r . D'altra parte per ogni punto di α_1 può passare al più un piano di \mathfrak{R} , diverso da α_1 . Poiché i punti di α_1 , non situati su r , sono q^2 , sarà allora $k - 2 \leq q^2$, e ciò è assurdo essendo $k \geq q^2 + q + 1$.

Siano ora τ_1 e τ_2 due piani di \mathfrak{R} , incidenti in uno (e un sol punto) P_3 , e quindi congiunti da un S_4 di $S_{r,q}$. Sia τ_3 un piano di \mathfrak{R} non contenuto in tale S_4 . τ_3 incontra rispettivamente τ_1 e τ_2 in due punti, P_2 e P_1 , distinti

tra loro e da P_3 , e quindi è congiunto all' S_4 da un S_5 . Ci proponiamo di dimostrare che $l'S_{r,q}$, *concide con tale S_5 , ossia che tutti i piani di \mathfrak{R} giacciono nell' S_5 .*

Un qualsiasi piano τ di \mathfrak{R} , distinto da τ_1, τ_2, τ_3 , non potendo passare per nessuno dei punti P_1, P_2, P_3 , incontra τ_1, τ_2, τ_3 in tre punti distinti. Se essi sono anche indipendenti, τ dovrà giacere in S_5 . Se invece essi sono allineati su una retta r , τ dovrà incidere il piano $\alpha = P_1 P_2 P_3$ secondo r : infatti, se r fosse sghemba con α , $l'S_4 = r \cup \alpha$, dovendo contenere i punti $r \cap \tau_1, r \cap \tau_2, r \cap \tau_3$, e le rette $P_2 P_3 (\subset \tau_1), P_3 P_1 (\subset \tau_2), P_1 P_2 (\subset \tau_3)$, dovrebbe contenere τ_1, τ_2, τ_3 e ciò è escluso; se r incidesse α in un punto, $l'S_3 = r \cup \alpha$ dovrebbe contenere almeno due dei piani τ_1, τ_2, τ_3 , e ciò è escluso per la precedente proposizione.

Osserviamo ora che non può ogni piano di \mathfrak{R} incidere α in una retta, altrimenti le k rette sezioni - tutte distinte per la precedente proposizione - dovendo appartenere a piani di \mathfrak{R} , sarebbero a tre a tre indipendenti e quindi sarebbe $k \leq q + 1$ ⁽⁶⁾ mentre è $k \geq q^2 + q + 1$. Esiste dunque un piano τ_4 di \mathfrak{R} incidente τ_1, τ_2, τ_3 in tre punti indipendenti e quindi contenuto in S_5 .

Il piano τ_4 o è sghembo con α oppure lo incontra in uno (e un sol) punto necessariamente appartenente ad una delle rette $P_2 P_3, P_3 P_1, P_1 P_2$ (altrimenti $l'S_4 = \tau_4 \cup \alpha$, contenendo i punti $\tau_4 \cap \tau_i$ non contenuti in α e le rette $\alpha \cap \tau_i$ ($i = 1, 2, 3$), dovrebbe contenere τ_1, τ_2, τ_3). Allora un piano τ di \mathfrak{R} , distinto da τ_1, τ_2, τ_3 , intersecante α in una retta, dovendo incidere τ_4 in un punto - certo distinto dall'eventuale punto $\alpha \cap \tau_4$, altrimenti per quel punto passerebbero i tre piani di \mathfrak{R} : τ, τ_4 ed uno dei tre piani τ_1, τ_2, τ_3 - deve essere contenuto in S_5 . Ne segue che ogni piano di \mathfrak{R} giace in S_5 (cfr. terzultimo capoverso).

Dimostriamo infine che *deve essere $k = q^2 + q + 1$.*

Sia π un piano di \mathfrak{R} , i rimanenti piani sono in numero di $k - 1$, ognuno di essi incontra π in un sol punto; essendo i punti di π in numero di $q^2 + q + 1$ deve allora essere $k - 1 \leq q^2 + q + 1$, d'altra parte è $k \geq q^2 + q + 1$, quindi o è $k = q^2 + q + 1$ oppure $k = q^2 + q + 2$. Dimostriamo che non può presentarsi il secondo caso. Infatti in questa eventualità i $q^2 + q + 1$ piani di \mathfrak{R} , distinti da π , costituirebbero un insieme \mathfrak{J} di piani analogo a quello definito al n. 2 e quindi coincidente - in base al Teorema I - nella totalità dei piani tangenti ad una superficie di Veronese dell' $S_{5,q}$. D'altra parte per ogni punto di un piano τ di \mathfrak{J} , distinto da $T = \tau \cap \pi$, passerebbe un ulteriore piano di \mathfrak{J} , T sarebbe allora il punto di tangenza di τ con la suddetta superficie, che quindi coinciderebbe con π e ciò è manifestamente assurdo.

(6) Cfr. nota ⁽⁴⁾ della Nota I.

Geometria. — *Alcune osservazioni sulle irregolarità di un S_3 doppio.* Nota di DIONISIO GALLARATI, presentata (*) dal Corrisp. E. TOGLIATTI.

È noto che la curva di diramazione di un piano doppio irregolare si spezza in curve di un fascio; e se 2μ ($\mu \geq 2$) è il numero di queste curve, l'irregolarità del piano doppio è $\mu - 1$ ⁽¹⁾. Da ciò segue che se un S_3 doppio ha irregolarità superficiale $q_2 > 0$, la sua superficie di diramazione si spezza in superficie di un fascio; e se 2μ è il numero di tali superficie risulta $\gamma_2 = \mu - 1$.

Consideriamo un S_3 doppio di generi P_a, P_g , la cui superficie di diramazione Δ , d'ordine $2\mu\nu$, sia spezzata in 2μ superficie d'ordine ν appartenenti ad un fascio $|F|$ avente come curva base una curva \mathcal{C} , d'ordine $n = \nu^2$, riducibile e non singolare (di genere $p = \nu^3 - 2\nu^2 + 1$). È facile dimostrare che *tra l'irregolarità superficiale q_2 , e l'irregolarità tridimensionale $\gamma_3 = P_g - P_a$ dell' S_3 doppio intercorre la relazione:*

$$(1) \quad q_2 + q_3 = 0.$$

Di qui, poiché per ogni V_3 il numero $q_2 + q_3$ è il massimo valore che può assumere la deficienza del sistema segato sopra una superficie di V_3 dal suo sistema aggiunto ⁽²⁾, segue che *il sistema aggiunto ad una qualsiasi superficie T dell' S_3 doppio sega su T il sistema canonico completo.*

Poiché le superficie canoniche dell' S_3 doppio sono rappresentate su di esso dalle superficie d'ordine $\mu\nu - 4$ passanti $(\mu - 1)$ -plamente per \mathcal{C} ⁽³⁾, e poiché la postulazione della \mathcal{C}^n rispetto alle superficie d'ordine m (convenientemente elevato) che debbano passare per essa con la molteplicità $\mu - 1$ è data da:

$$(2) \quad \theta_m = \frac{1}{6} \mu (\mu - 1) [(3m - 4\mu + 8)n - (2\mu - 1)(p - 1)] \quad (4),$$

ossia, tenendo conto degli attuali valori di n e p :

$$\theta_m = \frac{1}{6} \mu \nu^2 (\mu - 1) (3m - 2\mu\nu + \nu + 6),$$

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) M. DE FRANCHIS, *I piani doppi dotati di due o più differenziali totali di prima specie*, « Rend. Lincei » (5), 13, pp. 688-695 (1904); *Sulle superficie algebriche le quali contengono un fascio irrazionale di curve*, « Rend. Palermo », t. XX, pp. 49-54 (1905).

(2) F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. Palermo », t. XXVIII, pp. 37-87 (1909).

(3) Cfr. ad esempio L. ROTH, *Algebraic Threefolds*, « Erg. der Math. », p. 19, Berlin, 1955.

(4) M. NOETHER, *Sulle curve multiple di superficie algebriche*, « Annali di Matematica », (2), 5, pp. 163-177 (1871); ed anche: L. CAMPEDELLI, *Sulla postulazione di una curva tripla*, « Rend. Palermo », t. LV, pp. 198-202 (1931).

risulta:

$$P_a = \binom{\mu\nu-1}{3} - \theta_{\mu\nu-4} = \binom{\mu\nu-1}{3} - \frac{1}{6} \mu\nu^2 (\mu-1) (\mu\nu + \nu - 6) = \mu \binom{\nu-1}{3} + \mu - 1.$$

Per valutare il genere geometrico dell' S_3 doppio incominciamo con l'osservare che se $\nu \leq 3$ risulta $P_g = 0$. Infatti, se $P_g > 0$, detta K una superficie canonica dell' S_3 doppio, l'immagine K^* di K nell' S_3 , che ha ordine $\mu\nu - 4$ e passa $(\mu-1)$ -plamente per la curva \mathcal{C} base di un fascio $|F|$ di superficie d'ordine ν , sega una generica superficie di $|F|$ in una curva d'ordine $\nu(\mu\nu-4)$ di cui fa parte la curva \mathcal{C} contata $\mu-1$ volte. Ne segue $\nu(\mu\nu-4) \geq \nu^2(\mu-1)$, e cioè $\nu \geq 4$.

Supponiamo allora $\nu \geq 4$ e teniamo presente che l'equazione d'una superficie appartenente allo spazio ordinario ed avente ordine $\mu\nu - 4$ con $\nu \geq 4$, che debba passare con molteplicità $\mu-1$ per la curva \mathcal{C} completa intersezione delle due superficie $P=0$, $Q=0$ (ove P, Q denotano forme quaternarie di grado ν) può scriversi:

$$(3) \quad A_0 P^{\mu-1} + A_1 P^{\mu-2} Q + \dots + A_{\mu-2} P Q^{\mu-2} + A_{\mu-1} Q^{\mu-1} = 0,$$

ove $A_0, A_1, \dots, A_{\mu-1}$ denotano forme quaternarie di grado $\nu-4$. Ora il numero dei parametri omogenei da cui dipende la (3), e cioè, nelle attuali ipotesi, il genere P_g dell' S_3 doppio, è stato determinato da M. Noether⁽⁵⁾, si ha precisamente:

$$(4) \quad P_g = \binom{\mu\nu-1}{3} - \frac{1}{6} \mu\nu^2 (\mu-1) (\mu\nu + \nu - 6) - (\mu-1) = \mu \binom{\nu-1}{3};$$

ed anzi, poiché il secondo membro della (4) si annulla per $\nu = 1, 2, 3$, la (4) vale per ogni valore di $\nu \geq 1$.

Ne segue, qualunque sia ν :

$$q_3 = P_g - P_a = -(\mu-1) = -q_2$$

e cioè la (1).

La (1) continua a sussistere se \mathcal{C} è dotata di punti doppi (ordinari) e cioè se in qualche punto di \mathcal{C} le superficie di $|F|$ presentano un contatto semplice: infatti la (2) vale inalterata purché si intenda che p sia il genere virtuale di \mathcal{C} , ritenendo quei punti doppi virtualmente inesistenti; ed inoltre il numero dei coefficienti che compaiono nella (3) non dipende dalla presenza di punti doppi di \mathcal{C} . Dalla Memoria citata di M. Noether risulta di più che la (1) è ancora valida se \mathcal{C} si spezza in due componenti \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 aventi un certo numero s di intersezioni semplici e ciascuna dotata di punti doppi (effettivi) ordinari.

Non sembra facile valutare i generi dell' S_3 doppio qualora la curva \mathcal{C} presenti singolarità più complicate.

(5) M. NOETHER, loc. cit.; ed anche R. HALL, *Some types of irregular threefolds*, « Rend. di Matematica e delle sue Applic. » (5), **11**, pp. 167-175 (1952).

Osserviamo che la (1) equivale a ciò che l' S_3 doppio non possiede forme differenziali quadratiche di prima specie. Infatti se g_i ($i = 1, 2, 3$) denota il numero degli integrali i -pli di prima specie appartenenti ad una V_3 e linearmente indipendenti (sicché $g_1 = q_2$, $g_3 = P_g$ e quindi $q_3 = P_g - P_a = g_3 - P_a$), la relazione dimostrata da K. Kodaira ⁽⁶⁾ (e già prevista da F. Severi ⁽²⁾):

$$P_a = g_1 - g_2 + g_3,$$

può scriversi:

$$g_2 = q_2 + q_3^{(7)},$$

e pertanto la (1) implica $g_2 = 0$ ⁽⁸⁾.

Conseguenza immediata di tale fatto è che (se $\mu \geq 3$) due qualsiasi forme differenziali lineari di prima specie appartenenti all' S_3 doppio sono razionalmente dipendenti. Invero se:

$$\omega_1 = L_1 dx + M_1 dy + N_1 dz, \quad \omega_2 = L_2 dx + M_2 dy + N_2 dz$$

sono due di tali forme, il loro prodotto esterno:

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 \\ M_2 & N_2 \end{vmatrix} dy dz + \begin{vmatrix} N_1 & L_1 \\ N_2 & L_2 \end{vmatrix} dz dx + \begin{vmatrix} L_1 & M_1 \\ L_2 & M_2 \end{vmatrix} dx dy$$

è una forma differenziale quadratica di prima specie appartenente all' S_3 doppio ⁽⁷⁾. Essa deve allora essere identicamente nulla, e cioè:

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Esiste dunque una funzione razionale λ tale che $\omega_2 = \lambda \omega_1$.

Ora è noto che l'esistenza di una coppia di forme differenziali lineari di prima specie razionalmente dipendenti, e cioè di una coppia di integrali picardiani di prima specie funzionalmente dipendenti, conduce all'esistenza su V_3 di un fascio irrazionale di superficie. Se $\mu \geq 3$ il nostro S_3 doppio possiede dunque un fascio irrazionale di superficie algebriche. Ciò è d'accordo col teorema di A. Comessatti ⁽⁹⁾ secondo cui una V_3 per la quale $P_g - P_a \leq q_2 - 4$ possiede un fascio irrazionale di superficie che, se non è $q_2 = 1$ (nel qual caso il fascio è ellittico), ha il genere almeno uguale a due. Poiché ora si ha: $P_g - P_a = -q_2$, la disuguaglianza: $P_g - P_a \leq q_2 - 4$ equivale alla $q_2 \geq 2$, ossia alla $\mu \geq 3$.

(6) K. KODAIRA, *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, « Annals of Math. », 59, pp. 86-134 (1954).

(7) Cfr. F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: Terza Memoria*, « Annali di Matematica » (4), 41, pp. 161-199 (1956); *Contributi alla teoria delle irregolarità d'una varietà algebrica*, « Rend. Lincei » (8), 20, pp. 7-16 (1956).

(8) La $g_2 = 0$ segue già dalla disuguaglianza di F. SEVERI: $g_2 \leq q_2 + q_3$; cfr. loc. cit. in ⁽²⁾.

(9) A. COMESSATTI, *Sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica*, « Rend. Acc. Lincei » (5), 22, pp. 316-321 (1913); *Ancora sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica*, ibid., pp. 361-366.

D'altra parte l'esistenza di un fascio irrazionale di superficie sopra un qualsiasi S_3 doppio irregolare (come già l'esistenza di un fascio irrazionale di curve sopra un piano doppio irregolare) si rivela subito direttamente. Infatti alla generica superficie del fascio $|F|$ a cui appartiene Δ corrispondono *due* superficie appartenenti ad un fascio iperellittico $\{\Phi\}$ il cui genere si valuta notando che quelle due superficie coincidono se, e soltanto se, la F corrispondente fa parte di Δ . La g_2^1 nel fascio $\{\Phi\}$ corrispondente ad $|F|$ ha quindi 2μ elementi doppi; e perciò se π è il genere di $\{\Phi\}$ risulta $2\pi + 2 = 2\mu$ e cioè $\pi = \mu - 1 = q_2$. Anzi da ciò risulta che un fascio irrazionale esiste anche se $\mu = 2$, nel qual caso trattasi di un fascio ellittico.

Meccanica. — *Sur un mouvement fluide barotrope.* Nota di LAZĂR DRAGOS, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

I. Dans un travail récemment publié [1], M. V. Vălcovici a démontré que le mouvement permanent rotationnel d'un fluide barotrope, idéal et compressible s'effectue sur les surfaces de Bernoulli, en mettant en évidence l'existence de deux fonctions φ et ψ , qui jouent le rôle des fonctions analogues appartenant au mouvement potentiel dans le plan.

Le problème de la détermination de ces deux fonctions est en général compliqué. Mais dans des cas particuliers assez étendus on parvient à simplifier les calculs et à en tirer des conséquences intéressantes.

C'est un tel cas particulier que nous nous proposons de traiter dans le présent travail, à savoir, le cas où les surfaces de Bernoulli se réduisent à $\Psi = z$. Ce cas comprend notamment le mouvement plan du gaz. Si l'on fait $z = \frac{1}{\gamma - 1}$ on obtient les résultats de la Dynamique des gaz.

Les équations établies par M. V. Vălcovici sont

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q^i} (\rho \sqrt{g} g^{ij} \varphi_j) = 0, \\ \frac{1}{2} g^{ij} \varphi_i \varphi_j + P - U = q^3, \\ g^{ij} \varphi_j \varphi_{i3} = 1, \end{array} \right. \quad i, j = 1, 2$$

où g^{ij} désignent les composantes contravariantes du tenseur fondamental qui détermine la métrique de la surface de Bernoulli, ρ étant la densité du fluide, U le potentiel des forces extérieures et en notant

$$g = \det. g^{ij}, \quad P = \int \frac{dp}{\rho}, \quad \varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i},$$

où q^i désignent les coordonnées curvilignes sur la surface.

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

Nous admettons que les surfaces de Bernoulli sont données et que, par conséquent, les composantes g^{ij} du tenseur métrique sont des fonctions connues des q^i . Le système (I) contient seulement deux fonctions: φ et ρ . Il en résulte qu'il y a aussi une condition de compatibilité. Le problème ainsi posé est équivalent au suivant: déterminer le mouvement possible d'un fluide sur les surfaces B données à priori. Mais il est possible aussi de poser un autre problème: On donne à priori g^{ij} (de manière que l'on puisse résoudre le système (I)); on trouvera de cette façon φ et ρ et par conséquent le mouvement du fluide. Les surfaces de Bernoulli correspondantes seront données par le système

$$(2) \quad g_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^j}.$$

La condition de compatibilité de ce système s'exprime par

$$R_{irs}^k = 0,$$

c'est à dire

$$\frac{\partial \Gamma_{ir}^k}{\partial q^s} - \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial q^r} + \Gamma_{ir}^h \Gamma_{hs}^k - \Gamma_{is}^h \Gamma_{hr}^k = 0$$

et la solution de (2) est donnée par le système:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial q^i \partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial M}{\partial q^k},$$

M (x^α) étant le vecteur de position d'un point quelconque.

2. Dans ce travail nous considérons le premier des problèmes énoncés et nous nous proposons de déterminer le mouvement du fluide dans le cas

$$\Psi \equiv z, \quad z > \frac{1}{\gamma - 1}, \quad \gamma > 1,$$

γ étant le rapport des chaleurs spécifiques (à press. resp. à vol. const). Il faut mentionner que le mouvement qui en résulte n'est pas un mouvement plan, parce que dans chaque plan le mouvement diffère par suite du potentiel φ de vitesse qui, lui-même, prend des valeurs différentes.

Si nous posons, $x = q^1$, $y = q^2$, $z = q^3$ le système (I) devient

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho \varphi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \varphi_y) = 0,$$

$$(3') \quad \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + \int \frac{d\rho}{\rho} - U = z,$$

$$(3'') \quad \varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_y \varphi_{yy} = 1.$$

On voit que l'équation (3'') admet l'intégrale première:

$$(4) \quad \varphi_x^2 + \varphi_y^2 = 2z - 2h(x, y)$$

ce qui permet de transformer la relation (3') comme il suit

$$(5) \quad h(x, y) = \int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\alpha \gamma}{\gamma - 1} \rho^{\gamma-1} = \frac{c^2}{\gamma - 1},$$

où $c = \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}}$ signifie la vitesse locale du son. Nous avons supposé $p = \alpha\rho^\gamma$, $U = 0$.

Les relations (4) et (5) donnent

$$(6) \quad V^2 + \frac{2}{\gamma-1} c^2 = 2z.$$

Il s'ensuit immédiatement que le mouvement est subsonique si l'on a

$$(7) \quad V < \sqrt{2z \frac{\gamma-1}{\gamma+1}},$$

autrement dit, dans tout plan il y a une valeur critique pour les vitesses, valeur qui sépare la région où le mouvement est subsonique, de l'autre où le mouvement est supersonique.

On déduit aisément de (5) la valeur de ρ ,

$$(8) \quad \rho = \left(\frac{\gamma-1}{2\alpha\gamma} \right)^{1/(\gamma-1)} (2z - V^2)^{1/(\gamma-1)},$$

et en écrivant que ρ doit être réel il s'ensuit une limitation supérieure de la vitesse, $V < \sqrt{2z}$.

Nous considérons maintenant le système (3), (3'), (3'') et écrivons l'équation (3) de la manière suivante:

$$\varphi_x = \frac{1}{\rho} \psi_y, \quad \varphi_y = -\frac{1}{\rho} \psi_x$$

moyennant la fonction auxiliaire ψ . A l'aide de l'expression (8) de ρ on obtiendra

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi_x = \left(\frac{\gamma-1}{2\alpha\gamma} \right)^{1/(1-\gamma)} (2z - \varphi_x^2 - \varphi_y^2)^{1/(1-\gamma)} \psi_y, \\ \varphi_y = -\left(\frac{\gamma-1}{2\alpha\gamma} \right)^{1/(1-\gamma)} (2z - \varphi_x^2 - \varphi_y^2)^{1/(1-\gamma)} \psi_x. \end{cases}$$

Le système (9) sera considéré sur une des surfaces B, à cause de sa dépendance particulière de z . En passant aux variables V et θ , le système devient linéaire.

Écrivons

$$\begin{aligned} d\varphi &= V \cos \theta dx + V \sin \theta dy, \\ d\psi &= -\rho V \sin \theta dx + \rho V \cos \theta dy, \end{aligned}$$

ce qui est possible puisque la vitesse est située tout entière sur la surface B [1]. On a aussi

$$dz = dx + i dy = \frac{e^{i\theta}}{V} \left(d\varphi + \frac{i}{\rho} d\psi \right).$$

En écrivant que cette expression est une différentielle totale [2] nous avons

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{V} \frac{\partial V}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi} = V \frac{d}{dV} \left(\frac{1}{\rho V} \right) \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Nous considérons φ et ψ comme des fonctions inconnues et V, θ comme les variables indépendantes. A l'aide de la relation

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{1}{\rho V} \right) = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{V^2} - \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{2z-V^2} \right]$$

nous aurons

$$\varphi_\theta = \frac{V}{\rho} \psi_V, \quad \varphi_V = -\frac{V}{\rho} \left[\frac{1}{V^2} - \frac{2}{\gamma-1} \frac{1}{2z-V^2} \right] \psi_\theta$$

et en faisant les substitutions $\tau = (V^2/2z)$, $m = 1/(\gamma-1)$ nous obtiendrons

$$(10) \quad \begin{cases} \varphi_\theta = \left[\frac{(m+1)\alpha}{z} \right]^m \frac{2\tau}{(1-\tau)^m} \psi_\tau, \\ \varphi_\tau = - \left[\frac{(m+1)\alpha}{z} \right]^m \frac{1-(1+2m)\tau}{2\tau(1-\tau)^{m+1}} \psi_\theta. \end{cases}$$

Ayant égard à la relation $V < \sqrt{2z}$, il s'ensuit que le système doit être considéré seulement pour $\tau < 1$: pour $\tau < 1/(2m+1)$ le système sera du type elliptique et pour $1/(2m+1) < \tau < 1$ le système sera du type hyperbolique.

3. Nous allons considérer seulement le cas $\tau < 1/(2m+1)$ et nous allons donner quelques indications qui seront utiles pour les recherches ultérieures consacrées à approfondir ces considérations. Les résultats acquis déjà dans la Dynamique des gaz nous permettent de faire une extension. En utilisant les études de L. Bers sur les fonctions pseudo-analytiques [4], [5] nous pouvons écrire la solution du système elliptique (10) à l'aide de la série

$$(11) \quad f(\omega_0, \omega, z) = \varphi + i\psi = a_0 + a_1 Z^1(\omega_0, \omega, z) + a_2 Z^2(\omega_0, \omega, z) + \dots$$

avec l'itération

$$(12) \quad Z^n(\omega_0, \omega, z) = n \int_{\omega_0}^{\omega} Z^{n-1} d_\Sigma \omega, \quad \omega = \theta + i\tau.$$

Ici les exposants ont une signification symbolique, les puissances Z^n résultant par Σ intégration à partir de la fonction particulière $Z^0 = \varphi + i\psi = 1$ qui constitue une solution de (10).

On sait que toute intégrale Σ d'une solution du système (10) sera également une solution de ce système.

Les fonctions

$$(13) \quad Z^1 = \theta + \frac{i}{2} \left[\frac{z}{(m+1)\alpha} \right]^m \int_0^\tau \frac{(1-\tau)^m}{\tau} d\tau,$$

et

$$(13') \quad iZ^1 = - \left[\frac{(m+1)\alpha}{z} \right]^m \int_0^\tau \frac{1-(1+2m)\tau}{2\tau(1-\tau)^{m+1}} d\tau + i\theta$$

obtenues à l'aide de la formule (12), seront par conséquent des solutions du système (10). Elles représentent le potentiel complexe, Z^1 de la source et

z^I du tourbillon, ayant des propriétés analogues aux fonctions correspondantes du mouvement plan. On voit que les lignes de courant dans le cas de la source seront variables avec z , tandis que les lignes potentielles correspondantes seront invariables; dans le cas du tourbillon la situation est contraire: les lignes potentielles seront variables d'un plan à l'autre et les lignes de courant seront invariables.

Observons en passant que le système (10) prendra une autre forme si l'on fait le changement de variable

$$(14) \quad \eta = \int \left| \frac{1 - (1 + 2m)\tau}{4\tau^2(1 - \tau)} \right| d\tau = \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1 - a\tau} - 1 - \tau}{\sqrt{1 - a\tau} + 1 - \tau} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - a\tau} - \sqrt{a(1 - \tau)}}{\sqrt{1 - a\tau} + \sqrt{a(1 - \tau)}} \right)^{1/a}}$$

Avec la notation

$$w_1(z, \tau) = \left[\frac{(m+1)\alpha}{z} \right]^m \frac{2\tau}{(1-\tau)^m}, \quad w_2(z, \tau) = \left[\frac{(m+1)\alpha}{z} \right]^m \frac{1 - (1+2m)\tau}{2\tau(1-\tau)^{m+1}}$$

le système (9) deviendra

$$\psi_\eta = \frac{1}{\sqrt{w_1 w_2}} \varphi_\theta, \quad \psi_\theta = - \frac{1}{\sqrt{w_1 w_2}} \varphi_\eta,$$

ou bien

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial X}{\partial \eta} = -X \frac{\partial}{\partial \eta} \ln \sqrt{w_1 w_2} \end{cases}$$

si l'on fait le changement de variable $X(\theta, \eta, z) = (\varphi/\sqrt{w_1 w_2})$. Le coefficient de X dans la seconde relation (15) est une fonction analytique, parce que nous avons exclu le cas des mouvements transsoniques. Le produit $w_1 w_2$, est positif; nous prendrons pour $\ln \sqrt{w_1 w_2}$ sa détermination réelle.

Le système (15) a été souvent traité dans la littérature (voir dans la bibliographie: T. Carleman, J. Nitsche, I. N. Vekua, W. Haack et Hellwig). On y réduit, en général, les divers problèmes aux conditions aux limites aux équations intégrales du type Fredholm sans aucune préoccupation quant à la solution générale du système, c'est-à-dire sans être obligé de donner aussi la solution d'une seconde équation intégrale.

4. *Cas du fluide incompressible.* Nous revenons au système (3), (3'), (3'') en y supposant $\rho = \rho_0 = 1$; les équations (3') et (4) nous fournissent la relation suivante

$$(16) \quad p(xyz) = U(xyz) + h(xy).$$

L'équation (3) devient dans ce cas particulier

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

sur une surface de Bernoulli et avec certaines conditions aux limites. La solution ainsi déterminée nous donnera

$$(18) \quad p(xyz) = z - gz - \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2).$$

Si nous considérons $U \equiv 0$, la relation (16) nous fournira p comme fonction de x et y seulement, ce qui montre que dans des plans distincts la pression est la même aux points correspondants, tandis que le potentiel de vitesse diffère d'un plan à l'autre. La dépendance de φ de la variable z sera donnée par

$$\frac{\partial}{\partial z} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 2$$

ou, si $U \neq 0$ par

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 2 - 2g,$$

le fluide étant considéré pesant.

Prenons comme exemple le cas de l'écoulement fluide d'un réservoir infini. Pour le mouvement plan le problème a été résolu [10]. Nous nous proposons une extension de cette solution à un mouvement sur des surfaces B dans le cas des trois dimensions. Le fluide occupe le domaine $y < 0, z > 0$, d'où il sortira par une ouverture du plan xOz centrée sur l'axe Oz , de largeur $2a$, et non limitée à la partie supérieure.

Faisons encore l'hypothèse suivante: pour $-a \leq z \leq +a, y = 0, z > 0$ la vitesse est indépendante de x .

Donc, il faudra déterminer la solution de l'équation (17) dans les conditions suivantes aux frontières

$$(20) \quad V = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \begin{cases} f(z) & 0 < |x| < a \quad y = 0 \\ 0 & |x| > a \quad y = 0 \end{cases}$$

$$(u, v) \rightarrow 0$$

$$y \rightarrow \infty.$$

Nous employerons la transformée de Fourier et pour cela nous supposons que la fonction $f(z)$ satisfait les conditions Dirichlet; la fonction φ satisfera

les mêmes conditions relativement à la variable x et l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi dz$ sera absolument convergente.

En introduisant les fonctions

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(\xi, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \varphi(xyz) dx, \\ F(\xi, z) &= \frac{f(z)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-i\xi x} dx = \frac{2f(z)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\xi a)}{\xi}, \end{aligned} \right.$$

l'équation (17) se réduit, après la multiplication avec $e^{-i\xi x}/\sqrt{2\pi}$ et après deux intégrations, à une équation différentielle. La condition (20), à la frontière, se réduira à une autre condition pour Φ .

On obtient aisément la solution Φ de cette équation différentielle et la première relation (21) donne

$$(22) \quad \varphi(xyz) = \frac{f(z)}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\xi a)}{\xi} \frac{e^{i\xi x - |\xi|y}}{|\xi|} d\xi$$

à l'aide d'une inversion.

Nous avons

$$(23) \quad \varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \frac{4f^2(z)}{\pi^2} I_1 I_2$$

avec les notations:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sin(\xi a)}{\xi} e^{i\xi\zeta} d\xi, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sin(\xi a)}{\xi} e^{-i\xi\bar{\zeta}} d\xi, \quad \zeta = x + iy.$$

Les valeurs numériques des intégrales I_1 et I_2 se trouvent dans des tables spéciales.

La condition de compatibilité (19) montre que

$$(24) \quad f(z) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2-2g}{I_1 I_2}} z + C.$$

On trouve ainsi les distributions des vitesses à la frontière compatibles avec le type de mouvement considéré. La solution du problème proposé est donnée par (22) et (24).

On peut étendre les résultats obtenus à des mouvements sur des surfaces représentables sur le plan.

Avec une méthode analogue on peut étudier des mouvements sur d'autres surfaces; les calculs seront naturellement plus compliqués.

Le problème ci-dessus, nous a été suggéré par M. le prof. V. Vâlcovici auquel nous exprimons, par cette voie, notre reconnaissance.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] V. VÂLCOVICI, « Rendiconti dei Lincei », vol. XXI, fasc. 5, 1956.
- [2] C. IACOB, « Bullet. math. de la Soc. Roumaine des Sciences », t. 42, 1940; « Mathematica », t. 22, 1946.
- [3] N. TEODORESCU, *La Dérivée aréolaire* (thèse), Paris 1931.
- [4] L. BERS, A. GELBART, « Quarterly of Appl. Mat. », I, 1943; « Trans. Amer. Math. Society », vol. 56, 1944.
- [5] L. BERS, « Bulletin of the Amer. Math. Soc. », vol. 62, Nr. 4, 1956.
- [6] I. N. VEKUA, « Mat. sbornik », vol. 31, Nr. 2, 1952.
- [7] T. CARLEMAN, « Comptes rendus », Paris, 1933, t. 197.
- [8] J. NITSCHKE, « Mathematische Nachrichten », 1951.
- [9] W. HAACK, G. HELLWIG, « Math. Nachr. », 4, Nr. 1-8, 1950-51.
- [10] JAN SNEDDON, *Fourier Transformations*, 1951.

Geodesia. — *Un metodo per la triangolazione aerea analitica.*

Nota di GIUSEPPE INGHILLERI, presentata (*) dal Corrisp. L. SOLAINI.

1. — Il metodo di cui si tratta in questa Nota è la soluzione per via analitica del problema della triangolazione aerea spaziale mediante concatenamento; anteriormente alla costruzione delle macchine calcolatrici elettroniche, tale problema era affrontato solo mediante l'impiego degli apparati restitutori fotogrammetrici.

Come è noto, la ricostruzione della forma, dimensioni e posizione del terreno attraverso i fotogrammi aerei, è possibile se si determinano preventivamente gli assetti spaziali delle camere di presa con l'appoggio di alcuni punti noti del terreno. Poiché la ricostruzione avviene nei restitutori con dimensioni ridotte, si dice che si forma un modello in una determinata scala.

È pure noto che l'«orientamento relativo» dei fotogrammi e di conseguenza la ricostruzione della sola forma del modello è possibile e anzi si effettua normalmente, senza il possesso di punti noti, essendo a ciò sufficienti le relazioni proiettive tra le immagini nei successivi fotogrammi, derivanti dal fatto che esse in parte sono proiezioni centrali di uno stesso oggetto.

Supponiamo allora di possedere una serie di fotogrammi presi ad intervalli regolari durante un volo abbastanza rettilineo e in modo tale che circa il 60 % del terreno fotografato su ciascun fotogramma sia comune a quello che compare sul fotogramma precedente.

Se nella zona comune ai due primi fotogrammi esistono alcuni punti noti (in pratica 4 o 5), questi possono essere orientati assolutamente, ossia se ne può determinare l'assetto spaziale. Per trovare l'assetto del terzo fotogramma, basta allora orientarlo relativamente al secondo e variare la sua distanza da questi fino a che la posizione di un punto la cui immagine appare nei tre fotogrammi successivi non è la stessa nei due modelli.

Se si procede con questo criterio lungo tutta la strisciata, si può prescindere dalla conoscenza di punti del terreno ad eccezione di quelli iniziali. In tale procedimento consiste la triangolazione aerea per concatenamento.

In particolare la triangolazione aerea analitica determina gli assetti delle camere e le coordinate dei punti del terreno mediante un procedimento di calcolo, nel quale si introducono come elementi noti, sia le costanti caratteristiche delle camere, sia le coordinate dei punti sulle lastre, che devono essere misurate per mezzo di uno stereocomparatore.

Perché un procedimento simile possa condurre a risultati sufficientemente precisi e rapidi, è necessario da una parte il possesso di uno stereocomparatore di alta precisione, dall'altra l'uso di una calcolatrice elettronica.

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

Vari sono i procedimenti proposti per la triangolazione analitica; quello esposto in questa Nota è stato studiato per poter eseguire i calcoli numerici in modo relativamente rapido ed anche perché si presta alla introduzione di dati ausiliari di orientamento.

I dati del problema sono: *a*) posizioni dei punti principali dei fotogrammi, che si ritengono coincidenti con le origini degli assi coordinati su essi tracciati, e distanza principale della camera da presa; *b*) coordinate di lastra di alcuni punti, secondo quanto verrà specificato in seguito.

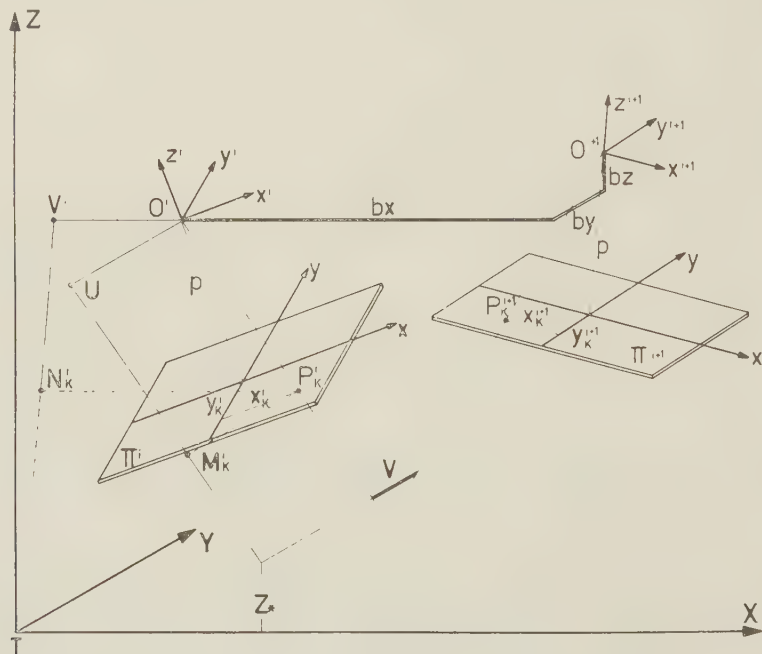


Fig. 1.

Le incognite sono: *a*) gli assetti spaziali dei fotogrammi; *b*) le coordinate dei punti dei modelli ottici e quindi del terreno.

Si prescinde nei calcoli dalla distorsione dell'obiettivo di presa, o meglio si ritiene che le coordinate di lastra siano già state corrette degli effetti della distorsione.

2. *Formule fondamentali.* - Nella fig. 1 la terna $T \cdot XYZ$, rappresenta il riferimento topografico, i punti O^r sono i punti di presa dei fotogrammi di una strisciata e le terne $O^r x^r y^r z^r$ hanno l'asse z^r coincidente con l'asse della camera di presa e gli assi $x^r y^r$ paralleli agli assi di riferimento xy sul piano π^r delle positive dei fotogrammi; i piani π^r sono a distanza p dal centro di presa O^r e sono normali alla direzione dell'asse z^r . Sia P_k un punto del terreno di coordinate X_k, Y_k, Z_k , e sia P_k^r la sua immagine sul fotogramma r -mo; le coordinate di P_k^r , riferite alla terna topografica $T \cdot XYZ$,

piano X_k^r, Y_k^r, Z_k^r . Si indichino infine con X_o^r, Y_o^r, Z_o^r le coordinate topografiche del centro di presa O^r e con $x_k^r, y_k^r, -p$ le coordinate del punto immagine P_k^r rispetto alla terna $O^r x^r y^r z^r$. I punti di presa O^r siano approssimativamente allineati secondo l'asse delle X ; a tale caso ci si può sempre ricondurre rotando opportunamente gli assi X e Y della terna topografica.

Come si è detto, il problema dell'orientamento del fotogramma $(i+1)$ -mo, supposto orientato il fotogramma i -mo, consiste nel trovare la posizione della terna $O^{i+1} x^{i+1} y^{i+1} z^{i+1}$ per cui tutte le rette $O^{i+1} P_k^{i+1}$ intersecano le rette $O^i P_k^i$, essendo P_k^i e P_k^{i+1} le immagini degli stessi punti P_k del terreno sui due fotogrammi considerati, e per cui le coordinate Z_k dei punti del modello hanno valori uguali alle quote dei punti del terreno. È noto, e verrà anche in seguito mostrato, che per il verificarsi di queste condizioni, è necessario e sufficiente che si intersechino solo cinque coppie di rette omologhe e che la

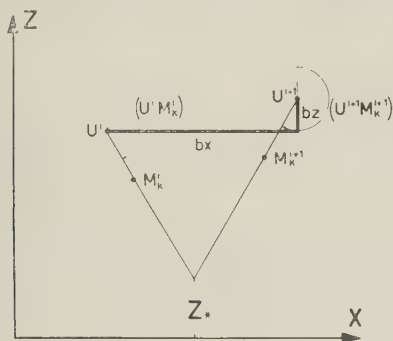


Fig. 2.

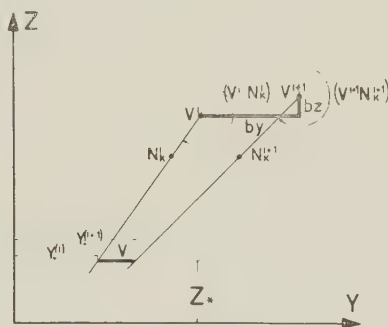


Fig. 3.

intersezione di una sola coppia di rette omologhe avvenga alla quota, nota, del corrispondente punto del terreno.

Orientata la terna $O^{i+1} x^{i+1} y^{i+1} z^{i+1}$ con semplici operazioni di intersezione si possono determinare le coordinate di qualsiasi punto della zona comune ai due fotogrammi.

Nella ipotesi che il fotogramma $(i+1)$ -mo non sia orientato, la generica retta $O^{i+1} P_k^{i+1}$ non incontra la sua omologa $O^i P_k^i$, per cui sui piani $Z = \text{cost}$ queste due rette determinano due punti di intersezione la cui distanza non può, per l'ipotesi fatta, annullarsi; è invece sempre possibile determinare il piano $Z = Z_*$ in corrispondenza del quale la congiungente tali punti è parallela all'asse Y . La distanza tra i punti di intersezione dei raggi col piano Z_* si chiama parallasse di altezza; la si determini in funzione dei parametri angolari che definiscono l'orientamento delle terne $O^i x^i y^i z^i$ e $O^{i+1} x^{i+1} y^{i+1} z^{i+1}$ e della posizione relativa dei due punti di presa.

Si considerino (fig. 2) la proiezione delle due rette omologhe $O^i P_k^i$ e $O^{i+1} P_k^{i+1}$ sul piano $Y = 0$; i punti O^i, O^{i+1} si proiettano nei punti U^i, U^{i+1} ed i punti P_k^i, P_k^{i+1} nei punti M_k^i, M_k^{i+1} . Indicando con la notazione $(U^i M_k^i)$ e $(U^{i+1} M_k^{i+1})$ gli angoli di direzione rispetto all'asse Z dei segmenti orientati

$U^i M_k^i, U^{i+1} M_k^{i+1}$, posto $b_x = X_o^{i+1} - X_o^i$ si ha per la coordinata Z del punto di intersezione

$$(1) \quad Z_* = \frac{b_x + Z_o^i \tan(U^i M_k^i) - Z_o^{i+1} \tan(U^{i+1} M_k^{i+1})}{\tan(U^i M_k^i) - \tan(U^{i+1} M_k^{i+1})},$$

oppure, posto $b_z = Z_o^{i+1} - Z_o^i$,

$$(1') \quad Z_* = Z_o^i + \frac{b_z - b_x \tan(U^{i+1} M_k^{i+1})}{\tan(U^i M_k^i) - \tan(U^{i+1} M_k^{i+1})}.$$

Si consideri ora (fig. 3), la proiezione delle rette $O^i P_k^i, O^{i+1} P_k^{i+1}$ sul piano $X = O$, i punti O^i, O^{i+1} e P_k^i, P_k^{i+1} si proiettano rispettivamente nei punti V^i, V^{i+1} e N_k^i, N_k^{i+1} ; indicando con $(V^i N_k^i)$ e $(V^{i+1} N_k^{i+1})$ gli angoli di direzione dei segmenti orientati $V^i N_k^i$ e $V^{i+1} N_k^{i+1}$ e tenendo presente che la parallasse di altezza definita sopra è

$$V = y_*^{(i+1)} - y_*^{(i)}$$

dove $y_*^{(i)}$ e $y_*^{(i+1)}$ sono le ascisse delle intersezioni delle rette $V^i N_k^i$ e $V^{i+1} N_k^{i+1}$ con la retta $Z = Z_*$ si ottiene

$$(2) \quad V = b_y + b_z \frac{\tan(U^{i+1} M_k^{i+1}) \tan(V^i N_k^i) - \tan(U^i M_k^i) \tan(V^{i+1} N_k^{i+1})}{\tan(U^i M_k^i) - \tan(U^{i+1} M_k^{i+1})} + \\ + b_x \frac{\tan(V^{i+1} N_k^{i+1}) - \tan(V^i N_k^i)}{\tan(U^i M_k^i) - \tan(U^{i+1} M_k^{i+1})}$$

con $b_y = Y_o^{i+1} - Y_o^i$.

È necessario ora esprimere le tangenti degli angoli di direzione che intervengono nelle (1) e (2) in funzione dei parametri angolari di orientamento di ogni fotogramma, ovvero di ogni terna $O^r x^r y^r z^r$.

Tra le coordinate topografiche del punto immagine P_k^r , le coordinate dello stesso punto riferite alla terna $O^r x^r y^r z^r$ e le coordinate topografiche di O^r sussistono le semplici relazioni

$$(3) \quad \begin{cases} X_k^r - X_o^r = x_k^r \cos(x^r X) + y_k^r \cos(y^r X) - p \cos(z^r X) \\ Y_k^r - Y_o^r = x_k^r \cos(x^r Y) + y_k^r \cos(y^r Y) - p \cos(z^r Y) \\ Z_k^r - Z_o^r = x_k^r \cos(x^r Z) + y_k^r \cos(y^r Z) - p \cos(z^r Z). \end{cases}$$

La giacitura della terna $O^r x^r y^r z^r$ rispetto alla $T \cdot XYZ$ sia determinata dai tre angoli seguenti:

φ^r , che il piano ZX forma con il piano $z^r X$;

ω^r , che l'asse z^r forma con l'intersezione dei piani $z^r X$ e YZ ;

κ^r , che l'asse x^r forma con l'intersezione dei piani $x^r y^r$ e $z^r X$.

Dalla fig. 4 si deduce:

$$\begin{aligned}
 & \cos(x^r X) = \cos \kappa^r \cos \varphi^r \\
 & \cos(x^r Y) = -\sin \kappa^r \cos \omega^r - \cos \kappa^r \sin \omega^r \sin \varphi^r \\
 & \cos(x^r Z) = -\sin \kappa^r \sin \omega^r + \cos \kappa^r \cos \omega^r \sin \varphi^r \\
 & \cos(y^r X) = \sin \kappa^r \cos \varphi^r \\
 & \cos(y^r Y) = \cos \kappa^r \cos \omega^r - \sin \kappa^r \sin \omega^r \sin \varphi^r \\
 & \cos(y^r Z) = \cos \kappa^r \sin \omega^r + \sin \kappa^r \cos \omega^r \sin \varphi^r \\
 & \cos(z^r X) = -\sin \varphi^r \\
 & \cos(z^r Y) = -\cos \varphi^r \sin \omega^r \\
 & \cos(z^r Z) = \cos \varphi^r \cos \omega^r
 \end{aligned}$$

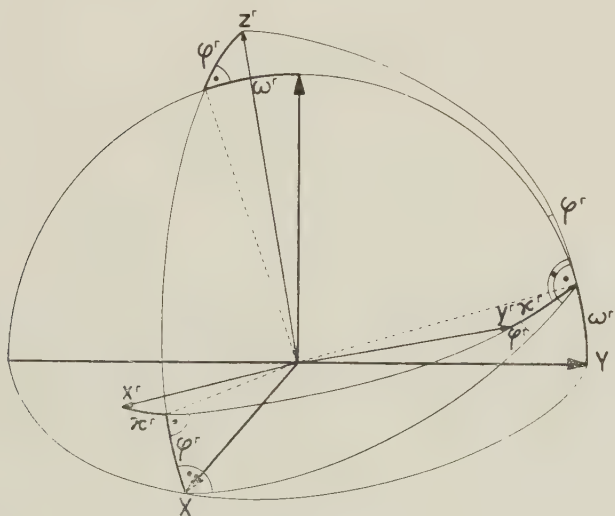


Fig. 4.

Se si considera infine che

$$\tan(U^r M_k^r) = \frac{X_k^r - X_o^r}{Z_k^r - Z_o^r}, \quad \tan(V^r N_k^r) = \frac{Y_k^r - Y_o^r}{Z_k^r - Z_o^r},$$

tenendo presenti le (3) e le (4) si può giungere alla determinazione della parallasse d'altezza V in funzione dei parametri angolari φ , ω e κ relativi alle due terne $O^i x^i y^i z^i$ e $O^{i+1} x^{i+1} y^{i+1} z^{i+1}$ e delle componenti b_x , b_y e b_z della base, ossia della distanza tra le origini delle due terne.

Se il fotogramma i -mo è orientato, sono noti i parametri φ^i , ω^i , κ^i e le coordinate del centro di presa O^i ed inoltre la quota Z_n di un punto P_n del terreno la cui immagine è comune ai fotogrammi i -mo e $(i+1)$ -mo; la conoscenza delle coordinate x_k^i, y_k^i ($k = a, b, c, d, e, n$) delle immagini di

sei punti del terreno [che compaiono anche sul fotogramma $(i+1)$ -mo] permette di calcolare per mezzo delle (3), (4), (5) i valori

$$m_k = \tan(U^i M_k^i) \quad (k = a, b, c, d, e, n)$$

e

$$n_k = \tan(V^i N_k^i) \quad (k = a, b, c, d, e).$$

Per orientare il fotogramma $(i+1)$ -mo occorre valutare φ^{i+1} , ω^{i+1} , κ^{i+1} , b_x , b_y e b_z ; sarà necessario e sufficiente allora scrivere sei equazioni che leghino queste incognite agli elementi noti m_k , n_k , X_o^i , Y_o^i , Z_o^i e Z_n . Cinque equazioni possono essere scritte imponendo l'intersezione di cinque rette omologhe, ovvero l'annullarsi dell'espressione (2) per i cinque punti P_k^{i+1} ($k = a, b, c, d, e$) di cui siano note, per averle misurate, le coordinate x_k^{i+1} , y_k^{i+1} cioè

$$(6) \quad V_k = b_y + b_z \frac{n_k \tan(U^{i+1} M_k^{i+1}) - m_k \tan(V^{i+1} N_k^{i+1})}{m_k - \tan(U^{i+1} M_k^{i+1})} + \\ + b_x \frac{\tan(V^{i+1} N_k^{i+1}) - n_k}{m_k - \tan(U^{i+1} M_k^{i+1})} = 0 \quad k = a, b, c, d, e$$

ed inoltre la sesta equazione, noti naturalmente x_n^{i+1} e y_n^{i+1} ,

$$(7) \quad G = \frac{b_x - b_z \tan(U^{i+1} M_n^{i+1})}{m_n - \tan(U^{i+1} M_n^{i+1})} + Z_o^i - Z_n = 0.$$

In queste equazioni possono apparire esplicitamente per mezzo delle (3), (4) e (5) le incognite φ^{i+1} , ω^{i+1} , κ^{i+1} , oltre a b_x , b_y e b_z . Da notare che il problema può essere risolto anche operando su soli cinque punti; è infatti sufficiente scrivere la (7) per uno dei punti per cui si impone l'annullamento della parallasse, purché, naturalmente, sia nota per questo punto la quota del corrispondente punto del terreno.

3. *Calcoli numerici.* - La soluzione del sistema (6) e (7) si presenta piuttosto complessa, perché le equazioni sono trascendenti; un modo semplice e rapido di affrontare la soluzione numerica è quello di trovare le incognite per approssimazioni successive con il metodo degli iperpiani paralleli. Si può intanto notare che la conoscenza sempre acquisita dei valori approssimati degli elementi di orientamento permette di omettere i laboriosi calcoli altrimenti necessari per separare le radici del sistema, perché fornisce sicuramente il campo in cui si trova l'unica soluzione corrispondente alle condizioni geometriche di presa.

Bisogna però notare che si può avere una indeterminazione della soluzione qualora i punti del terreno considerati per eseguire l'orientamento del fotogramma si trovino su una particolare superficie rigata a cui appartiene anche la retta $O^i O^{i+1}$; questo può però accadere solo per particolari conformazioni del terreno, e naturalmente non in maniera precisa. In questi casi l'indeterminazione scompare, ma piccoli errori di misura delle coordinate dei

punti sulle lastre darebbero luogo a forti errori nell'orientamento del fotogramma; nella quasi totalità dei casi i punti possono però essere scelti in modo da evitare simile difficoltà. La giacitura degli iperpiani paralleli che permette di conoscere con successive approssimazioni le soluzioni del sistema può sempre essere scelta, come noto, tra le giaciture degli iperpiani tangenti alle ipersuperfici (6) e (7) nel campo in cui è separato il gruppo di radici. Si indichi allora con J_0 il determinante jacobiano calcolato nel punto R_0 in cui si deve calcolare la giacitura degli iperpiani tangenti, le cui coordinate $\Delta\varphi^{(0)}$, $\Delta\omega^{(0)}$, $\Delta\kappa^{(0)}$, $\Delta b_x^{(0)}$, $\Delta b_y^{(0)}$, $\Delta b_z^{(0)}$ si possono considerare una prima approssimazione delle incognite. Le correzioni che successivamente vanno sommate algebricamente a questi primi valori per ottenere le soluzioni del sistema, si calcolano con il procedimento iterativo definito da

$$\Delta^{(s)} = J_0^{-1} N^{(s-1)} \quad (s = 1, 2, \dots)$$

dove

$$\Delta^{(s)} = \begin{pmatrix} \Delta\varphi^{(s)} \\ \Delta\omega^{(s)} \\ \Delta\kappa^{(s)} \\ \Delta b_x^{(s)} \\ \Delta b_y^{(s)} \\ \Delta b_z^{(s)} \end{pmatrix},$$

J_0^{-1} è la matrice reciproca di J_0 e $N^{(s-1)}$ è la matrice a 6 righe e una colonna che ha per termini i valori che assumono le espressioni (6) e (7) quando in queste vengono introdotti i valori:

$$\varphi^{(s-1)} = \sum_1^s \Delta\varphi^{(t-1)} \quad b_x^{(s-1)} = \sum_1^s \Delta b_x^{(t-1)}$$

$$\omega^{(s-1)} = \sum_1^s \Delta\omega^{(t-1)} \quad b_y^{(s-1)} = \sum_1^s \Delta b_y^{(t-1)}$$

$$\kappa^{(s-1)} = \sum_1^s \Delta\kappa^{(t-1)} \quad b_z^{(s-1)} = \sum_1^s \Delta b_z^{(t-1)}.$$

Nella pratica conviene scegliere il punto R_0 di coordinate $\varphi = \omega = \kappa = b_y = b_z = 0$ e $b_x = \Delta b_x^{(0)}$ ($\Delta b_x^{(0)}$ è un valore approssimato noto dai dati relativi alla presa dei fotogrammi).

In questo caso i coefficienti di J_0 sono dati, posto

$$\xi_k = \frac{x_k^{i+1}}{p}, \quad \eta_k = \frac{y_k^{i+1}}{p}$$

$$\frac{n_k \xi_k - m_k \eta_k}{m_k + \xi_k} = a_k \quad \frac{1}{m_k + \xi_k} = b_k \quad \frac{\eta_k + n_k}{m_k + \xi_k} = c_k,$$

da

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\delta V_k}{\delta \varphi} \right)_0 = \Delta b_x^{(0)} \cdot b_k (\xi_k a_k + c_k) \quad , \quad \left(\frac{\delta V_k}{\delta \omega} \right)_0 = \Delta b_x^{(0)} \cdot b_k (\eta_k a_k - 1) , \\ \left(\frac{\delta V_k}{\delta x} \right)_0 = \Delta b_x^{(0)} \cdot b_k (\eta_k c_k + \xi_k) \quad , \quad \left(\frac{\delta V_k}{\delta b_x} \right)_0 = -c_k \quad , \quad \left(\frac{\delta V_k}{\delta b_y} \right)_0 = 1 , \\ \left(\frac{\delta V_k}{\delta b_z} \right)_0 = -a_k \quad \quad \quad k = a, b, c, d, e. \end{array} \right.$$

Ed inoltre

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\delta G}{\delta \varphi} \right)_0 = -\Delta b_x^{(0)} b_n^2 (1 + \xi_n^2) \quad , \quad \left(\frac{\delta G}{\delta \omega} \right)_0 = -\Delta b_x^{(0)} b_n^2 \xi_n \eta_n , \\ \left(\frac{\delta G}{\delta x} \right)_0 = -\Delta b_x^{(0)} b_n^2 \eta_n \quad , \quad \left(\frac{\delta G}{\delta b_x} \right)_0 = b_n , \\ \left(\frac{\delta G}{\delta b_y} \right)_0 = 0 \quad , \quad \left(\frac{\delta G}{\delta b_z} \right)_0 = b_n \xi_n . \end{array} \right.$$

I termini della matrice $N^{(0)}$ sono dati da:

$$(10) \quad (V_k)_0 = -\Delta b_x^{(0)} c_k \quad (G)_0 = \Delta b_x^{(0)} \cdot b_n + Z_0^i - Z_n .$$

In pratica i calcoli vanno eseguiti effettuando una compensazione degli errori delle coordinate misurate con il metodo dei minimi quadrati; calcolati i termini m_k e n_k e quindi quelli dati dalle (8) e (9) per un numero di punti superiore a quello strettamente necessario, si ottengono i coefficienti delle equazioni generate, che si possono ridurre allo stesso peso; si calcolano poi i termini noti dati dalle (10) che risultano uguali alle parallassi nei vari punti e ai dislivelli fra le intersezioni, nel piano $Y = 0$, dei raggi riferentisi a punti di quota nota e le quote di tali punti sul terreno, avendo orientato il fotogramma da concatenare secondo i parametri definiti dalle coordinate di R_0 .

Si costruisce il sistema normale ovvero la matrice $A = J_0$. $J_{0(T)}$ e si risolve in maniera indeterminata il sistema, cioè si determina la matrice A^{-1} ; normalizzati anche i termini noti, si ottiene la matrice a sei righe e una colonna M_0 ed eseguendo il prodotto $A^{-1} \cdot M_0$ si deducono i primi valori delle correzioni.

Questi valori sommati algebricamente ai valori definiti dalle coordinate di R_0 danno luogo a dei parametri di orientamento che introdotti nelle (6) e nelle (7) definiscono i valori residui delle parallassi e degli scarti di quota; si ripete quindi l'operazione usando la soluzione indeterminata già esistente, finché le parallassi e gli scarti di quota residui siano ridotti a valori sufficientemente piccoli.

Le tangenti degli angoli di direzione calcolate nell'ultima determinazione delle parallassi residue servono altresì per il calcolo delle coordinate topografiche dei punti del terreno che sono, come si è visto, i dati finali richiesti dal problema. Vengono così determinate anche le coordinate dei punti necessari al successivo concatenamento.

I calcoli numerici eseguiti mostrano che in generale tre iterazioni bastano per ottenere soluzioni sufficientemente approssimate; naturalmente è necessario un maggior numero di iterazioni nel caso in cui i parametri di orientamento del fotogramma sono molto discosti da quelli definiti dalle coordinate di R_0 . I calcoli relativi all'orientamento di un fotogramma eseguiti con una calcolatrice elettrica normale, operando con 7 punti, richiedono circa due ore per la parte generale e circa un'ora per ogni iterazione.

In effetti la soluzione del sistema normale, che consta di 6 equazioni, deve essere eseguita una sola volta; infatti ad ogni iterazione le correzioni vengono trovate mediante una semplice somma di prodotti; si ha cioè un complesso di calcoli che richiede un tempo poco diverso da quello che si dovrebbe impiegare qualora le correzioni fossero trovate con le note formule usate per l'orientamento numerico dei fotogrammi sugli strumenti restitutori, basate sulla misura diretta delle parallassi di altezza.

È opportuno mettere tuttavia in evidenza che, mentre le (6) sono le espressioni rigorose delle parallassi di altezza, valide cioè per qualunque condizione di presa, le formule usate per l'orientamento numerico strumentale derivano da espressioni approssimate, dedotte cioè per il caso di fotogrammi nadirali e di terreno piano e per piccoli valori delle parallassi stesse. Il metodo degli iperpiani equivale ad uno sviluppo in serie delle (6) e conduce perciò ad una rapida convergenza dei calcoli. Le parallassi residue e gli scarti in quota calcolati con le espressioni (6) e (7) risentono solo degli errori originari della misura delle coordinate sulle lastre.

Da notare tra i vantaggi del metodo proposto il fatto che l'orientamento assoluto e relativo vengono determinati simultaneamente e che non vi è bisogno di effettuare rotazioni e traslazioni del complesso dei due fotogrammi per il calcolo delle coordinate dei punti del terreno, per il quale, come si è detto, sono pronti gli elementi necessari dopo eseguita l'ultima determinazione delle parallassi residue.

Il problema può anche essere risolto calcolando prima i parametri $\varphi, \omega, \kappa, b_y/b_x, b_z/b_x$ dell'orientamento relativo e in un secondo tempo in base alla (7) il valore di b_x ; i risultati sarebbero gli stessi qualora si operasse con il numero di punti strettamente necessario, ma effettuando la compensazione, operando con più di cinque punti per l'eliminazione della parallasse e con più di un punto per il dimensionamento del modello, si avrebbero nei due casi risultati diversi poiché la condizione di massima consistenza degli scarti sarebbe relativa a gruppi di scarti diversi.

L'orientamento del primo fotogramma della strisciata può essere ottenuto con una serie di calcoli uguali a quelli che si devono eseguire per i fotogrammi successivi; a questo scopo si sceglie un punto, di coordinate arbitrarie, che sia nella posizione di un ipotetico punto di presa precedente il primo della strisciata; da queste coordinate insieme a quelle, note, dei punti sul terreno, risultano definiti gli elementi m_k ed n_k relativi ad un ipotetico

fotogramma già orientato; noti questi elementi, il calcolo viene eseguito nella maniera esposta.

Si può notare d'altra parte che l'uso delle funzioni circolari, utilissimo qualora i calcoli vengano eseguiti con macchina calcolatrice normale, è poco opportuno nel caso di impiego delle calcolatrici elettroniche; questo inconveniente però è molto lieve, dato che nella programmazione l'uso delle subroutine può essere ridotto a un minimo che non incide sensibilmente sul tempo di calcolo.

In una prossima Nota sarà mostrato come il metodo proposto può essere adattato al caso in cui alcuni elementi di orientamento dei fotogrammi sono forniti dalle indicazioni di strumenti ausiliari durante la presa.

Chimica. — *Sui complessi di cobalti benzoato-pentammina* (*).
Nota di GABRIELLO ILLUMINATI, presentata (**) dal Socio V. CAGLIOTI.

Complessi cobalti-amminici del tipo $[\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{X}]^{++}$, in cui il gruppo coordinato X è il residuo anionico di acidi carbossilici della serie alifatica, sono noti fin dai tempi di Werner ⁽¹⁾ e sono stati oggetto di ulteriori ricerche in questi ultimi anni sia dal punto di vista preparativo ^(2,3) sia da quello chimico-fisico ^(4,5). Complessi analoghi con il residuo anionico di acidi carbossilici della serie aromatica non sembrano invece essere stati mai presi in esame se si fa eccezione di un lavoro di Duff ⁽⁶⁾ che riporta un complesso con un residuo monodentato dell'acido ftalico, $\text{C}_6\text{H}_4(\text{COOH})\text{COO}^-$.

L'interesse che offrono i complessi benzoato-pentamminici del cobalto(III), $[\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{OCOC}_6\text{H}_4\text{R}]^{++}$, risiede nella possibilità di esaminare la reattività e, più in generale, la natura del ponte Co-O-C facendo variare la polarità del legante $\text{RC}_6\text{H}_4\text{COO}^-$ mediante una serie opportunamente scelta dei sostituenti R.

Poiché l'applicazione del metodo generale di preparazione del nitrato dell'acetato-complesso e dei suoi derivati ⁽²⁾ al caso dei nitrati dei benzoato-complessi (schema 1) non sempre risulta soddisfacente a causa della scarsa solubilità in acqua di molti acidi benzoici monosostituiti, è sembrato utile

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Inorganica dell'Università di Roma e Centro di Chimica Generale del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) *Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie*, Verlag Chemie, Berlin, 1930, N. 58, Teil B, p. 186.

(2) *Inorganic Syntheses*, Vol. IV, McGraw-Hill Pub. Co., New York, 1953, p. 175.

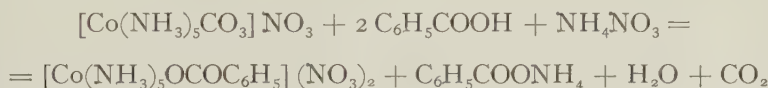
(3) M. LINHARD e B. RAU, «Z. anorg. allg. Chemie», 271, 121 (1953).

(4) M. LINHARD e M. WEIGEL, *ibid.*, 264, 321 (1951).

(5) F. BASOLO, J. G. BERGMANN e R. G. PEARSON, «J. Phys. Chem.», 56, 22 (1952).

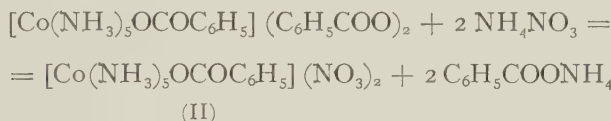
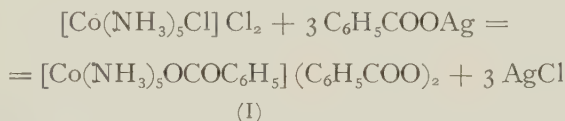
(6) J. C. DUFF, «J. Chem. Soc.», 123, 563, 569 (1923).

prendere in considerazione altri schemi di sintesi allo scopo di confermare la costituzione dei prodotti ottenuti.



SCHEMA 1 (reazione complessiva).

Di questi appare promettente, come metodo generale, uno basato sulla reazione di un purpureo sale con i sali di argento dei vari acidi benzoici in alcool etilico (schema 2). Tale metodo dà inoltre la possibilità di isolare il complesso I come intermedio allo stato puro.



SCHEMA 2.

Nella parte sperimentale sono descritti i procedimenti messi a punto per la preparazione dei complessi I e II con l'acido benzoico non sostituito, secondo gli schemi 1 o 2. Il benzoato I è facilmente solubile in alcool etilico a caldo e insolubile in etere. La sua soluzione satura acquosa è leggermente alcalina per idrolisi. Il nitrato II è insolubile sia in alcool che in etere. La sua soluzione satura acquosa è praticamente neutra. Questo composto presenta massimi di assorbimento a circa 230, 350 e 500 m μ , il primo essendo caratteristico del benzoato gruppo.

PARTE SPERIMENTALE.

Dei materiali di partenza, il nitrato del carbonato pentammino cobalto(III) fu preparato secondo Lamb e Mysels⁽⁷⁾ e il cloruro del cloro pentammino cobalto(III) secondo Garrick⁽⁸⁾.

Metodo 1. — A una miscela di 5 g di nitrato di carbonato pentammino cobalto (0,018 moli) con 40 ml. di acqua distillata si aggiungevano, in pochi minuti, 24,5 g. di acido benzoico (0,20 moli). L'aggiunta era accompagnata da una vivace effervescenza. La poltiglia si trasferiva quindi in una piccola

(7) A. B. LAMB e K. J. MYSELS, « J. Am. Chem. Soc. », 67, 468 (1945).

(8) G. BRAUER, *-Handbuch der preparativen anorganischen Chemie*, F. Enke Verlag, Stuttgart, 1954, p. 1146.

capsula a evaporare lentamente (90 minuti) su bagno maria. La miscela di reazione veniva poi raffreddata in un bagno di ghiaccio-acqua e la massa solida così formata si macinava intimamente in un mortaio con una soluzione di 15 g. di nitrato di ammonio nella minima quantità di acqua. Dopo l'aggiunta di 30 ml. di alcool etilico, il prodotto veniva isolato per filtrazione alla pompa e fatto digerire a freddo con alcool. Il trattamento con il nitrato di ammonio veniva quindi ripetuto allo scopo di assicurare un completo scambio anionico e il prodotto veniva successivamente sbattuto con varie porzioni di alcool assoluto fino a eliminazione completa dell'eccesso di acido benzoico libero e infine lavato con etere. Il complesso così ottenuto si presenta sotto forma di polvere rosso-chiaro.

Anal. Calc. per $[\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{OCOC}_6\text{H}_5](\text{NO}_3)_2$: $\text{NH}_3\%$, 21,88.

Trovato : $\text{NH}_3\%$, 21,48.

Metodo 2. - Una miscela di 1,45 g. di cloruro del cloro pentammino cobalto (0,0058 moli) e di 4 g. di benzoato di argento (0,0174 moli) finemente polverizzati si sospendeva in 20 ml. di alcool assoluto in un bagno a circa 55° e con efficiente agitazione meccanica. Ben presto il prodotto che via via si formava tingeva di un rosso rubino il liquido, ma buona parte rimaneva indisciolta. Dopo un'ora il materiale solido veniva portato nel ditale di un estrattore Soxhlet di piccole dimensioni e l'estrazione veniva eseguita con le acque madri alcooliche rosse diluite con altro alcool fino a 45 ml. L'estrazione deve essere condotta cautamente e per un tempo breve per limitare ogni eventuale decomposizione del complesso con perdita di ammoniaca. Per raffreddamento dall'estratto alcoolico si separavano 1,46 g. di cristalli rosso-Bordeaux. Questa sostanza dà un saggio di Beilstein negativo e brucia con una lunga fiamma fuliginosa.

Anal. Calc. per $[\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{OCOC}_6\text{H}_5](\text{C}_6\text{H}_5\text{COO})_2$: $\text{NH}_3\%$, 16,78 ;
C, 49,66 ; H, 5,96.

Trovato : $\text{NH}_3\%$, 16,98 ;
C, 49,44 ; H, 6,15.

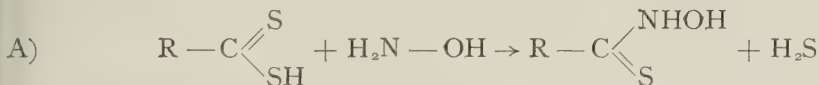
Da un grammo di questa sostanza per trattamento in mortaio, in due successive operazioni, con 0,94 g. di nitrato di ammonio in poca acqua, e dopo ripetuti sbattimenti con alcool e lavaggio con etere, si ottenevano 0,66 g. del nitrato sotto forma di polvere rosso-chiaro. Si può anche ottenere il nitrato direttamente dalla miscela di reazione filtrando il solido alla pompa ed eliminando da esso il cloruro di argento con un eccesso di ammoniaca al 15 %. A tal fine il prodotto si macinava due volte con la soluzione di ammoniaca, si lavava con poco alcool e si convertiva nel nitrato come detto sopra.

Anal. Calc. per $[\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{OCOC}_6\text{H}_5](\text{NO}_3)_2$: $\text{NH}_3\%$, 21,88.

Trovato : $\text{NH}_3\%$, 21,53 ; 22,00.

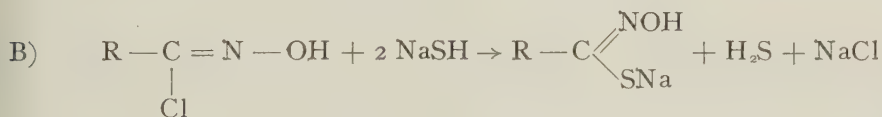
Chimica-organica. — *Sugli acidi tioidrossammici.* — III. *Nuovo metodo di preparazione dagli alogenuri idrossammici* (*). Nota di TULLIO BACCHETTI e ANDREINA ALEMAGNA, presentata (**) dal Socio LIVIO CAMBI.

Finora l'unico metodo di preparazione degli acidi tioidrossammici era quello di L. Cambi ⁽¹⁾ consistente nel far agire l'idrossilammina sui ditioacidi:



Avevamo messo in evidenza nelle due precedenti Note ⁽²⁾ ⁽³⁾ la validità di questo metodo preparando alcuni termini che ci interessavano particolarmente. In questi ultimi tempi anche altri ricercatori se ne sono serviti per preparare l'acido 4-piridintioidrossammico ⁽⁴⁾ ed il fenilacetotioidrossammico ⁽⁵⁾. Il metodo, pur avendo un'applicabilità generale, subisce delle limitazioni a causa delle difficoltà che spesso s'incontrano nella preparazione dei ditioacidi ed è talvolta ingrato per la scomodità di operare con tali sostanze nauseanti e non sempre stabili.

Un nuovo procedimento, da noi individuato, che evita il passaggio attraverso i ditioacidi è il seguente:



Il cloro dei cloruri idrossammici è molto mobile e può essere agevolmente sostituito dal gruppo SH, d'altra parte gli alogenuri idrossammici già noti sono numerosi e garantiscono l'utilità del metodo.

Molteplici saggi da noi effettuati durante la messa a punto del procedimento hanno però dato risultati completamente diversi. Ciò si è verificato quando abbiamo posto a reagire quantità equimolecolari di alogenuro idrossammico e solfidrato sodico. In questo caso la reazione non fornisce come ultimo termine l'acido tioidrossammico desiderato, ma prodotti di trasformazione più spinti in tutto simili a quelli che si formano da due

(*) Lavoro eseguito nei Laboratori dell'Istituto per la Laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) L. CAMBI, questi « Rendiconti », 18 (5) 12, 687 (1909).

(2) T. BACCHETTI e A. ALEMAGNA, « Rend. Ist. Lomb. », Classe sci., 91, 30 (1957).

(3) IBIDEM, 91, 574 (1957).

(4) KOENING, SIEFKEN e OFFE, « Ber. », 87, 825 (1954).

(5) M. G. ETTLINGER e A. J. LUNDEEN, « J.A.C.S. », 79, 1764 (1957).

moli di alogenuro idrossammico ed una di Na_2S ed anche da 1 mole di alogenuro ed una di sale sodico dell'acido tioidrossammico corrispondente. Sullo studio di queste reazioni interessanti per l'apparire di qualche caso di trasposizione riferiremo prossimamente.

La reazione da noi messa a punto procede bene introducendo in un forte eccesso di solfidrato la soluzione molto diluita di alogenuro idrossammico. Poiché quest'ultimo, insolubile in acqua, si scioglie molto rapidamente nella soluzione acquosa di solfidrato ed altrettanto insolubile è l'acido tioidrossammico libero, è evidente che la reazione procede secondo lo schema B) in cui l'acido che si forma salifica spostando l' H_2S dal suo sale. I termini preparati con rendimenti superiori al 90 % del teorico sono quattro, che abbiamo esaminato nell'ordine seguente:

1° *ac. benzotiodrossammico*: $\text{C}_6\text{H}_5\text{—C}(\text{:NOH})\text{SH}$

2° *ac. p. nitrobenzotiodrossammico*: $\text{O}_2\text{N} \cdot \text{C}_6\text{H}_4 \cdot \text{C}(\text{:NOH})\text{SH}$

3° *ac. acetotiodrossammico*: $\text{CH}_3 \cdot \text{C}(\text{:NOH})\text{SH}$

4° *ac. ossal-bistiodrossammico*: $\text{C}_2(\text{:NOH})_2(\text{SH})_2$

Il 1° termine è ben noto; il 2° è abbastanza stabile, ma si decompone alla luce e al calore secondo lo schema noto (Cambi)⁽¹⁾ in nitrile, acqua e solfo. Il 3° è instabile e l'abbiamo riconosciuto mediante il suo S-benzil-estere. Il 4° è il termine più interessante per la particolare sua struttura:



Esso si allinea da un lato con l'acido tetratioossalico, dall'altro con l'acido rubeanidrico. È un solido giallo stabile con p.f. = 117°. All'aria attacca il Nichel metallico per generare il sale rosso vivo.

Riferiremo in una prossima Nota anche sui caratteri di questo acido.

PARTE SPERIMENTALE.

La tecnica di preparazione è comune a tutti i termini. Una mole di alogenuro idrossammico in soluzione alcolica al 5 % viene fatta gocciolare in una soluzione acquosa di 5 moli di NaSH al 3-6 % agitando energicamente. La temperatura della soluzione è quella ambiente o più bassa.

Al termine dell'aggiunta si lascia a sè per 15 minuti e se la soluzione è torbida si purifica estraendo con etere. Le acque vengono acidificate con HCl concentrato mantenendo la temperatura bassa. Si separa l'acido tioidrossammico libero sotto forma oleosa e si completa l'estrazione con etere. Gli estratti eterici si essiccano su CaCl_2 , si distilla il solvente per la maggior parte nel pieno ed infine nel vuoto. Residuano gli acidi tioidrossammici grezzi misti a quantità variabili di S e nitrile. Le rese si aggirano intorno al 90 % del teorico.

Acido benzotiodrossammico ⁽¹⁾: si purifica se necessario sciogliendo il grezzo in Na_2CO_3 , estraendo con etere, filtrando l'eventuale zolfo presente ed acidificando la soluzione acquosa con acidi diluiti.

Acido para-nitrobenzotiodrossammico: il grezzo solidifica, eventualmente raffreddando, e viene purificato cristallizzando da benzolo p.f. = 112° . All'analisi:

	cal. % :	N = 14,14	;	S = 16,19
per $\text{C}_7\text{H}_6\text{N}_2\text{O}_3\text{S}$	trov. :	14,17	;	15,55.

Esterificando con cloruro di benzile in NaOH si ottiene, come nel caso del termine parametilbenzotiodrossammico ⁽²⁾, l'estere S— ed O dibenzilico. Solido bianco con p.f. = $93-94^\circ$ da etanolo. All'analisi:

	cal. % :	N 7,4
per $\text{C}_{21}\text{H}_{18}\text{N}_2\text{O}_3\text{S}$	trov. :	7,33.

Acido acetotiodrossammico: il prodotto grezzo si presenta sotto forma di un olio che decompone molto rapidamente in H_2O , S e CH_3CN . È stato riconosciuto ⁽¹⁾ attraverso l'S-benzilestere ottenuto nel solito modo. P.f. $145-147^\circ$ da etanolo. All'analisi:

	calc. % :	N 7,73
per $\text{C}_9\text{H}_{11}\text{NOS}$	trov. :	7,75.

Acido ossal-bistiodrossammico: Il grezzo è solido e viene cristallizzato da benzolo. P.f. = 117° . All'analisi:

	cal. % :	N 18,41
per $\text{C}_2\text{H}_4\text{N}_2\text{O}_2\text{S}$	trov. :	18,51.

Chimica organica. — *Su un nuovo metodo di preparazione dei 5-isossazoloni e dei loro O-alchileteri* ^(*). Nota di PAOLO GRÜNANGER, presentata ^(**) dal Socio A. QUILICO.

I metodi più comunemente usati per la preparazione dei 5-isossazoloni si basano, com'è noto, sull'azione dell'idrossilammina sui β -chetoesteri o sugli esteri acetilencarbosilici ⁽¹⁾, oppure sulla reazione tra benzaldossime e β -chetoesteri, che porta ai 4-arilidenderivati ⁽²⁾. Più recentemente R. Scarpati e G. Speroni ⁽³⁾ hanno preparato gli acetali dei 5-isossazoloni, facil-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano. Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

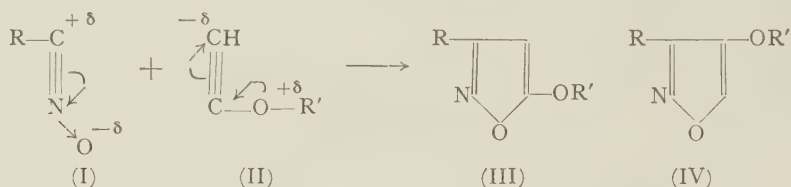
(1) Cfr. A. HANTZSCH, « Ber. », 24, 502 (1891); C. MOREU e I. LAZENNEC, « Bull. », [3], 35, 843 (1906); [4], 1, 1079 (1907); F. FEIST, « Ann. », 345, 100 (1906).

(2) R. FUSCO e C. MUSANTE, « Gazz. », 67, 248, 682 (1937).

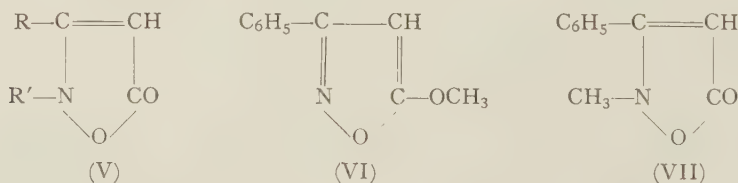
(3) Comunicazione presentata al XVI Congr. Intern. Chim. pura e appl.; cfr. « La Chimica e l'Industria », 40, 48 (1958).

mente idrolizzabili, per reazione tra gli ossidi di nitrili e gli acetali dei chetoni.

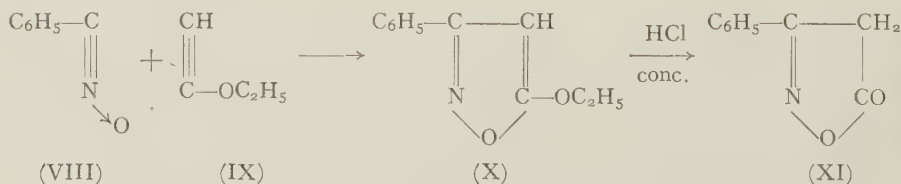
Mi è parso interessante studiare, nel quadro delle nostre ricerche sugli ossidi di nitrili ⁽⁴⁾, l'azione di questi composti (I) sugli alcossiacetileni (II), una classe di sostanze che negli ultimi tempi sono state oggetto di numerosi studi ⁽⁵⁾. Se si ammette come più probabile un meccanismo di reazione ionico nel senso più sotto indicato, il prodotto di reazione deve essere un 5-alcossisossazolo sostituito (di formula III), più probabile del suo isomero in 4 (IV).



Gli alcossi-isossazoli sono pochissimo noti in letteratura, perché, com'è noto, la reazione di alchilazione degli isossazoloni, sia tramite diazometano sia tramite i sali di argento e gli ioduri alchilici, porta prevalentemente agli N-alchilderivati di struttura (V). Solo il 3-fenil-5-metossi-isossazolo (VI) è stato ottenuto come sottoprodotto nella reazione tra diazometano e 3-fenil-5-isossazolone, accanto all'isomero 2-metil-3-fenil-5-isossazolone (VII), che è il prodotto principale ⁽⁶⁾.



Infatti, facendo reagire l'ossido di nitrile più facilmente accessibile, il benzonitrilossido (VIII), con l'etossiacetilene (IX) in soluzione eterea si ottiene con buone rese un prodotto p.f. 75-76° a carattere neutro, che si dimostra essere il 3-fenil-5-etossi-isossazolo (X) attraverso la sua facile trasformazione nel ben noto 3-fenilisossazolone (XI) per azione dell'acido cloridrico concentrato a caldo:



(4) Cfr. A. QUILICO e G. STAGNO D'ALCONTRES, «Gazz.», 80, 140 (1950) e Note successive.

(5) Cfr. G. EGLINGTON, E. R. H. JONES, B. L. SHAW e M. C. WHITING, «J. Chem. Soc.», 1954, 1860; J. F. ARENS e coll., «Rec. trav. chim.», 74, 79 (1955) e Note successive; T. L. JACOBS e coll., «J. Am. Soc.», 62, 1849 (1940); 64, 223 (1942); J. FICINI, «Bull.», 1954, 1367.

(6) E. OLIVERI-MANDALÀ e A. COPPOLA, «Atti R. Accad. Lincei», 20, I, 248 (1911).

In maniera del tutto analoga sono stati ottenuti, per azione rispettivamente del *m. clorobenzonitrilossido* e del *p. bromobenzonitrilossido* sull'etossiacetilene, il *3-m. clorofenil-5-etossi-isossazolo* (III, dove $R=m.$ $Cl-C_6H_4$ e $R'=C_2H_5$) p.f. $95-96^\circ$ e il *3-p. bromofenil-5-etossi-isossazolo* (III, dove $R=p.$ BrC_6H_4 e $R'=C_2H_5$) p.f. $96-97^\circ$, che per breve ebollizione con gli acidi alogenidrici concentrati si trasformano quantitativamente nei rispettivi isossazoloni, identificati mediante i loro derivati.

La relativa accessibilità dei prodotti di partenza, le condizioni blande di reazione e le buone rese (che variano dal 62 all'84 % del teorico in prodotto puro) rendono la reazione sopra descritta il metodo di preparazione più comodo dei 3-aril-5-alcossi-isossazoli, e un metodo alternativo, che si potrebbe rivelare utile in casi particolari, per la preparazione dei relativi 5-isossazoloni.

PARTE SPERIMENTALE.

1) *Azione del benzonitrilossido sull'etossiacetilene: 3-fenil-5-etossi-isossazolo* (form. X). — Una soluzione eterea di benzonitrilossido, preparata nel solito modo ⁽⁴⁾ da g 10 di cloruro benzoidrossamico e seccata brevemente su $CaCl_2$, viene addizionata di g 3,1 di etossiacetilene preparato di fresco ⁽⁷⁾ e la miscela viene fatta bollire a ricadere su b.m. per un'ora. Dopo aver lasciato a sé per una notte, si svapora il solvente fino a secco. Residuano g 6,0 di prodotto ancora grezzo. Dopo due ricristallizzazioni da esano il prodotto pesa g 5,4 (resa 65 % del teorico) e si presenta in ciuffi di aghetti soffici incolori p.f. $75-76^\circ$.

All'analisi:	trov. % :	N	7,32;
per $C_{11}H_{11}O_2N$	calc.	:	7,40.

Il prodotto è insolubile in acqua, abbastanza solubile nei comuni solventi organici, rimane inalterato all'azione degli alcali caustici anche abbastanza concentrati e a caldo, non dà alcuna colorazione con $FeCl_3$. Disciolto in H_2SO_4 concentrato riprecipita inalterato per diluizione.

3-fenil-5-isossazolone (form. XI). — L'etossi-isossazolo sopra descritto non si scioglie in HCl conc. a freddo, ma appena si porta la sospensione all'ebollizione passa prontamente in soluzione; per raffreddamento si separa un prodotto diverso da quello di partenza. Diluendo con acqua ghiacciata e filtrando si ottiene con rese quantitative il caratteristico *3-fenil-5-isossazolone* in aghetti incolori p.f. $151-152^\circ$ (da alcool etilico). Il prodotto in soluzione alcoolica dà intensa colorazione violacea al $FeCl_3$, si scioglie prontamente in alcali diluiti, carbonati alcalini e ammoniaci, e non dà alcuna depressione del p.f. in miscela con il prodotto preparato per il confronto da benzoilacetato d'etile e idrossilammia ⁽⁸⁾.

(7) J. F. ARENS, « Rec. trav. chim. », 74, 271 (1955).

(8) H. HANTZSCH, « Ber. », 24, 502 (1891).

Con benzaldeide in alcool bollente si ottengono scagliette gialline lucenti p.f. 191-192°, che non danno alcuna depressione del p.f. in miscela con il 3-fenil-4-benziliden-5-isossazolone preparato per altra via.

2) *Azione del m. clorobenzonitrilossido sull'etossiacetilene: 3-m. clorofenil-5-etossi-isossazolo* (form. III, con $R=m.$ ClC_6H_4 e $R'=C_2H_5$). - Si disciolgono g 6,3 di m. clorobenzonitrilossido ⁽⁹⁾ e g 2,9 di etossiacetilene appena distillato in 150 cm³ di etere, e si fa bollire la soluzione a ricadere per un'ora. Dopo aver svaporato il solvente residuano g 5,7 di prodotto quasi puro p.f. 94-95° (resa 62 % del teorico). Ricristallizzato da metanolo il prodotto si presenta in aghetti incolori p.f. 95-96°, insolubili in acqua e negli alcali caustici, alquanto solubili nei comuni solventi organici.

All'analisi:	trov. % :	N	6,05 ; 6,18;
per $C_{11}H_{10}O_2NCl$	calc. :		6,26.

3-m. clorofenil-5-isossazolone. - Quando si porta all'ebollizione una sospensione dell'etossiderivato sopra descritto in HCl conc., si ha vivace reazione e trasformazione, con rese pressocché quantitative, in un prodotto diverso da quello di partenza e meno solubile a caldo del termine fenilico non sostituito. Per purificarlo da tracce di prodotto non reagito si scioglie tutto il precipitato in carbonato sodico al 10 %, si filtra, quindi si acidifica cautamente con acidi diluiti. Il precipitato incolore formatosi fonde a 100-102° e in soluzione alcoolica dà intensa colorazione rosso-violacea con $FeCl_3$. Facilmente solubile in ammoniaca, da cui riprecipita inalterato per acidificazione, cristallizza da metanolo diluito in scagliette incolori p.f. 102-103°.

All'analisi:	trov. % :	N	7,32;
per $C_9H_6O_2NCl$	calc. :		7,18.

I valori del p.f. dati in letteratura sono 98° e 104,5° ⁽¹⁰⁾.

3) *Azione del p. bromobenzonitrilossido sull'etossiacetilene: 3-p. bromofenil-5-etossi-isossazolo* (form. III, con $R=p.$ BrC_6H_4 e $R'=C_2H_5$). - Facendo reagire in maniera perfettamente analoga g 6,9 di p. bromobenzonitrilossido ⁽¹¹⁾ e g 2,8 di etossiacetilene in soluzione eterea, si ottengono g 8,5 di prodotto praticamente puro p.f. 94-95° (resa 84 % del teorico). Per ricristallizzazione da metanolo si ottengono larghi prismi incolori p.f. 96-97°.

All'analisi:	trov. % :	N	5,29;
per $C_{11}H_{10}O_2NBr$	calc. :		5,22.

3-p. bromofenil-5-isossazolone. - Facendo bollire brevemente l'etossiderivato con HBr al 48 %, si ha trasformazione quantitativa in un pro-

(9) G. SPERONI, lavoro in corso di pubblicazione.

(10) WAHL e ROLLAND, «Ann. chim.» [10], 10, 20; N. V. KHROMOV e A. E. PORAI-KOSHITS, «J. Gen. Chem. S.S.S.R.», 17, 1816 (1947).

(11) P. GRÜNANGER, «Rend. Accad. Lincei» [8], 16, 726 (1954).

lotto grezzo rosato p.f. 147-149° dec., che si scioglie praticamente tutto in carbonati alcalini. Per ripetute ricristallizzazioni da etanolo e poi da acido acetico glaciale si ottengono scaglette incolori che imbruniscono sui 160° e fondono a 166-167° con dec.

All'analisi:	trov. % :	N 5,82;
per $C_9H_6O_2NBr$	calc. :	5,83.

In soluzione alcoolica il prodotto dà intensa colorazione rosso-violacea con $FeCl_3$, è facilmente solubile in alcali diluiti e in ammoniaca, da cui riprecipita inalterato per acidificazione.

Per trattamento con la quantità stechiometrica di benzaldeide in alcool bollente, dà il 4-benzilidenderivato in aghetti giallini p.f. 153-154° (da ac. acetico glac.).

All'analisi:	trov. % :	N 4,39;
per $C_{15}H_{10}O_2NBr$	calc. :	4,27.

Per trattamento con p. nitrosodimetilanilina in acido acetico glaciale all'ebollizione dà intensa colorazione violacea e per raffreddamento separa un prodotto che cristallizza da acido acetico glaciale in aghetti nero-violacei p.f. 156-157° con dec.

All'analisi:	trov. % :	N 11,20;
per $C_{17}H_{14}O_2N_3Br$	calc. :	11,29.

Genetica vegetale. — *Azioni mutagene e ricombinatorie di tipo Mendeliano della fecondazione incestuosa nella Canapa* (*Cannabis sativa* L.). Nota (*) di FRANCESCO CRESCINI, presentata (**) dal Socio A. CHIARUGLI.

In una precedente Nota (1) ho riferito risultati di osservazioni ultraventennali da me fatte su progenie di Canapa (*Cannabis sativa* L.) ottenute a seguito della fecondazione incestuosa. Essi pongono in evidenza come tale processo possa manifestarsi con azioni mutagene accompagnate dall'apparsa della *pinnatifidofillia* e della *fasciazione dello stelo*, caratteri monofattoriali a comportamento recessivo.

Siffatte azioni mutagene dell'incesto possono rivelarsi anche in misura geneticamente incompleta coll'emersione di semimutanti a fillotassi ver-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Agronomia generale, Coltivazioni erbacee e Genetica vegetale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) Cfr. F. CRESCINI, in «Caryologia», 9, 82-92 (1956).

ticillata, sempre poveri di forme tricotili, in luogo della tipica fillotassi decussata della canapa.

Le informazioni che mi consentono di indurre codeste azioni mutagene dell'incesto in *Cannabis sativa* si basano su due condizioni fondamentali, cioè:

1) sulla imprescindibile purezza genetica dei caratteri normali colpiti da mutazione;

2) sulla immediata apparsa delle forme mutate a seguito del processo della fecondazione incestuosa.

La prima di tali condizioni non può essere suffragata che da osservazioni fatte durante un periodo di tempo sufficientemente lungo su forme mantenute costantemente al coperto da contaminazioni genetiche interessanti i caratteri abnormi considerati. Ho già riferito che, operando colla massima cautela, caratteri monofattoriali a comportamento recessivo difficilmente sfuggono - sia pure in minima parte - la ricombinazione in purezza nelle progenie a fecondazione allogama sottoposte a selezione e moltiplicazione massali. E ciò perché lo stato eterozigotico - per allogamia - di codesti fattori recessivi preesistenti in popolazioni di canapa assoggettate a selezione e moltiplicazione in massa non risulta indefinitamente continuo e capace di mascherare la estrinsecazione di essi in purezza genetica. D'onde l'apparsa, in successive riproduzioni, delle aberrazioni in oggetto nelle proporzioni volute dalla relativa frequenza e dalle probabilità delle ricombinazioni gametiche cointeressate, anche quando si operi una rigorosa eliminazione delle progenie abnormi morfologicamente riconoscibili avanti l'antesi.

La seconda condizione, vale a dire l'emersione immediata dei mutanti a seguito del processo della fecondazione incestuosa, si concreta, in via di fatto, nella rapidità della estrinsecazione del carattere abnorme; la quale trovando subitaneo eco presso la progenie sporofitica di S_1 , giustifica quel concetto di *rivelazione* o *apparsa improvvisa* ritenuto, dagli evoluzionisti del secolo scorso, *conditio sine qua non* della mutazione. Affinché codesta condizione possa avverarsi, devonsi ammettere mutazioni simultanee di fattori omozigoti di caratteri normali e dominanti, nel caso nostro, - portati da gameti ♂ e ♀ - al momento della fusione dei nuclei dell'anteridio e della ovocellula o subito dopo. Essa si collega in via assoluta alla precedente giacché se il gene, a comportamento recessivo, derivato da quello dominante, risultasse già mutato in uno dei genitori al momento della fecondazione incestuosa, mai potrebbe apparire sotto forma di carattere nella immediata generazione sporofitica, mentre la possibilità di questa emersione sussiste laddove entrambi i genitori portano, in condizioni eterozigotiche, il mutante recessivo. Il che appare chiaro negli schemi teorici di cui in appresso.

Indicando con A il fattore normale dominante e con a il mutante recessivo, con x e y rispettivamente i determinanti del sesso ♀ (omogametico) e ♂ della canapa, nella S_1 si avrà:

1° caso

$$\begin{array}{l} \text{♀} \left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{ll} x & x \end{array} \right\} A \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & y \end{array} \right\} A \end{array} \right. \quad \text{♂} \left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{ll} x & x \end{array} \right\} A \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & y \end{array} \right\} A \end{array} \right. \\ \text{♀} \left\{ \begin{array}{l} a \left\{ \begin{array}{ll} x & x \end{array} \right\} A \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & y \end{array} \right\} A \end{array} \right. \quad \text{♂} \left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{ll} x & x \end{array} \right\} A \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & y \end{array} \right\} A \end{array} \right. \end{array}$$

cioè: 25% AA ♀ + 25% AA ♂ + 25% Aa ♀ + 25% Aa ♂; rapporto sessuale = 50% ♂ : 50% ♀ epperò nessun fenotipo del mutante recessivo.

2° caso

$$\begin{array}{l} \text{♀} \left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{ll} x & x \end{array} \right\} A \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & y \end{array} \right\} A \end{array} \right. \quad \text{♂} \left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{ll} x & x \end{array} \right\} A \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & y \end{array} \right\} A \end{array} \right. \\ \text{♀} \left\{ \begin{array}{l} a \left\{ \begin{array}{ll} x & x \end{array} \right\} a \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & y \end{array} \right\} a \end{array} \right. \quad \text{♂} \left\{ \begin{array}{l} A \left\{ \begin{array}{ll} x & x \end{array} \right\} A \\ \quad \left\{ \begin{array}{ll} x & y \end{array} \right\} A \end{array} \right. \end{array}$$

cioè: 12,5% AA ♀ + 25% Aa ♀ + 12,5% AA ♂ + 25% Aa ♂ + 12,5% aa ♀ + 12,5% aa ♂; rapporto sessuale = 50% ♂ : 50% ♀ col 25% di fenotipi mutanti recessivi di cui metà ♂ e metà ♀.

Ma, nell'uno come nell'altro caso, e specialmente nel secondo, avremmo a che fare con genitori geneticamente impuri, colpiti da *inquinamento* sì notevole da non poter sfuggire a osservazioni appena accurate fatte nel corso d'un periodo di tempo sufficientemente lungo e, caso per caso, su alcune centinaia d'individui. In tali condizioni di impurezza genetica, nei riguardi dei caratteri presi in considerazione, l'indagine può mettere in evidenza fatti che, dal lato probabilistico, sembrano eccezionali.

Di ciò fa fede l'esempio che segue.

In una serie di fecondazioni incestuose, cui è stata sottoposta nel 1955 una popolazione di Canapa sicuramente impura per la presenza di determinanti la *pinnatifidofillia*, ho ottenute sei progenie S_1 (prima autofecondazione) una delle quali aveva rivelato qualche individuo a foglie abnormi nell'allevamento del 1956 fatto presso il campo sperimentale di Cornaredo (Milano). Quattro distinte coppie di individui, corrispondenti ad altrettante S_1 , dall'aspetto normale nei rapporti della morfologia delle foglie, sono state risottoposte, nello stesso anno, alla seconda autofecondazione (S_2). Nel 1957, in una, precisamente nella stirpe 54, costituita da 836 individui, ho accertato 616 steli a foglie normali (291 ♂ e 325 ♀) e 220 a foglie pinnatifide (97 ♂ e 123 ♀). Il rapporto sessuale desunto dall'intera popolazione risultava di 100 ♂ : 115 ♀.

Le relative frazioni d'individui a foglie normali e abnormi denunciano una scissione Mendeliana di F_2 sufficientemente significativa come emerge nel saggio del χ^2 sotto esposto.

Infatti:

$$F_2 = 836$$

	Foglie	
	normali	pinnatifide
Osservazioni assolute	616	220
» teoriche (e)	627	209
Deviazione (d)	11	11
(d^2)	121	121
d^2/e	0,192	0,578

$$\chi^2 = \sum \frac{d^2}{e} = 0,770.$$

Tale valore è compreso tra i teorici 0,455 e 1,074 rispettivamente col 50 % e col 30 % di P per un grado di libertà.

Da ciò è dato vedere come le azioni mutagene dell'incesto costituiscano un aspetto delle conseguenze della fecondazione *inter sè* per coppie d'individui ♂ e ♀ in specie a normale dioecia. Esse si potenziano anzitutto col concorso dell'isolamento e successivamente della fusione di goni sessualmente distinti. A fecondazione avvenuta subentrano fenomeni a noi sconosciuti nel significato intimo pur essendo probabile l'intervento di atti di intolleranza o di tossicità in un ambiente diventato eccezionalmente asimbiotico.

Dal punto di vista biologico tali fatti sembrano assumere importanza considerevole poi che porgono il destro a interpretazioni che possono oltrepassare - in via di principio - i limiti non solo della specie e della popolazione studiata ma fin anche quelli dello stesso regno vegetale per avvicinarsi alla *legge naturale* di Knight e Darwin (*Darwin-Knight'sche Naturgesetz*): la fecondazione incrociata è norma e non eccezione (a salvaguardia - ben s'intende - dell'integrità della specie).

Ma, la prudenza mi fa ponderare che la pochezza del nostro sapere vieppiù aumenta a misura si allargano e s'approfondiscono le indagini, onde io penso col sommo Weismann che il massimo che si possa dare allo studio della Biologia non rappresenti che un piccolo, oserei dire troppo piccolo, passo verso l'ottimo, cioè verso il vero.

Zoologia. — *Un nuovo trematode; Dollfusinus frontalis gen. nov. et sp. nov., parassita dei seni naso frontali di Erinaceus europaeus* (*).
Nota di ETTORE BIOCCA e di GIANFRANCO FERRETTI, presentata (**)
dal Socio V. PUNTONI.

Negli anni 1955-57 sono stati esaminati accuratamente 30 esemplari di *Erinaceus europaeus*, catturati nella Provincia di Roma (dintorni di Santa Marinella). Nei seni frontali e nelle cavità nasali di quasi tutti gli animali (25 su 30) abbiamo rinvenuto numerosi trematodi con caratteri morfologici non riferibili ad alcuno dei generi e delle specie note.

Per questi parassiti proponiamo il nome di genere *Dollfusinus* gen. nov. in omaggio a R. Ph. Dollfus che ha tanto contribuito, con il suo lavoro, alla migliore conoscenza del gruppo al quale il nostro parassita appartiene. Come nome di specie proponiamo *Dollfusinus frontalis* gen. nov. et sp. nov., per indicarne il particolare *habitat*.

Gli animali sono stati catturati ed esaminati prevalentemente nei periodi tra febbraio-maggio e settembre-novembre; non è stato possibile mettere in evidenza alcun carattere stagionale dell'infestazione.

Negli animali parassitati i trematodi erano presenti in numeri assai variabili; talvolta ve ne erano pochi, ma di solito erano assai numerosi (30, 40 e anche più di 50).

Tutti i trematodi da noi esaminati erano adulti e avevano l'utero ripieno di uova; solo due esemplari, trovati nel corso di due autopsie diverse, pur essendo sessualmente maturi, erano più piccoli della media e avevano nell'utero solo poche uova.

Le osservazioni sono state eseguite sia su esemplari vivi (la sopravvivenza raggiunge in genere le 48 ore dopo la morte dell'ospite), sia su esemplari fissati e colorati in toto, sia su sezioni istologiche.

La posizione caratteristica dell'ovaio, situato tra i testicoli, la conformazione ad Y del sistema escretore, il decorso dell'utero ecc. permettono il riavvicinamento del genere *Dollfusinus* alla famiglia *Brachylaemidae*. L'apertura sessuale all'estremità caudale del corpo ed i vitellogeni che non sorpassano anteriormente il margine anteriore della ventosa ventrale, ne rendono difficile la inclusione in una delle sottofamiglie in cui la famiglia *Brachylaemidae* viene suddivisa, anche perché queste suddivisioni sono ancora controverse e probabilmente dovranno essere riviste in un prossimo futuro. Infatti secondo alcuni autori *Leucochloridiinae* rappresenterebbe una sot-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma (Direttore: Ettore Biocca).

Ricerche eseguite con sussidi del Consiglio Nazionale delle Ricerche per studi sulla fauna parassitaria italiana.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

tofamiglia di *Brachylaemidae*; secondo Dollfus invece *Leucochloridiidae* sarebbe una famiglia vicina, ma indipendente da *Brachylaemidae*.

Descrizione di *Dollfusinus* gen. nov.

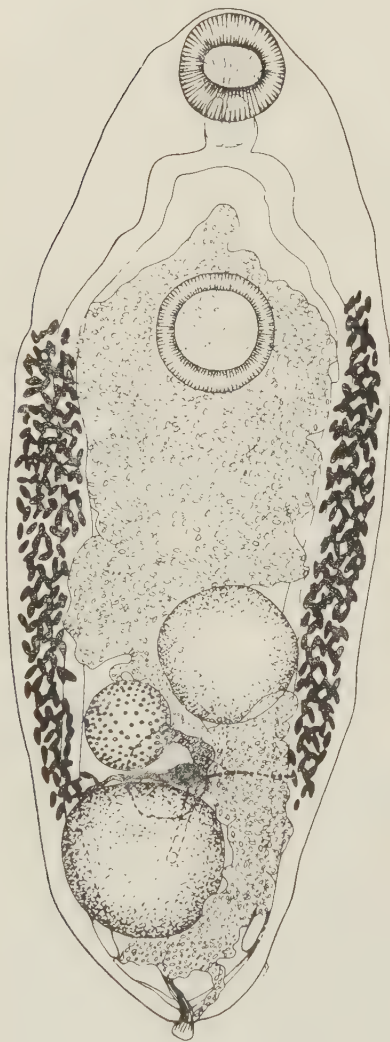


Fig. 1. - *Dollfusinus frontalis* gen. nov. et sp. nov. (Disegno).

Corpo ovale; ventose subeguali; faringe presente, esofago rudimentale o assente; ciechi lunghi e semplici. Gonadi rotondeggianti; ovaio tra i due testicoli. Utero voluminoso con anse ascendenti e discendenti; cirro presente; apertura degli apparati sessuali all'estremità posteriore del corpo. Sistema escretore ad Y con apertura al polo posteriore, dorsalmente all'apertura sessuale. Vitellogeni ai lati del corpo, non sorpassano anteriormente il livello anteriore della ventosa ventrale.

Parassiti di mammiferi (seni naso-frontali).

Specie tipo: *Dollfusinus frontalis* gen. nov. et sp. nov.

Il genere *Dollfusinus* è molto vicino al genere *Leucochloridium*, ma da esso può essere molto facilmente differenziato non solo per habitat completamente diverso, ma soprattutto perché nel genere *Dollfusinus* (e a differenza di quanto si riscontra nel genere *Leucochloridium*) i vitellogeni non sorpassano anteriormente il livello del margine anteriore della ventosa ventrale.

Descrizione di *Dollfusinus frontalis* sp. nov.

Ospite definitivo: *Erinaceus europaeus*.

Localizzazione: seni naso-frontali.

Luogo di provenienza: Santa Marinella (Provincia di Roma).

Esemplari tipo e cotipi: depositati presso l'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

Esemplare tipo: Corpo ovale allungato con larghezza massima a livello della ventosa ventrale; lunghezza mm 3,8; larghezza mm 1,35. Cuticola liscia. Ventosa orale subterminale globosa: lunghezza mm 0,40; larghezza

mm 0,36. Ventosa ventrale in corrispondenza dell'unione del terzo anteriore col terzo medio del corpo, leggermente più grande della ventosa orale; è meno muscolosa e negli esemplari colorati appare quasi trasparente. Lunghezza mm 0,42; larghezza mm 0,38.

Faringe rotondeggiante, lungo mm 0,20, largo mm 0,20; è ricoperto in parte, nel suo margine anteriore, dal margine posteriore della ventosa orale. Esofago praticamente inesistente. Ciechi intestinali semplici di forma cilindroide con pareti sottili, di diametro tra mm 0,15 e 0,05; hanno origine a livello del margine posteriore del fargine, si dirigono lateralmente e disegnano, a volte, nel punto in cui la direzione da trasversale diviene longitudinale un lieve sollevamento cupoliforme; raggiungono posteriormente quasi l'estremità posteriore del corpo. Nei preparati in toto e schiacciati, i ciechi decorrono tra i vitellogeni e le anse uterine, parzialmente ricoperti in alcuni tratti da queste formazioni, che li comprimono e deformano alquanto.

Sistema escretore: i dotti escretori decorrono ai lati del corpo, accanto alle glandole vitellogene e possono, in alcuni casi, spingersi anteriormente fino in vicinanza del margine posteriore della ventosa orale; verso l'estremità posteriore del corpo si riuniscono a forma di Y in un condotto unico, piuttosto breve, che in alcuni esemplari è dilatato in maniera da formare una piccola vescicola escrettrice che si apre all'estremità posteriore del corpo, dorsalmente all'apertura genitale.

Vitellogeni: sono costituiti da piccoli ammassi allungati di forma irregolare, disposti in forma continua ai lati del corpo. Si trovano nel terzo medio e in parte del terzo posteriore del corpo. Il margine anteriore di essi non supera di regola il livello corrispondente al margine anteriore della ventosa ventrale mentre il margine posteriore termina a un livello piuttosto variabile in corrispondenza del testicolo anteriore o dell'ovaio, potendo raggiungere eccezionalmente e sorpassare il testicolo posteriore. In genere i vitellogeni di destra terminano alquanto posteriormente rispetto a quelli di sinistra.

I vitellodutti hanno origine alquanto prima dell'estremità distale dei vitellogeni, si dirigono verso il centro del corpo e si riuniscono in un rigonfiamento rotondeggiante o irregolarmente piriforme di circa mm 0,15 × 0,20.

Gonadi nella metà posteriore del corpo; i due testicoli sono posti su una linea obliqua dall'alto al basso e da sinistra a destra; l'ovaio, situato tra i testicoli, è spostato verso destra.

Ovaio: di forma rotondeggiante, chiaramente più piccolo dei testicoli, lungo mm 0,30 e largo mm 0,30, presenta a volte notevoli variazioni di dimensioni, che non sembrano in rapporto con fattori stagionali. All'esame istologico è possibile riconoscere un ovidutto che si origina dell'ovaio, si dirige verso il centro del corpo e termina in una formazione rotondeggiante (ootipo) situato verso la parte centrale del corpo alquanto posteriormente e dorsalmente all'ovaio.

Canale di Laurer presente: lungo circa mm 0,30 ben evidente nelle sezioni istologiche, sbocca dorsalmente, dopo un decorso quasi diritto verso l'estremità posteriore del corpo.



Fig. 2. - *Dollfusinus frontalis*
(fotografia) (20 \times).

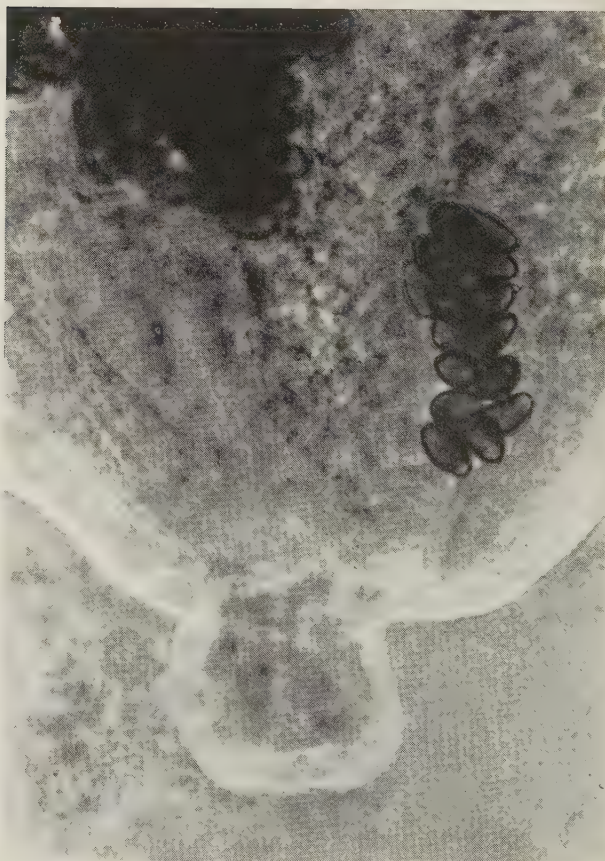


Fig. 3. - *Dollfusinus frontalis*, estremità aborale (esemplare non colorato, montato in Faure: osservazione in contrasto di fase; 260 \times). Al lato del cirro estroflesso si intravede lo sbocco dell'utero.
(Fotografia).

Utero molto sviluppato, occupa buona parte del corpo del parassita; si dirige anteriormente fino a raggiungere a volte il margine posteriore della ventosa anteriore; ridiscende posteriormente insinuandosi tra testicolo anteriore e ovaio, occupando poi la parte distale del corpo. L'ultima parte dell'utero è circondata da un robusto manicotto muscolare (metratermo); sbocca all'estremità posteriore del corpo a sinistra dello sbocco dell'apparato maschile.

TABELLA.

Misure massima, minima e media (in millimetri) di 10 esemplari di Dollfusinus frontalis provenienti da ospiti diversi.

	Massima	Minima	Media
Corpo: lunghezza	4,60	3,25	3,75
larghezza	1,80	1,15	1,40
Ventosa orale: lunghezza	0,50	0,32	0,40
larghezza	0,42	0,30	0,38
Ventosa ventrale: lunghezza	0,50	0,30	0,43
larghezza	0,55	0,30	0,42
Testicolo anteriore: lunghezza	0,60	0,40	0,50
larghezza	0,60	0,48	0,52
Testicolo posteriore: lunghezza	0,60	0,40	0,50
larghezza	0,60	0,48	0,57
Ovaio: lunghezza	0,40	0,13	0,28
larghezza	0,38	0,12	0,28

Testicoli rotondeggianti, subeguali. Il testicolo anteriore è in genere leggermente più piccolo del testicolo posteriore. Misurano: il testicolo anteriore mm 0,52 di lunghezza per mm 0,55 di larghezza; il testicolo posteriore mm 0,48 di lunghezza per mm 0,45 di larghezza. I deferenti si riuniscono in vicinanza del margine posteriore del testicolo posteriore in un deferente comune, che nell'ultimo tratto è circondato da un robusto manicotto. Cirro voluminoso ed estroflessibile che può fuoriuscire dall'apertura genitale, la quale si apre all'estremità posteriore del corpo.

Uova scure, ovalari, munite di un opercolo a uno dei poli e di un piccolo sperone al polo opposto; misurano mm 0,027-0,030 × 0,016-0,019. Le uova possono essere messe in evidenza sia nel secreto nasale che nelle feci.

AUTORI CITATI.

DOLLFUS R. PH., *Sur quelques Brachylaemus de la faune française récoltés principalement à Richelieu (Indre et Loire)*, « Ann. Parasit. hum. comp. », 12 (6), 551-575 (1934), e 13 (1), 52-79 (1935).

SKRJABIN K., *Trematodi degli animali e dell'uomo*, « Acc. Scienze Mosca », 2, 167-306 (1935).

Zoologia. — *Osservazioni sulla classificazione del sottordine Strongylina e creazione di una nuova sotto-famiglia: Archeostrongylinae.* Nota di ALAIN CHABAUD (*), presentata (**) dal Socio V. PUNTONI.

Biocca E. e Ferretti G. hanno recentemente descritto un nuovo genere di strongilo⁽¹⁾: *Archeostrongylus italicus*, che sembra interessante per la sistematica del sottordine *Strongylina*. Per cercar di dargli un posto naturale nella tassonomia, ci sembra utile una breve revisione critica delle attuali classificazioni nel tentativo di precisare le affinità reciproche e il presumibile grado di evoluzione di alcune sottofamiglie del sottordine *Strongylina*.

A) OSSERVAZIONI SULLA CLASSIFICAZIONE DEL SOTTORDINE *Strongylina*.

I sistemi di classificazione recenti di *Strongylina* sono essenzialmente due:

1° Schultz (1951) in un lavoro che non abbiamo potuto consultare, ma che è ampiamente riportato nel volume III di *Opredelitel Paraziticheskikh Nematod* (1952, pp. 18-25) propone una filogenia basata essenzialmente sulla diversa ripartizione nell'ospite. L'albero filogenetico comprende quattro rami: anfibi, rettili, uccelli e mammiferi. Tutte le specie parassite di anfibi, per esempio, si trovano alla base dell'albero e sarebbero dunque arcaiche.

Questa classificazione molto suggestiva sarebbe del tutto soddisfacente se corrispondesse ugualmente ai caratteri morfologici e biologici; ma ci sembra tuttavia che sia difficile una generalizzazione assoluta e che esistano specie già specializzate, adattate in forma secondaria agli anfibi, quindi specie non primitive.

Inoltre alcuni elementi più originali proposti da Schultz nella sua classificazione ci sembrano suscettibili di alcune critiche.

a) Schultz per esempio ritiene che la localizzazione polmonare dei singami sia primitiva e che le specie intestinali derivino da specie polmonari.

La morfologia dei singami al contrario ci induce a pensare che questi parassiti polmonari derivino da forme intestinali. Si osserva infatti (cfr. Chabaud et Rougeaux 1957) una borsa ridotta e, nel fondo della capsula, denti che sembrano in atrofia. Tutto ciò potrebbe interpretarsi molto bene ammettendo un'origine intestinale e un successivo adattamento polmonare.

(*) A. Chabaud Professeur Agrégé di Parassitologia all'Università di Parigi.

(**) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

(1) Ringrazio E. Biocca, Direttore dell'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma, per avere messo a disposizione per il nostro studio, i cotipi del genere *Archeostrongylus* depositati presso l'Istituto di Parassitologia dell'Università di Roma.

Lo stesso ciclo biologico nei singami, che comporta più mute nell'interno dell'uovo o anche, in alcuni casi, l'esistenza di un ospite di attesa, ci sembra essere di un tipo nettamente più evoluto che non in molti altri strongili.

b) Schultz ritiene che gli anchilostomatidi deriverebbero dai tricostrongilidi. Sebbene la famiglia *Ancylostomatidae* riunisca un gruppo molto eterogeneo, tuttavia alcuni generi importanti e rappresentativi, per esempio *Ancylostoma*, *Uncinaria*, ecc. per l'apparecchio sensoriale cefalico, forma dell'esofago, caratteri biologici e morfologici degli stadi larvali ecc. sono probabilmente più primitivi che non molti tricostrongilidi.

2° Chitwood e Chitwood (1950) hanno proposto una classificazione basata soprattutto sugli schemi dati da Railliet e da Baylis e Daubney.

Dougherty (1951) ha basato la propria classificazione su quella dei Chitwood, apportando alcune interessanti modificazioni.

a) La divisione del sottordine *Strongylina* in tre superfamiglie: *Strongyloidea*, *Trichostrongyloidea* e *Metastrongyloidea* è soppressa.

b) La sottofamiglia *Cyathostominae* scompare e i suoi rappresentanti vengono suddivisi tra *Oesophagostominae* e *Cloacininae*.

c) La famiglia *Cloacinidae* è riportata al livello di sottofamiglia compresa nella famiglia *Strongylidae*.

d) La sottofamiglia *Globocephalinae* viene inclusa nella famiglia *Ancylostomatidae* avanti a *Uncinarinae* e *Ancylostomatinae*.

La classificazione dei Chitwood, modificata da Daugherty ci sembra essere attualmente molto naturale. Infatti alcune modifiche di Daugherty sembrano particolarmente felici. La soppressione delle tre superfamiglie *Strongyloidea*, *Trichostrongyloidea*, *Metastrongyloidea* sembra essere giustificata dal fatto che esistono affinità tra generi appartenenti a diverse superfamiglie, a volta più strette che tra generi appartenenti alla stessa superfamiglia.

La soppressione della sottofamiglia *Cyathostominae* e la riduzione della famiglia *Cloacinidae* in sottofamiglia di *Strongylidae* è consigliata dalla esistenza di forme di passaggio tra *Cloacininae* e *Oesophagostominae*: addirittura il limite tra queste due sottofamiglie è spesso difficile ad essere precisato. Le sei labbra, che per principio dovrebbero definire essenzialmente la famiglia sono in realtà molto variabili. Nello stesso genere *Cloacina* sensu stricto, Johnston e Mawson (1938) descrivono *Cloacina elegans* come praticamente senza labbra, *C. australis* con « perhaps a pair of narrower lateral lips between the 4 submedians » e *C. petrogale* con 8 labbra. A nostro avviso ci sembra possibile ricostruire la evoluzione delle 6 labbra primitive di *Strongylidae* ancestrali, nella maniera seguente:

1° Riduzione di volume delle labbra, essenzialmente nella parte distale, che conduce alla formazione di una linguetta apicale (esempio *C. parva*).

2° Riduzione completa del parenchima labiale e le sei labbra sono sostituite da una coronula esterna di 6 linguette (esempio *C. elegans*).

3° Divisione di più in più spinta delle linguette della coronula esterna che da 6 raggiungono un centinaio di elementi (esempio: evoluzione nei generi *Quilonia* e *Murshidia*).

Ugualmente accettabile è l'inclusione di *Globocephalinae* come sottofamiglia di *Ancylostomatidae*.

Tuttavia la presentazione di Daugherty lascia, secondo noi, adito a qualche critica. La collocazione di *Ancylostomatidae* dopo *Strongylidae* e *Metastrongylidae* lascerebbe pensare che *Ancylostomatidae* dovrebbe essere una famiglia molto evoluta. Tuttavia i caratteri di molti generi riuniti in questa famiglia ci invitano a credere ad una origine relativamente arcaica di essi.

Così anche la sottofamiglia *Strongylacanthinae*, collocata da Daugherty tra *Trichostrongylinae* e *Heligmosominae* non ci sembra a suo posto. La definizione della sottofamiglia (posizione della vulva) è alquanto inesatta e sebbene Daugherty allarghi considerevolmente il quadro di ciò che era stato proposto da York e Maplestone (1926) tuttavia il genere *Strongylacantha* dovrebbe logicamente restare rappresentativo della sottofamiglia.

B) POSIZIONE SISTEMATICA DEL GENERE *Archeostrongylus*.

Gli elementi più caratteristici di *Archeostrongylus italicus* sono:

Estremità apicale a simmetria di ordine 6 con papille sensoriali grandi e nettamente staccate le une dalle altre.

Capsula boccale esagonale cilindroide.

Riduzione della borsa caudale; esistenza di costole quasi papilliformi.

Piccole dimensioni degli adulti; grandi dimensioni degli embrioni.

Questi elementi ricordano generi appartenenti a famiglie diverse. La forma della capsula boccale si riavvicina a quella di alcune *Cloacininae* (o *Zoniolaiminae* secondo gli Autori sovietici), quali per esempio *Cyclostrongylus*.

Le costole papilliformi, meno marcate, ma paragonabili a quelle di *Archeostrongylus*, sono figurate da Johnston e Mawson per diverse *Cloacininae* (*Buccostrongylus setifer*, *Cloacina thetidis*, ecc.).

L'estremità anteriore di *Archeostrongylus* ricorda molto quella dei singami e sembra addirittura di un tipo un po' più primitivo, poiché le papille cefaliche sono più nettamente separate. La riduzione della borsa caudale e la disposizione delle costole presenta anche analogie con alcuni singami.

Dal punto di vista biologico non è conosciuto il ciclo evolutivo di *Archeostrongylus*; tuttavia le dimensioni relativamente enormi delle larve, l'abbondanza delle formazioni di aspetto vitellino, l'organizzazione poco differenziata del tubo digestivo lasciano supporre che gli stadi larvali non siano saprofagi nel mezzo esterno. È forse possibile che le due prime mute abbiano luogo nell'interno della cuticola del primo stadio. In questo caso esisterebbero nuovi elementi di riavvicinamento con i singami in cui i due primi stadi evolvono nell'interno dell'uovo.

Ci sembra quindi evidente che i caratteri più importanti del genere *Archeostrongylus* permettano il riavvicinamento sia ad alcuni generi della sottofamiglia *Cloacininae*, che a generi della famiglia *Syngamidae*. Secondo noi i due gruppi non sono molto lontani tra loro. *Cloacininae* rappresentano i più primitivi *Strongylidae* e restano parassiti del tubo digestivo. *Syngamidae* formano un gruppo ugualmente primitivo che potrebbe avere origini comuni con *Strongylidae*. Le due sottofamiglie più rappresentative e cioè *Syngaminae* e *Stephanurinae* sono adattate a vita tissulare o extra intestinale. Hanno quindi elementi che restano primitivi, come la capsula boccale esagonale ed elementi già specializzati (riduzione della borsa caudale, biologia modificata, ecc.).

Archeostrongylus è stato raccolto nell'intestino, ma non sappiamo se in realtà viva affondato nella mucosa presentando un abbozzo di vita tissulare, il che ci permetterebbe di meglio spiegare la mescolanza di caratteri molto arcaici e di caratteri già specializzati analogamente a quanto abbiamo ricordato a proposito dei singami.

Per le esposte ragioni ci sembra giustificato il riavvicinamento del genere *Archeostrongylus* alla famiglia *Syngamidae* e noi proponiamo per lui la nuova sottofamiglia *Archeostrongylinae* con la seguente definizione:

Archeostrongylinae nov. subfam.

Nematodi con estremità anteriore diretta anteriormente. Apertura boccale apicale a simmetria sei, circondata da otto papille submediane grandi e ben separate tra loro. Capsula boccale esagonale cilindroide. Maschio con borsa caudale di piccole dimensioni e alcune costole quasi papiliformi. Femmina con coda senza aculeo terminale. Vulva nel terzo medio del corpo. Viviparità con embrioni molto grandi. Parassiti di mammiferi.

Genere unico: *Archeostrongylus* Biocca e Ferretti, 1957, parassita nell'intestino di *Hystrix*.

AUTORI CITATI.

- BIOCCA E. FERRETTI G. (1957). *Archeostrongylus italicus* n. gen. et sp., parassita di *Hystrix cristata* in Italia. « Rendic. Acc. Naz. Lincei », seduta 5 nov. 1957.
- CHABAUD A. G. e ROUGEAUX M. (1957). *Remarque sur la dentition de Syngamus trachea*. « Ann. Parasit. », in corso di stampa.
- CHITWOOD B. G. e CHITWOOD M. B. (1950). *An introduction to nematology*. (Seconda edizione) Baltimore, 213 pp.
- DOUGHERTY E. C. (1951). *Evolution of zooparasitic groups in the phylum Nematoda, with special reference to host-distribution*. « Journ. Parasit. », 37, 358-378.
- JOHNSTON T. H. e MAWSON P. M. (1938). *Strongyle Nematodes from Central Australian Kangaroos and Wallabies*. « Trans. Roy. Soc. South Austr. », 62, 263-286.
- SCHULTZ R. S. (1951). *Analisi in Opreditel' Paraziticheskik Nematod*. 3, 1952, Mosca, 890 pp. (Ed. Russe).

Fisiologia. — *Fenomeni elettrici provocati da stimolazioni estero-cettive e propriocettive nel cervelletto di Lucertola* (*). Nota di PAOLO CREPAX e PIER LUIGI PARMEGGIANI, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

Com'è noto, dalla corteccia cerebellare di Mammiferi e di Uccelli sono state registrate reazioni elettriche di configurazione definita per effetto d'impulsi afferenti della più diversa natura [letteratura in Bremer ⁽¹⁾, Fadiga, Pupilli e von Berger ⁽²⁾].

Oggetto delle presenti ricerche è lo studio delle modificazioni dell'attività elettrica del cervelletto di *Lacerta viridis* provocate con stimolazioni cutanee o propriocettive. I caratteri generali delle oscillazioni elettriche derivabili dal cervelletto di questa specie sono stati esaminati in una Nota precedente ⁽³⁾, alla quale rimandiamo anche per quei dettagli della tecnica sperimentale che qui non vengono specificati.

La derivazione delle risposte elettriche è stata effettuata col metodo monopolare, impiegando come elettrodo attivo un filo d'argento del diametro di 50 μ . L'elettrodo indifferente era costituito da un filo di argento clorurato del diametro di 0,5 mm, la cui estremità arrotondata veniva appoggiata sulla superficie cauterizzata dei muscoli della nuca. Nei grafici riprodotti le deflessioni verso l'alto indicano la polarità negativa.

Le stimolazioni estero-cettive venivano effettuate in un lembo di pelle mantenuto leggermente sollevato, rispetto ai piani muscolari sottostanti, dagli stessi elettrodi impiegati per la stimolazione e costituiti da due sottili aghi di acciaio (del diametro di 200 μ circa). Il lembo, ricavato dalla pelle che riveste la superficie dorso-laterale del tronco, aveva una forma all'incirca rettangolare ed era isolato lungo tutti i suoi lati, ad eccezione di quello mediale; nel sollevarlo dai piani sottostanti, si aveva cura di non lacerare i filuzzi nervosi che nella sua faccia profonda si portano verso la linea mediana dorsale. Gli elettrodi di stimolazione erano infissi nello spessore della pelle, secondo un piano parallelo alla sua superficie libera ed entrambi in una medesima direzione, per un tratto di qualche millimetro: essi distavano 5-10 mm l'uno dall'altro; in alcune prove di controllo, una sottile lamina di mica veniva interposta tra il lembo di pelle e i muscoli sottostanti. Un procedimento che consente di prolungare alquanto la durata dell'esperimento, riducendo al

(*) Lavoro eseguito col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) F. BREMER, « Rev. neurol. », LXXXVII, 65 (1952).

(2) E. FADIGA, G. C. PUPILLI e G. P. VON BERGER, « Arch. Sci. biol. », XL, 541 (1956).

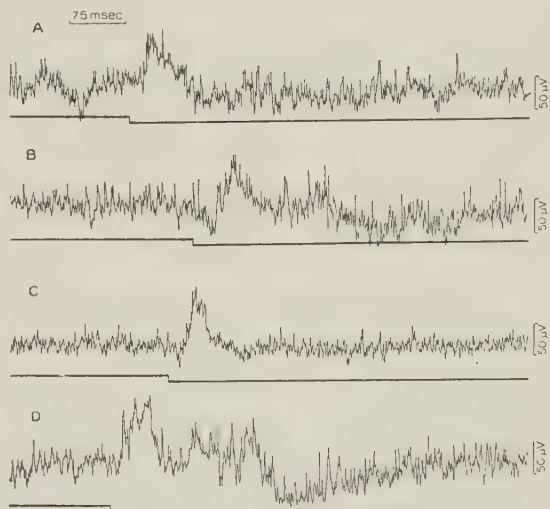
(3) P. CREPAX e P. L. PARMEGGIANI, « Rend. Acc. naz. Lincei », Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8^a, questo volume.

minimo il traumatismo operatorio ed evitando i danni dell'essiccazione, consiste nel sollevare una plica di pelle intatta, larga 4-6 mm, di regioni laterali del tronco e trafiggerla mediante gli elettrodi a 2-3 mm dalla ripiegatura. Le risposte a stimolazioni così eseguite sono risultate identiche a quelle ottenute applicando gli elettrodi nel modo descritto dianzi.

Gli effetti degli impulsi propriocettivi sull'attività elettrica cerebellare sono stati studiati stimolando elettricamente il capo centrale di uno dei due rami muscolari del N. otturatorio: il ramo nervoso prescelto veniva appoggiato su due fili di argento clorurato, del diametro di 80 μ , distanti tra loro all'incirca 1 mm. I filuzzi nervosi isolati venivano umettati con olio di vasellina per impedirne l'essiccazione.

Fig. 1. - Risposte alla stimolazione elettrica della cute registrate dalla superficie dorsale del cervelletto.

I tracciati sono stati ottenuti in animali diversi impiegando impulsi rettangolari della durata di 0,1 msec, il cui voltaggio era rispettivamente di 3 (A), 3 (B), 1 (C) e 1 V (D). In questa figura e in tutte le seguenti la deflessione verso l'alto esprime la polarità negativa. L'inizio dello stimolo è indicato da una deflessione del tracciato inferiore ovvero è riconoscibile dall'artefatto rispettivo. La durata degli stimoli è stata costantemente di 0,1 msec in tutti gli esperimenti, i cui risultati sono riprodotti nelle figure; degli stimoli impiegati sarà quindi specificato soltanto il voltaggio.



Gli stimoli elettrici, in tutti i procedimenti descritti, erano singoli impulsi rettangolari, la cui durata era costantemente di 0,1 msec e di cui veniva fatto variare il voltaggio: utilizzavamo uno stimolatore Grass mod. S4 B connesso con un dispositivo (*stimulus isolation unit* costruito dalla ditta fornitrice dello stimolatore) atto a ridurre l'artefatto della stimolazione.

Gli impulsi destati mediante la stimolazione elettrica cutanea (fig. 1 A, B) ovvero di uno dei rami muscolari del N. otturatorio (fig. 2), provocano definite modificazioni dell'attività derivabile dalla superficie dorsale (4) del cervelletto di Lucertola. Non in tutti i casi, come spiegheremo appresso, i fenomeni elettrici derivabili dalla superficie del cervelletto per le stimolazioni anzidette rappresentano la risposta degli elementi cerebellari a impulsi

(4) Le piccole dimensioni del cervelletto di Lucertola non consentono che alcuni accertamenti assai generali rispetto alla topografia delle risposte alle stimolazioni periferiche. Abbiamo potuto assodare che la stimolazione della pelle di un lato del tronco ovvero di un arto pelvico provoca una reazione elettrica, che può derivarsi sia dalla metà ipsilaterale sia da quella contralaterale della superficie dorsale dell'organo.

afferenti: risposte cerebellari sono i potenziali che gli stimoli di voltaggio non superiore a 1-3 V ⁽⁵⁾ provocano nei preparati in ottimo stato funzionale, nei quali l'attività spontanea dell'organo si palesa con pulsazioni relativamente ampie e di elevata frequenza.

Sebbene le prove eseguite concernano per lo più i fenomeni dovuti a impulsi esterocettivi, nell'esporre i risultati non si farà alcuna distinzione tra gli effetti di tali impulsi e quelli provocati dalle stimolazioni propriocettive, giacché tra gli uni e gli altri non abbiamo notato sostanziali differenze.

L'elemento costante delle reazioni elettriche cerebellari è costituito da una deflessione superficie-negativa, la quale ha una latenza media di msec 20, una durata di 30-40 msec e un'ampiezza di 50-150 μ V. Quasi in tutti i casi tale onda è immediatamente preceduta da una piccola deflessione superficie-positiva (figg. 1 B, C; 2), che chiameremo iniziale per distinguerla dalla oscillazione, dello stesso segno, con cui a volte termina la risposta cerebellare:

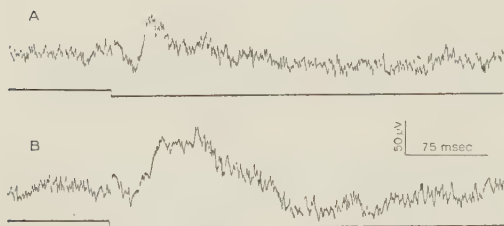


Fig. 2. - Risposte alla stimolazione elettrica del moncone centrale di un ramo muscolare del N. otturatorio sinistro registrate dalla superficie dorsale del cervelletto.

A: V 1. B: V 3. La calibrazione indicata in B è comune ai due tracciati, che sono stati ottenuti in un medesimo animale.

l'onda positiva iniziale ha una latenza assai breve (3-6 msec), compare di solito per stimolazioni periferiche d'intensità sopraliminale e aumenta di ampiezza per aumento del voltaggio degli stimoli, l'ampiezza medesima non superando in ogni caso il 20 % di quella dell'onda negativa.

Quest'ultima, nelle reazioni di aspetto più complesso, è seguita da oscillazioni che si presentano con caratteri alquanto variabili. Si può osservare una seconda onda superficie-negativa, che ha una durata sempre maggiore di quella dello stesso segno che la precede, una latenza di 50-60 msec e un'ampiezza di 50-100 μ V (fig. 1 B, D); inoltre, una deflessione positiva terminale lenta, la quale ha una latenza di 100-200 msec, una durata di 140-300 msec ed un'ampiezza di 30-60 μ V (fig. 1 B, D).

Il voltaggio minimo efficace a destare la reazione cerebellare è in generale di 0,7-2 V. Le risposte destinate da stimolazioni d'intensità liminale sono costituite da una semplice deflessione superficie-negativa; impiegando stimoli sopraliminali di voltaggio crescente, compaiono l'onda positiva iniziale, la seconda deflessione negativa e l'onda terminale, mentre viene aumentando l'ampiezza della deflessione negativa che per sé sola costituisce la risposta cerebellare ottenuta con stimoli di minore voltaggio. Nel corso delle nostre

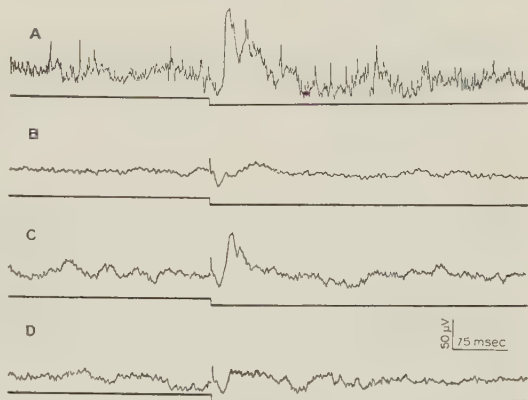
(5) Tali valori di voltaggio, abitualmente impiegati, erano del 50 % circa superiori a quello liminale.

adagini abbiamo generalmente impiegato stimoli, il cui voltaggio (1-3 V) risultava del 50 % circa superiore a quello liminale: per gli stimoli da noi utilizzati, le risposte cerebellari presentano le medesime componenti che si registrano allo stesso preparato per effetto di stimolazioni d'intensità massimale.

Il trattamento della superficie dorsale della lamina cerebellare con una soluzione di cocaina al 5 % provoca entro 2-4 min ⁽⁶⁾ la scomparsa dell'attività spontanea e anche delle onde evocate dalle stimolazioni periferiche, ad eccezione di quella positiva precoce (fig. 3 B). Quando la metà destra o sinistra della lamina cerebellare sia stata lesa meccanicamente, dal tessuto alterato non si registra alcuna risposta alla stimolazione esteroceettiva, mentre i caratteri della reazione derivabile dalla metà contralaterale integra risultano inalterati.

Fig. 3. - Effetti del trattamento con cocaina sui fenomeni elettrici cerebellari provocati dalle stimolazioni cutanee.

Il trattamento della superficie cerebellare con cocaina (cloridrato di cocaina al 5 %) è stato iniziato subito dopo la registrazione A, che riproduce gli effetti di uno stimolo di 2 V. Gli effetti di uno stimolo di un medesimo voltaggio, 5 min dopo l'inizio del trattamento sono riprodotti in B, mentre C e D danno evidenza ai fenomeni elettrici registrabili sulla superficie dorsale del cervelletto rispettivamente 8 e 21 min dopo l'inizio del trattamento impiegando stimoli di 8 V. La calibrazione indicata in D vale anche per gli altri elettrogrammi.



La stricnina, applicata localmente nelle concentrazioni pari a 0,1 % e 1 %, esercita un'azione depressiva sull'attività cerebellare spontanea; tale azione può fare difetto per l'impiego di soluzioni più diluite (0,01 %), nel qual caso può anche osservarsi, benché di raro, l'effetto opposto e cioè un aumento di ampiezza delle onde cerebellari. Le risposte si presentano immutate o diminuite d'ampiezza (fig. 4 B), quando s'impieghino stimoli del voltaggio normalmente impiegato avanti l'applicazione (1-3 V); effettuando le stimolazioni periferiche con voltaggi superiori a 5 V, si fanno invece palesi sia pure non costantemente fenomeni elettrici di ampiezza grandemente accresciuta (fig. 4 C).

(6) Il breve tempo necessario a che la cocaina manifesti i suoi effetti, è da riferire sia alle piccole dimensioni del cervelletto di Lucertola, le quali consentono una cocainizzazione estesa a tutti gli elementi reattivi, sia alla posizione superficiale dello strato dei granuli. Una conferma indiretta di tale spiegazione è fornita dalla seguente osservazione: quando l'attività spontanea e la risposta alla stimolazione periferica effettuata con un impulso di 1-3 V sono completamente abolite per effetto del trattamento con cocaina, dalla superficie dorsale del cervelletto può ancora registrarsi una oscillazione complessa di potenziale (fig. 3 C) a condizione di stimolare la cute con 6-8 V; e la scomparsa di tale oscillazione si osserva solo 10-20 min dopo l'inizio del trattamento, quando l'azione dell'alcaloide si è verosimilmente estesa al pavimento del IV ventricolo (fig. 3 D).

È noto che la stricnina, fatta agire sulla corteccia cerebrale, provoca un aumento della soglia delle risposte elettriche e al tempo stesso un aumento della sincronizzazione degli elementi reattivi [Heinbecker e Bartley ⁽⁷⁾, Chang ⁽⁸⁾, Infantellina ⁽⁹⁾]; a tali osservazioni sono in sostanza conformi quelle fatte sulla corteccia cerebellare. Nel qual caso è tuttavia difficile assegnare un significato preciso ai fatti descritti: come diremo a momenti, l'impiego di stimoli di voltaggio superiore a 5 V vale a rendere manifesti fenomeni elettrici di origine estracerebellare.

Esaminando le risposte cerebellari a stimolazioni succedentisi a brevi intervalli (≈ 1 sec), si osserva come i loro caratteri vengano alterandosi.

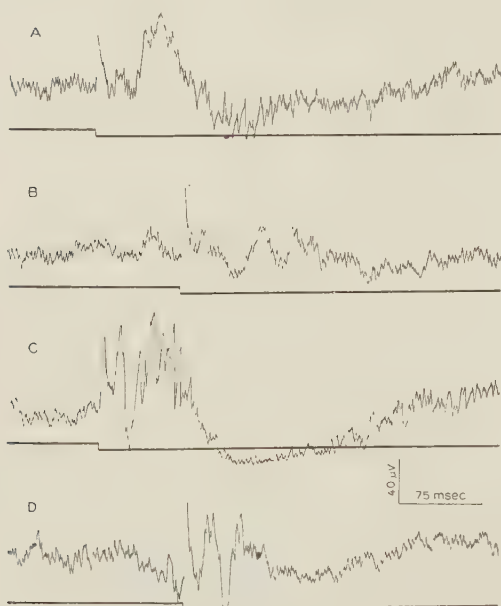


Fig. 4. - Modificazioni delle risposte cerebellari alle stimolazioni cutanee provocate dal trattamento locale con stricnina.

Il trattamento della superficie cerebellare con stricnina (nitrato di stricnina all'1 %) è stato iniziato subito dopo la registrazione A, che riproduce gli effetti di uno stimolo di 2 V, ed è durato 8 min. Gli effetti di uno stimolo di un medesimo voltaggio, 26 min dopo A, sono riprodotti in B. Il tracciato C riproduce i fenomeni elettrici registrati dalla superficie dorsale del cervelletto 1 min dopo B, impiegando uno stimolo di 8 V. In D sono registrati gli effetti di uno stimolo di 2 V, 30 min dopo C. La calibrazione indicata in D vale anche per gli altri tracciati.

Le modificazioni così provocate non concernono in pari misura le diverse componenti della reazione: la risposta cerebellare destata da una stimolazione che succeda con l'intervallo di 1 sec circa a una stimolazione condizionante di eguale voltaggio, rispetto alla risposta precedente è contraddistinta da una cospicua riduzione di ampiezza della deflessione superficie-negativa o addirittura dalla scomparsa della medesima, scomparsa che a ogni modo si osserva costantemente in una terza risposta provocata dopo un eguale intervallo di tempo (fig. 5 C); in modo altrettanto cospicuo si riduce l'ampiezza delle deflessioni che seguono quella negativa, mentre la deflessione superficie-positiva iniziale persiste imm modificata, anche effettuando parecchie stimolazioni ripetute a intervalli di 0,5-1 sec (fig. 5 C).

(7) P. HEINBECKER a. S. H. BARTLEY, «Amer. J. Physiol.», CXXV, 172 (1939).

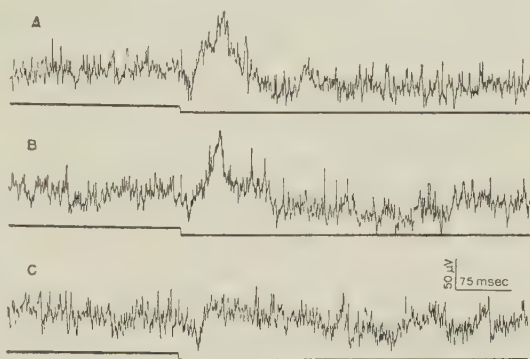
(8) H. T. CHANG, «J. Neurophysiol.», XIV, 23 (1951); XVI, 221 (1953).

(9) F. INFANTELLINA, «Arch. Sci. biol.», XL, 81 (1956).

Quando l'attività spontanea del cervelletto si palesa con pulsazioni di ampiezza assai scarsa, solo con l'uso di stimoli di 6-8 V si destano oscillazioni di potenziale derivabili dalla superficie dorsale dell'organo; in simili condizioni, stimoli di voltaggio inferiore a tali valori sono inefficaci. Il feno-

fig. 5. — Risposte cerebellari destinate a stimolazioni cutanee effettuate a breve intervallo.

Le risposte sono state ottenute a intervalli di 1 sec circa con stimolazioni di una medesima intensità (7 V). La calibrazione indicata in C vale anche per gli altri due elettrogrammi.



meno elettrico che si fa palese (fig. 6), è costituito da un'onda negativa di breve durata (20-30 msec), seguita da un'onda dello stesso segno di durata maggiore (70-80 msec); la latenza della prima onda è di 10-20 msec, quella della seconda di 60-80 msec, mentre l'ampiezza delle due componenti è generalmente compresa tra 80 e 120 µV. Tali oscillazioni non sono modificate dal trattamento della superficie dorsale della lamina cerebellare con una soluzione di cocaina al 5 % (fig. 3 C), fuorché quando si rinnovi e si protragga a lungo (oltre 15-20 min) l'applicazione del farmaco (fig. 3 D); questi fatti

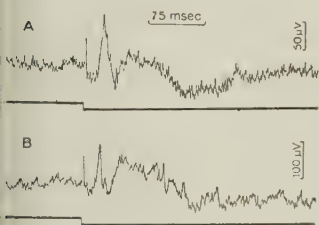


Fig. 6. — Fenomeni elettrici derivabili dalla superficie dorsale del cervelletto in condizioni di attività elettrica spontanea depressa per effetto di stimolazioni cutanee di voltaggio elevato.

I tracciati sono stati ottenuti in animali diversi con stimoli rispettivamente di 6 (A) e 8 V (B).

escludono che le oscillazioni stesse costituiscano la risposta degli elementi cerebellari agli impulsi afferenti. D'altra parte va rilevato che per effetto di stimolazioni cutanee e propriocettive di voltaggio elevato (6-8 V) si registrano dal pavimento del quarto ventricolo, messo allo scoperto con l'asportazione del cervelletto⁽¹⁰⁾, fenomeni elettrici simili a quelli che si derivano dalla superficie del cervelletto stesso in condizioni di attività spontanea depressa e appare verosimile che i fenomeni cerebellari non siano che l'espressione della trasmissione puramente fisica di quelli registrabili dal bulbo.

(10) La registrazione simultanea dei fenomeni elettrici cerebellari e di quelli bulbari gioverebbe assai a chiarire il significato delle onde registrabili in superficie e in profondità, ma l'asportazione del cervelletto si rende praticamente necessaria per effettuare l'esplorazione elettrica del pavimento del IV ventricolo.

Fisiologia. — *Modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale di Gatto per effetto della 5-idrossitriptamina* (*). Nota di PAOLO CREPAX e FRANCESCO INFANTELLINA, presentata (**) dal Socio G. C. PUPILLI.

La 5-idrossitriptamina (HT), sostanza estraibile dalle cellule del sistema enterocromaffine [Erspamer ⁽¹⁾] e dal siero di sangue [Rapport ⁽²⁾], si ritrova in quantità dosabile nel sistema nervoso centrale di Mammiferi [Tawrog e Page ⁽³⁾, Amin, Crawford e Gaddum ⁽⁴⁾, Zetler e Schlosser ⁽⁵⁾, Paasonen e Vogt ⁽⁶⁾]. Quanto all'importanza funzionale di tale sostanza nel sistema nervoso centrale, Marrazzi e Hart ⁽⁷⁾ hanno osservato che nel Gatto l'iniezione della sostanza medesima nella dose di 1 µg/kg per via intracarotidea inibisce la risposta corticale a impulsi transcallosali: gli stessi AA. attribuiscono alla HT la funzione di inibitore della trasmissione degli impulsi nervosi.

Abbiamo indagato gli effetti che la HT esercita sull'attività elettrica, spontanea o provocata, della corteccia cerebrale: gli esperimenti sono stati eseguiti sul lembo corticocerebrale isolato di Gatto, sul Gatto a nevrasse integro e sul preparato di Gatto « cervello isolato ».

Il preparato di *slab* veniva approntato secondo la tecnica descritta da Burns ^(8,9) e da Burns e Grafstein ⁽¹⁰⁾. Per l'allestimento del « cervello isolato », nel Gatto in narcosi eterica profonda si eseguiva la recisione mesencefalica immediatamente dietro i *colliculi posteriores*, mediante una spatola ricurva, secondo il procedimento di Bremer ⁽¹¹⁾.

L'attività elettrica del lembo, derivata con metodo monopolare, era amplificata, rivelata e registrata rispettivamente mediante un preamplificatore ad accoppiamento diretto Tönnies, un oscillografo catodico Du Mont 322 e un fotochimografo Grass.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) V. ERSPAMER, « Arch. exp. Path. Pharmacol. », CXCVI, 343 (1940).

(2) M. M. RAPPORT, « J. biol. Chem. », CLXXX, 961 (1949).

(3) M. B. TAWROG a. I. H. PAGE, « Amer. J. Physiol. », CLXXV, 157 (1953).

(4) A. H. AMIN, T. B. B. CRAWFORD a. J. D. GADDUM, « J. Physiol. », CXXVI, 596 (1954).

(5) G. ZETLER u. L. SCHLOSSER, « Arch. exp. Path. Pharmacol. », CCXXII, 345 (1954).

(6) M. K. PAASONEN a. M. VOGT, « J. Physiol. », CXXXI, 617 (1956).

(7) A. S. MARRAZZI a. E. R. HART, « Science », CXXI, 365 (1955).

(8) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXI, 50 (1950).

(9) B. D. BURNS, « J. Physiol. », CXII, 156 (1951).

(10) B. D. BURNS a. B. GRAFSTEIN, « J. Physiol. », CXVIII, 412 (1952).

(11) F. BREMER, « C. r. Soc. Biol. », CXVIII, 1235 (1935).

Negli esperimenti eseguiti sul Gatto integro e sul Gatto « cervello isolato », i potenziali elettrici corticali delle regioni frontali, parietali e occipitali erano derivati col metodo dipolare e registrati mediante un elettroencefalografo a 8 penne scriventi (Grass mod. III D): l'attività elettrica veniva derivata da aree simmetriche dei lobi esplorati secondo schemi costanti.

Per la stimolazione dei preparati di *slab* ci siamo serviti di uno stimolatore Grass e di elettrodi costituiti da fili di platino. Lo stimolo elettrico singolo era un'onda rettangolare della durata di 0,5 msec; la stimolazione iterativa era costituita da impulsi rettangolari di durata costante (0,5 msec), che per 5 sec si succedevano alla cadenza di 100 Hz; i valori della tensione corrispondevano al 150–200 % circa dei valori di soglia determinati, nel preparato in esame, per lo stimolo singolo.

Negli esperimenti eseguiti sul lembo corticocerebrale, la soluzione di HT era applicata localmente secondo il procedimento di Baglioni e Magnini⁽¹²⁾ ovvero introdotta nell'arteria carotide comune contralaterale rispetto all'emisfero utilizzato per allestire il preparato; nei saggi eseguiti sull'animale con nevrasse integro e sul Gatto « cervello isolato », veniva iniettata per via intracarotidea. Per l'applicazione locale, abbiamo preparato soluzioni (in NaCl al 0,9 %) di picrato di 5-idrossitriptamina in concentrazione da 1 : 10⁵ a 1 : 10³ e di solfato di creatinina e 5-idrossitriptamina in concentrazione da 1 : 10⁵ a 2 : 10². Il trattamento locale durava per 2–8 min.

La quantità della soluzione di HT (sale) iniettata per via intracarotidea era sempre pari a 1 ml, qualunque fosse la dose di sostanza da somministrare (da 5 µg a 2 mg). Nell'eseguire la iniezione intracarotidea avevamo cura di ridurre al minimo lo stiramento del vaso, evitando di interrompere il flusso del sangue: in ogni caso, introdotto l'ago della siringa nel lume vasale, avanti di effettuare l'iniezione ci assicuravamo che le manovre preparatorie non avessero modificato il tracciato elettrico corticale.

Non si è osservato differenza apprezzabile nell'azione dei due sali di HT adoperati (picrato di 5-idrossitriptamina e solfato di creatinina e 5-idrossitriptamina), che contengono all'incirca la stessa quantità di HT base [rispettivamente 41 e 43 %; cfr. Erspamer⁽¹³⁾]; e l'intensità dell'effetto della soluzione di un sale è risultata sostanzialmente paragonabile a quella della soluzione dell'altro sale di pari concentrazione. Nella esposizione dei risultati sperimentali non verrà perciò indicato specificamente il sale usato.

1) Il trattamento con soluzione di HT (sale), nelle diverse concentrazioni usate (da 1 : 10⁵ a 2 : 10²), non provoca di per sé la comparsa di pulsazioni elettriche in lembi che non manifestano attività spontanea. Nei preparati di lembo che presentano un'attività ritmica (il 40 % dei casi, secondo la statistica fatta in questo Laboratorio), contraddistinta da scariche di onde difasiche della frequenza di 65 Hz e iscritte di norma su una defles-

(12) S. BAGLIONI e M. MAGNINI, « Arch. Fisiol. », VI, 240 (1909).

(13) V. ERSPAMER, *Il sistema cellulare enterocromaffine e l'enteramina (5-idrossitriptamina)*. « Rendiconti scientifici Farmitalia », I (1954).

sione positiva, dopo il trattamento con soluzione di HT (sale) di concentrazione da $1:10^4$ a $1:10^3$ si osserva una intensificazione dell'attività medesima: la durata delle singole scariche e la frequenza delle onde difasiche non si modificano, mentre si accorcia la pausa che intercorre tra una scarica e la successiva. Per soluzioni di concentrazione più elevata (da $5:10^3$ a $2:10^2$), si hanno effetti depressivi, con diminuzione della frequenza delle scariche e dell'ampiezza sia della deflessione positiva sia delle onde inscrittevi. Effetti sostanzialmente uguali si ottengono in lembi dotati di attività ritmica, quando si inietti la sostanza per via intracarotidea: l'aumento della frequenza delle scariche compare per effetto della iniezione di $5-10 \mu\text{g}$ di HT (sale) e all'opposto la diminuzione della loro frequenza e l'appiattimento dei *bursts* si osserva per effetto di dosi più elevate (μg 15-25).

2) L'applicazione di uno stimolo isolato, di sufficiente tensione (2-4 V), sul lembo isolato di corteccia cerebrale provoca l'attività dei neuroni corticali profondi: in un medesimo preparato il valore soglia di tale risposta si mantiene costante per alcune ore. Il trattamento locale del lembo con soluzioni

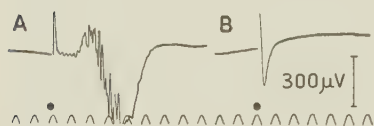


Fig. 1. - Effetti della HT sulla risposta del lembo isolato corticocerebrale di Gatto, a uno stimolo elettrico singolo. Tra A e B, il preparato è stato trattato per 7 min con una soluzione di solfato di creatinina e 5-idrossitriptamina $2:10^2$.

A, prima del trattamento: risposta a uno stimolo di tensione liminale. B, 16 min dopo l'inizio del trattamento: risposta a uno stimolo di tensione del 280 % superiore a quello di A.

di HT (sale) di concentrazione da $1:10^4$ a $2:10^3$ abbassa (del 15 %, in media) il valore del voltaggio liminale dello stimolo; per concentrazioni più elevate (da $5:10^3$ a $1:10^2$) tale valore cresce, l'aumento essendo notevole (30-60 %) e in genere maggiore per le concentrazioni più alte.

3) Il trattamento con HT modifica alcune caratteristiche della risposta del lembo allo stimolo isolato. L'onda superficie-negativa della durata di 10-30 msec e dell'ampiezza di μV 250 (μV 50-750) con cui s'inizia la risposta nel lembo non trattato, quando la distanza tra punto stimolato e area di derivazione è inferiore a 5-10 mm, rimane immodificata per il trattamento con HT nelle varie concentrazioni usate (fig. 1). L'ampia e lenta onda superficie-positiva che di regola segue la deflessione negativa ha un'ampiezza media di μV 740 (i valori estremi riscontrati sono di 360 e 1300 μV) e una durata di 0,3-4 sec e si presenta intercisa da onde difasiche (μV 25-350) della frequenza di 65 Hz: dopo il trattamento con la soluzione di HT (sale) di concentrazione da $1:10^4$ a $5:10^4$, l'onda superficie-positiva presenta un aumento di ampiezza (del 20 % circa) e di durata (del 33 % circa), mentre per concentrazioni più elevate (da $1:10^3$ a $1:10^2$) la sua ampiezza e la sua durata sono diminuite; all'aumento e rispettivamente alla diminuzione di ampiezza della deflessione positiva si accompagnano di solito variazioni, dello stesso segno, di ampiezza delle piccole onde difasiche che su

quella sono iscritte; per una concentrazione di HT (sale) pari a $2:10^2$, tali onde difasiche scompaiono completamente.

4) Le variazioni della eccitabilità del lembo e delle caratteristiche della risposta allo stimolo elettrico singolo che sono state osservate dopo la introduzione di $5-10\text{ }\mu\text{g}$ di HT (sale) per via intracarotidea, sono le seguenti: abbassamento della soglia, aumento dell'ampiezza della deflessione positiva e delle onde inscrittevi, aumento della durata della risposta. Questi effetti scompaiono dopo $10-15\text{ min.}$ Effetti depressivi che perdurano fino a $20-30\text{ min.}$, si manifestano dopo introduzione per via intracarotidea di $15-25\text{ }\mu\text{g}$ di HT (sale). L'onda iniziale superficie-negativa non si modifica, qualunque sia la dose della sostanza ($\mu\text{g } 5-25$) iniettata.

5) La stimolazione iterativa provoca, nel 70 % dei preparati di lembo corticale, la comparsa di una o poche scariche di onde durante la stimolazione e talora un'attività postuma, assai breve ($1-2\text{ sec.}$): in preparati siffatti il trattamento locale con soluzione di HT (sale) di concentrazione da $1:10^4$ a $5:10^4$, ovvero l'iniezione per via intracarotidea di $5\text{ }\mu\text{g}$ della sostanza, non provocano modificazioni sostanziali della risposta, mentre l'applicazione di soluzioni più concentrate (da $1:10^3$ a $2:10^2$) ovvero l'iniezione di quantità più elevate ($10-20\text{ }\mu\text{g}$) riducono ulteriormente la scarsa attività postuma del preparato. In quei preparati di *slab* (il 30 % all'incirca) in cui la stimolazione iterativa provoca la comparsa di una più persistente ($3-30\text{ sec.}$) attività pulsatoria postuma, dopo applicazione di soluzione di HT (sale) di concentrazione da $1:10^4$ a $5:10^4$ ovvero dopo iniezione intrarteriosa di $\mu\text{g } 5$ della sostanza, si nota una depressione della reattività alla stimolazione: l'attività postuma manca, ovvero la sua durata si riduce notevolmente. L'effetto depressivo per altro è assai fugace: $5-10\text{ min}$ dopo la fine del trattamento locale o della iniezione, si manifestano risposte simili a quelle ottenute nel medesimo preparato avanti che si faccia agire la sostanza. Quando il lembo venga trattato con soluzione di HT (sale) di concentrazione pari o superiore a $1:10^3$ ovvero quando si iniettino nella A. carotide $10-20\text{ }\mu\text{g}$ della sostanza, gli effetti depressivi permangono più a lungo ($20-25\text{ min.}$).

6) L'attività elettrica cerebrale del Gatto con nevrasse integro non appare modificata dopo l'iniezione per via intracarotidea di $20-400\text{ }\mu\text{g}$ di HT (sale). Per la somministrazione di $\mu\text{g } 500$ della sostanza, si osservano modificazioni del tracciato: $30-40\text{ sec}$ dopo la fine della iniezione, nelle sedi di derivazione dell'emisfero cerebrale dello stesso lato da cui la iniezione è stata effettuata, si rileva uno scarso aumento dell'ampiezza delle grandi onde corticali, il cui contorno inoltre si fa più liscio per effetto della diminuzione del numero e dell'ampiezza delle onde di maggiore frequenza. Con la somministrazione di una dose più elevata (2 mg.), l'alterazione dell'elettrogramma corticale compare più precocemente (10 sec dopo la fine dell'iniezione) e gli effetti sono bilaterali, manifestandosi dapprima nell'emisfero del lato utilizzato per l'iniezione ed estendendosi poi rapidamente (dopo $20-30\text{ sec.}$) all'altro. Dai tracciati ottenuti si rileva che ad un'attività costi-

tuita da grandi onde con contorno liscio si alterna, a intervalli e per durate irregolari, una notevole riduzione di ampiezza delle pulsazioni corticali (fig. 2). Gli effetti descritti durano 5-10 min.

7) Sull'attività elettrica corticale del Gatto « cervello isolato », l'iniezione per via intracarotidea di 20-200 μg di HT (sale) è inefficace. Dopo la iniezione di μg 200-300 della sostanza, si rende manifesta una riduzione dell'ampiezza delle onde corticali: l'alterazione compare dapprima (30 sec

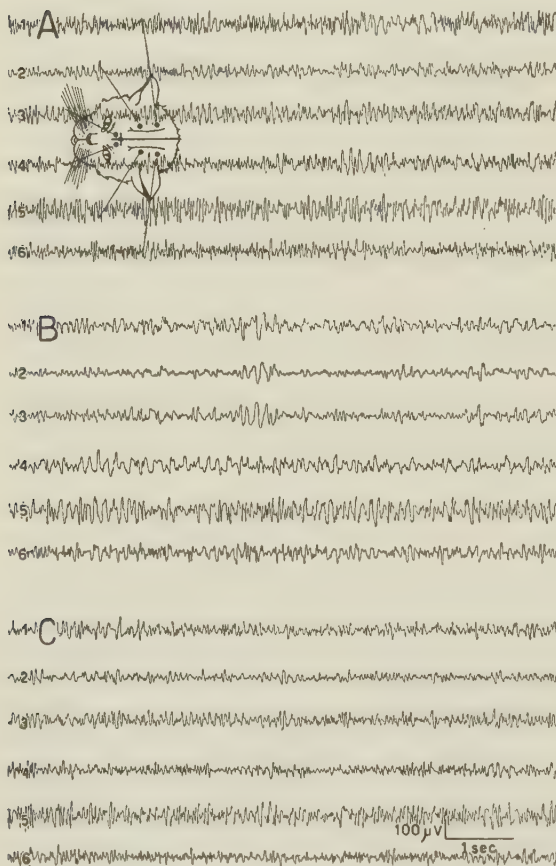


Fig. 2. - Modificazioni dell'attività elettrica cerebrale di Gatto con nervasse integro, per effetto dell'iniezione di 2 mg di solfato di creatinina e 5-idrossitriptamina nell'A. carotide comune destra.

Le registrazioni sono state effettuate avanti (A) e rispettivamente 10 sec (B) e 90 sec (C) dopo la fine dell'iniezione.

dopo la fine della iniezione) nelle sedi di derivazione dell'emisfero cerebrale del lato utilizzato per la iniezione e successivamente (dopo 10-15 min) nell'altro emisfero; l'effetto può tuttavia mancare nell'emisfero cerebrale contralaterale. Con dosi superiori a 500 μg , la riduzione dell'ampiezza delle onde corticali dei due emisferi, è costante e precoce, comparando nelle sedi di derivazione ipsilaterali 10 sec dopo la fine della iniezione ed estendendosi entro 1-2 min anche all'emisfero cerebrale contralaterale (fig. 3). La durata delle modificazioni elettrocorticografiche determinate dall'iniezione per via intracarotidea di HT, è diversa nei due emisferi: un'attività corticale assai simile a quella registrata nel preparato normale ricompare più tardivamente

(20-30 min dopo l'iniezione della sostanza) nell'emisfero dello stesso lato dell'iniezione che in quello contralaterale (10-15 min dopo l'iniezione).

Come abbiamo rammentato, Marrazzi e Hart ⁽⁷⁾ attribuiscono alla HT funzione inibitrice della trasmissione degli impulsi del sistema nervoso centrale. I nostri risultati mostrano come sia da ritenersi assai improbabile un'azione della sostanza sulle sinapsi degli strati superficiali della corteccia cerebrale. È stato infatti dimostrato che l'onda superficie-negativa con cui s'inizia la risposta del lembo isolato allo stimolo elettrico singolo, è il potenziale post-sinaptico dei dendriti apicali delle cellule piramidali [Eccles ⁽¹⁴⁾]:

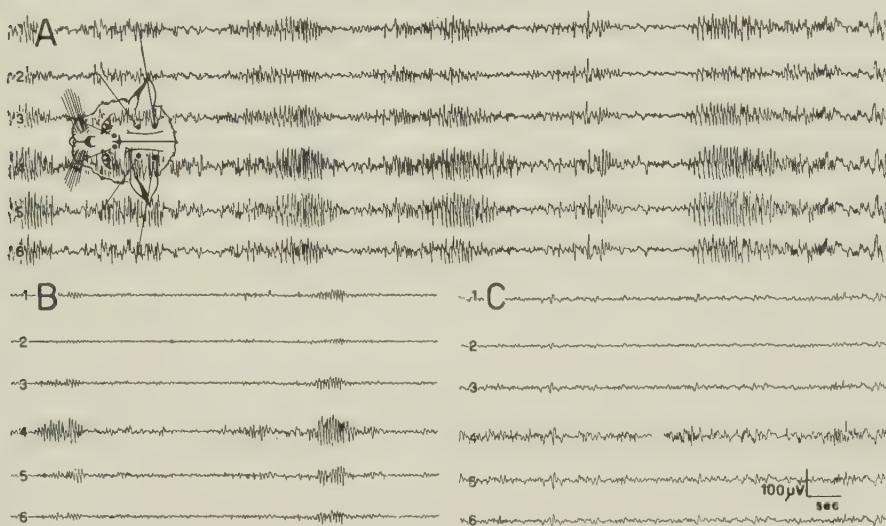


Fig. 3. - Modificazioni dell'attività elettrica cerebrale di Gatto «cervello isolato», per effetto dell'iniezione di 0,75 mg di solfato di creatinina e 5-idrossitriptamina nell'A. carotide comune destra.

Le registrazioni sono state effettuate avanti (A) e rispettivamente 12 sec (B) e 2 min (C) dopo la fine dell'iniezione.

come si è visto, dopo il trattamento del preparato con HT, come anche dopo la iniezione della sostanza per via intracarotidea, tale onda appare del tutto immodificata.

Del resto, prima di tentare una interpretazione degli effetti della HT a livello neuronico, converrà stabilire se gli effetti medesimi non siano la conseguenza di alterazioni circolatorie. L'attualità di tali alterazioni ci sembra probabile per le ragioni seguenti. Innanzi tutto le modificazioni dell'elettrogramma corticale che la HT provoca nel Gatto integro e nel Gatto «cervello isolato» (comparsa di onde a contorno liscio, riduzione dell'ampiezza delle medesime, alternanza di silenzi elettrici con treni di onde a contorno liscio), sono di tipo asfittico [cfr. Sugar e Gerard ⁽¹⁵⁾, Davis, Davis e Thom-

(14) J. C. ECCLES, « EEG clin. Neurophysiol. », III, 449 (1953).

(15) O. SUGAR e R. W. GERARD, « J. Neurophysiol. », I, 558 (1938).

pson⁽¹⁶⁾, Brazier⁽¹⁷⁾]. Per quel che concerne gli effetti della HT sull'attività spontanea o provocata del lembo isolato, i nostri esperimenti mostrano che dopo la somministrazione intrarteriosa di μg 15-25 della sostanza, si fanno palesi alterazioni delle caratteristiche dell'attività del lembo del tutto analoghe a quelle ottenute da Burns⁽⁹⁾ nello stesso preparato per effetto della ipossia: abbassamento della eccitabilità, diminuzione della durata della risposta allo stimolo singolo, diminuzione dell'ampiezza della deflessione positiva e di quella delle piccole onde inscritte sulla medesima. Né gli effetti eccitanti ottenuti nel lembo mediante la iniezione per via intracarotidea di piccole dosi della sostanza (5-10 μg) contrastano con tale interpretazione, giacché la depressione dell'attività elettrica della corteccia cerebrale, che si manifesta per diminuzione progressiva del contenuto di O_2 del sangue, è spesso preceduta da un aumento dell'attività medesima [Gibbs e Gibbs⁽¹⁸⁾].

Le indagini concernenti l'azione della HT sulla irrorazione della corteccia cerebrale non hanno d'altra parte condotto a conclusioni concordanti, il che non deve sorprendere, tenuto conto dei difetti da cui non vanno esenti i metodi ideati per la determinazione del flusso di sangue per il cervello ovvero per singole sue parti [Schmidt⁽¹⁹⁾]. Casella, Fumagalli e Noli⁽²⁰⁾ mediante ricerche eseguite con tecnica termoflussometrica, non trovano nel Gatto e nel Coniglio modificazioni significative della circolazione cerebrale per effetto della HT; all'opposto Di Stefano, Leary e Feldman⁽²¹⁾, sul fondamento di indagini eseguite con tecnica polarografica, osservano per effetto della medesima sostanza una caduta della tensione dell' O_2 nella corteccia cerebrale di Gatto.

In sostanza, non ci sembra che le osservazioni dirette intorno agli effetti della HT sul circolo cerebrale consentano al presente di escludere che gli effetti stessi siano in tutto o in parte dipendenti da alterazioni provocate dalla sostanza nel regime circolatorio dei piccoli vasi cerebrali, alterazioni che i caratteri stessi delle modificazioni dell'attività elettrica corticocerebrale provocate dalla HT inducono a ritenere probabili.

(16) P. A. DAVIS, H. DAVIS a. J. H. THOMPSON, « Amer. J. Physiol. », CXXIII, 51 (1938).

(17) M. A. B. BRAZIER, « J. Neurol. », XI, 118 (1948).

(18) S. A. GIBBS a. E. L. GIBBS, *Atlas of Electroencephalography*. Cambridge (Mass.), Addison Wesley Press inc. (1948).

(19) C. F. SCHMIDT, *The cerebral circulation in health and disease*. Springfield (Ill.), Charles C. Thomas Publ. (1950).

(20) C. CASELLA, B. FUMAGALLI e S. NOLI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », XXXIII, fasc. 10 (1957).

(21) V. DI STEFANO, D. E. LEARY a. I. FELDMAN, « Fed. Proc. », XV, 417 (1956).

Biologia. — *Sull'incompatibilità larvale nei trapianti xenoplastici di Urodeli su Anuri. Processi degenerativi delle code di Triton taeniatus trapiantate nel campo dell'arto posteriore di Discoglossus pictus e di Hyla arborea* (*). Nota di ALDO ROSSI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

In una precedente Nota (1956) ⁽¹⁾ ho esposto i risultati di ricerche sui processi d'incompatibilità larvale tardiva nelle combinazioni xenoplastiche *Triton cristatus* su *Discoglossus pictus* e *Triton cristatus* su *Hyla arborea*. Le prime ricerche sul grado di compatibilità della combinazione xenoplastica *Triton* su *Hyla* furono fatte da Cotronei e Spirito (1930, 1931, 1936) ^(2,3,4) e successivamente da Nicolosi (1939, 1942) ^(5,6). Gli Autori stabilirono che i tessuti trapiantati dell'Urodelo si differenziano e la loro degenerazione inizia durante la vita larvale del portatore Anuro. Inoltre la Parravano (1939) ⁽⁷⁾ dimostrò che anche i tessuti di *Triton* trapiantati su *Discoglossus* cominciano a degenerare durante la vita larvale del portatore Anuro. Cotronei e la sua Scuola hanno dimostrato però che quando gli abbozzi di *Triton* vengono trapiantati in Ranidi e Bufonidi, la loro degenerazione si compie entro il periodo embrionale.

Secondo le ricerche di Durante (1954) ⁽⁸⁾ gli arti di *Triton cristatus* trapiantati sul fianco del *Discoglossus pictus* persistono inalterati fino a 28 giorni dopo la metamorfosi del portatore Anuro. Al contrario le branchie di *Triton cristatus* trapiantate sul fianco del *Discoglossus pictus* si riassorbono alla metamorfosi del portatore Anuro (Durante, 1953) ⁽⁹⁾. Farinella-Ferruzza ha

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» di Roma, diretto dal prof. A. Stefanelli.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) A. ROSSI, *Sulla incompatibilità larvale tardiva nei trapianti xenoplastici di Urodeli su Anuri*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» (serie VIII), 20, 130 (1956).

(2) G. COTRONEI e A. SPIRITO, *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri ed Urodeli*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» (serie VI), XI, 854 (1930).

(3) G. COTRONEI e A. SPIRITO, *Costituzione zoologica e trapianti. Nuove esperienze tra Anuri ed Urodeli*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» (serie VI), 14, 149 (1931).

(4) G. COTRONEI e A. SPIRITO, *Fenomeni di accrescimento embrionale e larvale studiati nei trapianti tra Anuri ed Urodeli*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» (serie VI), 23, 943 (1936).

(5) G. NICOLOSI, *Ricerche sull'accrescimento embrionale e larvale degli abbozzi oculari di Anfibi trapiantate xenoplasticamente*. «Rend. Acc. Naz. Lincei» (serie VI), 29, 430 (1939).

(6) G. NICOLOSI, *Ricerche sull'accrescimento embrionale e larvale degli abbozzi oculari trapiantati xenoplasticamente tra Anuri ed Urodeli*. «Arch. Zool. Ital.», 30, 207 (1942).

(7) M. T. PARRAVANO, «Il comportamento del *Discoglossus pictus* nei trapianti embrionali etero- e xenoplastici». «Rend. Acc. Naz. Lincei» (serie VI), 29, 432 (1939).

(8) M. DURANTE, *Risultati di esperimenti di trapianti xenoplastici del territorio dell'arto*. «Riv. Biol.», 46, 533 (1954).

(9) M. DURANTE, *Comportamento degli abbozzi delle branchie e dell'otocisti nei trapianti xenoplastici di Anfibi*. «Riv. Biol.», 45, 279 (1953).

osservato che le code di *Triton cristatus* trapiantate sul fianco e nel campo dell'arto di embrioni di *Discoglossus pictus* persistono, seppur modificate, due mesi dopo la metamorfosi del portatore Anuro (1953)⁽¹⁰⁾; tuttavia la degenerazione dei loro tessuti inizia 15-20 giorni dopo l'operazione (Farinella-Ferruzza, 1957)⁽¹¹⁾.

Nella presente Nota espongo nuove osservazioni sul comportamento degli abbozzi di *Triton* trapiantati su embrioni di *Hyla* e di *Discoglossus*. Bottoni codali di *Triton taeniatus* sono stati trapiantati nel campo dell'arto posteriore del *Discoglossus pictus* e dell'*Hyla arborea*. I donatori di *Triton taeniatus* sono stati operati ad uno stadio corrispondente al 31 per il *Triton torosus* (secondo Twitty e Bodenstein)⁽¹²⁾ ed i portatori *Discoglossus pictus* e *Hyla arborea* ad uno stadio corrispondente a 16 della *Rana pipiens* (secondo Rugh)⁽¹³⁾. Per gli stadi larvali dei due portatori Anuri mi sono basato su quelli della *Rana pipiens* (secondo Taylor e Kollros)⁽¹⁴⁾.

Prima della descrizione dei risultati faccio presente che durante la metamorfosi degli Anfibi, le code degli Anuri hanno un comportamento differente da quello delle code degli Urodeli. Durante tutto il periodo larvale le code degli Anuri hanno un sistema assile costituito essenzialmente dalla corda dorsale e non si formano mai le vertebre caudali. Al momento della metamorfosi tutta la coda si riassorbe. Le code degli Urodeli presentano solo durante una parte della vita larvale, un sistema assile costituito esclusivamente dalla corda dorsale. Successivamente come ho già descritto in una precedente Nota (1957)⁽¹⁵⁾, fra lo stadio 58-59 (*Triton taeniatus* - Glücksohn, 1932)⁽¹⁶⁾ ha inizio la formazione delle vertebre caudali. Con la metamorfosi (stadio 62) la corda non si riassorbe, ma diventa più turgida e maggiormente pigmentata.

Alcuni Autori hanno trapiantato abbozzi caudali di Urodelo su portatori Anuri allo scopo di vedere se la metamorfosi dell'Anuro provoca il riassorbimento della coda trapiantata dell'Urodelo. Però Nakamura (1937)⁽¹⁷⁾

(10) N. FARINELLA-FERRUZZA, *Risultati di esperimenti di trapianto di bottone codale di Urodeli su Anuri e viceversa*. « Riv. Biol. », 45, 523 (1953).

(11) N. FARINELLA-FERRUZZA, *Trasformazione di coda in arto nei trapianti xenoplastici di bottone codale di Triton taeniatus su Discoglossus pictus*. « Acta Embryol. Morphol. Exper. », 1, 171 (1957).

(12) V. C. TWITTY and D. BODENSTEIN, vedi R. RUGH, « Experimental Embryology » (1948).

(13) R. RUGH, « Experimental Embryology », Burgess Publ. Co., Mineapolis (1948).

(14) K. TAYLOR and J. J. KOLLROS, vedi R. RUGH, « Experimental Embryology » (1948).

(15) A. ROSSI, Nota in corso di stampa in questi « Rendiconti ».

(16) S. GLÜCKSOHN, *Äussere Entwicklung der Extremitäten und Stadieneinteilung der Larvenperiode von Triton taeniatus Leyd. und Triton cristatus Laur.* « Arch. Ent. mech. », 125, 341 (1932).

(17) O. NAKAMURA, « Bot. a. Zool. Tokyo », 5 (1937), citato da N. FARINELLA-FERRUZZA, « Riv. Biol. », 45, 523, (1953). In merito a questa citazione, la quale depone per una compatibilità larvale tardiva fra *Hynobius* e *Rana*, va fatto presente che dalle esperienze delle Scuole di Cotronei e di Reverberi, gli abbozzi di Urodelo trapiantati sui Ranidi da loro sperimentati degenerano rapidamente entro il periodo embrionale.

ha osservato che le code di *Hynobius* trapiantate su *Rana*, non si riassorbono alla metamorfosi del portatore Anuro. Anche Farinella-Ferruzza (1953)⁽¹¹⁾ ha osservato che la coda di *Triton cristatus* non si riassorbe alla metamorfosi del portatore *Discoglossus pictus*. Secondo l'autore il mancato riassorbimento della coda trapiantata sarebbe dovuto ad una « insensibilità » dei tessuti caudali dell'Urodelo agli ormoni della metamorfosi dell'Anuro.

Code di Triton taeniatus trapiantate su Discoglossus pictus.

I portatori si sviluppano molto rapidamente e la maggior parte di essi metamorfosa 30-35 giorni dopo l'operazione. Le code dell'Urodelo dopo aver raggiunto un discreto sviluppo, subiscono rapidi processi involutivi, macroscopicamente visibili, alla metamorfosi dei portatori Anuri.

Dall'esame microscopico risulta che i processi involutivi della muscolatura e del sistema nervoso hanno avuto inizio 20-25 giorni dopo l'operazione. Le vertebre caudali cominciano a formarsi quando si manifestano i primi segni di degenerazione dei tessuti del trapianto; tuttavia le vertebre raggiungono ugualmente un notevole grado di differenziamento.

Col sopraggiungere della metamorfosi del portatore, i tessuti delle code trapiantate subiscono gravi degenerazioni; quando i portatori *Discoglossus* metamorfosano, nelle code trapiantate si trovano ancora discrete parti degli archi e dei corpi vertebrali, mentre non vi è più alcuna traccia della cute, della muscolatura e del sistema nervoso dell'Urodelo. Si possono trovare ancora residui della corda dorsale.

Lo strato cutaneo della coda trapiantata degenera molto rapidamente. In code esaminate 7 giorni dopo l'operazione, non si trovano più tracce dello strato cutaneo del *Triton*. Solo in un caso, 20 giorni dopo l'operazione, ho osservato una parte residua dello strato cutaneo della coda del *Triton*; anche in un altro caso dopo 29 giorni dall'operazione, ho ritrovato qualche gruppo cellulare dello strato cutaneo dell'Urodelo.

Come ho già descritto nella precedente Nota (1956)⁽¹⁾, in tutti i casi lo strato cutaneo del *Discoglossus pictus* ricopre completamente l'organo trapiantato e sostituisce rapidamente lo strato cutaneo dell'Urodelo. Dallo esame istologico risulta inoltre che le cellule connettivali del portatore Anuro sostituiscono progressivamente i tessuti in via di degenerazione dell'Urodelo. Dopo la metamorfosi dei portatori Anuri, le code trapiantate dell'Urodelo persistono ancora, seppure profondamente modificate di forma e ridotte di grandezza.

Tra il portatore Anuro e la coda trapiantata dell'Urodelo, non ho mai osservato dirette connessioni vasali; nella coda trapiantata si trovano solo capillari sanguigni provenienti dai tessuti circostanti del portatore Anuro.

Code di Triton taeniatus trapiantate su Hyla arborea.

Le code di *Triton taeniatus* si sono sviluppate meglio sui portatori *Hyla arborea* che su quelli di *Discoglossus pictus*; la velocità di sviluppo dei portatori *Hyla* è stata inferiore a quella dei portatori *Discoglossus*. Solo in un caso un portatore ha metamorfosato dopo 62 giorni dall'operazione. In quest'ultimo la coda di *Triton* ha subito processi involutivi, macroscopicamente visibili, identici a quelli osservati nelle code di *Triton* trapiantate su portatori *Discoglossus* alla metamorfosi. Tuttavia anche dopo il completo riassorbimento della coda del portatore Anuro, la coda trapiantata del *Triton* persiste ancora, seppure notevolmente modificata di forma e ridotta di grandezza.

Dall'esame microscopico risulta che il sistema nervoso comincia a degenerare 30 giorni dopo l'operazione; contemporaneamente compaiono i primi fagociti nella coda trapiantata. I primi segni di degenerazione delle fibre muscolari dell'Urodelo li ho osservati 45 giorni dopo l'operazione.

Le vertebre caudali iniziano a svilupparsi quando sono già in atto forti processi degenerativi a carico delle code trapiantate. Pertanto le vertebre non si sviluppano regolarmente e non raggiungono il perfezionamento morfologico delle vertebre delle code di *Triton* trapiantate sul *Discoglossus*.

Man mano che procedono i processi degenerativi a carico delle strutture della coda trapiantata, le cellule connettivali del portatore riempiono i vuoti lasciati liberi dai tessuti demoliti dell'Urodelo. Dopo 21 giorni dall'operazione ho trovato ancora tracce dello strato cutaneo delle code trapiantate. La cute del portatore *Hyla* sostituisce progressivamente quella del *Triton* e riveste completamente le code trapiantate. Dopo 62-65 giorni dall'operazione le code trapiantate non sono più formate dai tessuti dell'Urodelo, ma sono costituite esclusivamente dai tessuti del portatore Anuro. Tali code mantengono a lungo (anche 80 giorni dopo l'operazione) l'aspetto e la forma delle code trapiantate e dall'esame istologico risultano costituite esternamente da uno strato cutaneo e internamente da cellule e fibre connettivali dell'*Hyla arborea*.

In coincidenza con i primi processi di degenerazione del trapianto (30 giorni dopo l'operazione) ho osservato che in 6 casi si sono stabiliti diretti rapporti vasali tra le code trapiantate e il sistema vasale del portatore Anuro. In due casi ho osservato che dalla vena e dall'arteria caudale dell'*Hyla* si staccano rispettivamente un vaso venoso e uno arterioso, che dopo un percorso più o meno breve, penetrano nella coda trapiantata dell'Urodelo. In tre casi la coda trapiantata ha preso rapporti solo con un ramo collaterale della vena caudale e in uno solo con l'arteria caudale. Anche rami collaterali dell'arteria dorsale del portatore Anuro sono penetrati nella coda dell'Urodelo. In due casi ho osservato inoltre che la vena cardinale posteriore del portatore sul lato operato, raccoglie direttamente tutto il sangue refluo della coda trapiantata, mentre tutto il sangue proveniente dalla vena caudale del portatore Anuro passa nella vena cardinale posteriore del lato operato.

In altri 6 casi, dove non vi è diretta connessione vasale con le arterie e le vene del portatore, la coda trapiantata viene servita da una fitta rete di piccoli vasi di varia grandezza. Nell'unico caso in cui il portatore *Hyla* ha metamorfosato, la coda trapiantata non presenta nessuna connessione vasale con il portatore ma vi sono solo alcune lacune sanguigne, mentre sotto lo strato cutaneo di rivestimento del portatore Anuro vi è una fitta rete di capillari sanguigni.

Nella Tabella che segue, ho riunito tutti i casi presi in esame, per avere una visione generale delle successive fasi della degenerazione dei tessuti delle code di *Triton taeniatus* trapiantate nel campo dell'arto posteriore di *Hyla arborea* e di *Discoglossus pictus* e della progressiva sostituzione dei tessuti dell'Urodelo con il connettivo e la cute del portatore Anuro.

Dai dati ottenuti da queste ricerche, risulta che tanto nella combinazione *Triton taeniatus* su *Discoglossus pictus* che in quella *Triton taeniatus* su *Hyla arborea* la degenerazione dei tessuti delle code dell'Urodelo inizia durante la vita larvale dei portatori Anuri; infatti come ho già descritto in una precedente Nota (1956) ⁽¹⁾ i fenomeni di incompatibilità fra i tessuti del *Triton taeniatus* e i portatori *Hyla arborea* e *Discoglossus pictus*, hanno inizio durante la vita larvale dei due portatori Anuri, qualunque sia la sede su cui si sviluppa l'organo trapiantato dell'Urodelo.

Nelle presenti esperienze ho osservato che i tessuti della coda di *Triton taeniatus* degenerano prima nella combinazione *Triton taeniatus* su *Discoglossus pictus* che in quella *Triton taeniatus* su *Hyla arborea*. Particolarmente accelerata è la degenerazione dei tessuti delle code di *Triton taeniatus*, quando i portatori *Discoglossus* entrano in metamorfosi. Al contrario nella combinazione *Triton taeniatus* su *Hyla arborea*, dove i portatori Anuri rimangono più a lungo allo stato larvale, si osserva che i tessuti delle code trapiantate dell'Urodelo degenerano più tardivamente che nella precedente combinazione xenoplastica. Anche nella combinazione *Triton taeniatus* su *Discoglossus pictus* ho osservato che quando un portatore Anuro permane a lungo allo stato larvale (vedi Tabella, caso 11-25) i tessuti della coda trapiantata dell'Urodelo degenerano più lentamente di quelli trapiantati sui portatori *Discoglossus pictus* in metamorfosi.

Dall'insieme dei dati micro- e macroscopici dei casi presi in esame, ho dedotto che le condizioni ambientali del territorio del portatore Anuro hanno avuto un importante ruolo sui processi degenerativi delle code trapiantate dell'Urodelo. In ambedue le combinazioni, le code di *Triton taeniatus* trapiantate nel campo dell'arto posteriore del *Discoglossus pictus* e dell'*Hyla arborea*, si sono sviluppate in una zona molto prossima alla coda del portatore Anuro; quando i portatori *Hyla* e *Discoglossus* entrano in metamorfosi, in tutta la zona circostante la coda dell'Anuro si manifestano forti processi involutivi a carico di tutti i tessuti, accompagnati da intensa proliferazione di cellule connettivali e fagociti.

TABELLA.

Caso	Stadio	Giorni	Cute	Musco- latura	Nervoso	Carti- lagine	Corda	Fagociti	Con- nettivo
1-21	24-25	7	o	+++	+++	—	+++	—	—
2-21	24-25	8	o	++	—	—	—	—	—
3-24	III	9	o	+++	—	—	—	—	—
4-24	III	9	+	+++	+++	—	—	—	—
6-24	V-VI	15	o	—	+++	—	—	—	+
1-25	III	15	o	+++	+++	—	+++	—	—
2-25	X-XI	18	o	+++	+++	—	+++	—	—
8-24	IX	20	+	++	+++	—	—	+	—
3-25	XII	20	++	+++	+++	+++	+++	—	—
9-24	XVII	25	o	—	+	—	—	++	++
4-25	XVIII	25	o	+++	+++	+++	+++	+	—
10-24	XXIII	28	o	o	—	++	—	++	+
5-25	XXII	29	+	+	++	++	+	++	++
11-21	XX	30	o	++	+++	+++	++	++	+
13-24	XXIV	30	o	++	++	+++	++	++	+
14-24	XXIV	30	o	o	o	+	o	++	++
16-24	XXIV	35	o	o	o	++	o	++	+++
17-24	XXIV	35	o	o	o	+	+	+++	+++
18-24	XXIV	35	o	o	o	++	+	+++	+++
19-24	XXV	35	o	o	o	++	+	+++	+++
8-25	XXV	35	o	o	o	o	o	+++	++
22-21	XXV	36	o	o	+	++	+	++	+++
11-25	XX	39	o	+++	++	+++	—	++	—

*Triton taeniatus su Discoglossus pictus.**Triton taenistius su Hyla arborea.*

ESPERIENZA II.

1	I-II	14	+	+++	+++	—	+++	—	—
2	I-II	21	+	+++	+++	—	+++	—	—
3	III	30	o	+++	++	—	+++	+	—
4	IV	31	o	+++	++	—	+++	+	—
5	IX	45	o	++	—	++	—	++	+
6	IX-X	50	o	+	+	++	+	++	+
7	X	55	o	++	+	+	o	++	++
8	XXV	62	o	o	o	o	o	++	+++
9	XXIII	62	o	o	o	o	o	++	++
10	XI	65	o	o	o	+	o	++	++
11	XII	70	o	o	o	o	o	—	+++
12	XVIII	75	o	o	o	o	o	—	+++
13	IX-X	80	o	o	o	o	o	++	+++

Stadio: Stadio del portatore Anuro: in numeri arabi gli stadi embrionali (Rugh) e in numeri romani quelli larvati (Taylor e Kollros). *Giorni* = Età a partire dal giorno dell'operazione. *Cute*, *Muscolatura*, *Nervoso*, *Cartilagine*, *Corda* = Cute muscolatura, midollo spinale, cartilagine delle vertebre caudali e corda della coda trapiantata di *Triton taeniatus*. *Fagociti* e *Connettivo* = Fagociti e connettivo del portatore Anuro. I segni + e — indicano rispettivamente presenza o assenza dei fagociti e del connettivo del portatore Anuro nella coda trapiantata dell'Urodelo; oppure presenza e assenza dei tessuti della coda trapiantata dell'Urodelo. Il segno O significa degenerazione completa dei tessuti trapiantati dell'Urodelo.

Facendo l'esame istologico delle code del *Triton taeniatus* trapiantate su *Discoglossus pictus* ho osservato che numerose cellule connettivali e fagociti passano dalla coda del portatore Anuro alla vicina coda dell'Urodelo; pertanto quando sopraggiunge la metamorfosi del *Discoglossus*, le code trapiantate del *Triton*, già in degenerazione a causa dei fenomeni d'incompatibilità, vengono coinvolte nei processi involutivi della coda del portatore Anuro.

Nella combinazione *Triton taeniatus* su *Hyla arborea*, i portatori Anuri rimangono a lungo allo stato larvale e quindi i tessuti delle code trapiantate del *Triton* non risentono gli effetti dei processi involutivi della coda del portatore Anuro. Pertanto la degenerazione dei tessuti delle code di *Triton taeniatus*, dovuta semplicemente ai fenomeni d'incompatibilità, inizia più tardivamente che nella combinazione *Triton taeniatus* su *Discoglossus pictus* e si completa quando ancora i portatori *Hyla* si trovano allo stato larvale.

I tessuti delle code di *Triton taeniatus* trapiantate sui portatori *Hyla arborea* e *Discoglossus pictus*, a mano a mano che degenerano, vengono sostituiti dal connettivo del portatore Anuro. Inoltre la cute dell'*Hyla* e del *Discoglossus* sostituisce la cute dell'Urodelo e riveste completamente la coda trapiantata.

Dopo la completa degenerazione dei tessuti del *Triton taeniatus* le code mantengono la forma e la grandezza raggiunta e sono completamente costituite dal connettivo e dalla cute del portatore Anuro. Per questa ragione chiamo tali code col termine di «pseudo-code di *Triton taeniatus*» perché della coda dell'Urodelo conservano solo l'aspetto esterno e macroscopico.

Identiche osservazioni l'ho già fatte nei trapianti di arto di *Triton cristatus* su *Hyla arborea* (Rossi, 1956) ⁽¹⁾. All'esame microscopico, gli pseudo-arti di *Triton cristatus* presentano esternamente uno spesso manicotto cutaneo, derivato dal portatore *Hyla arborea*; internamente non vi è più alcuna traccia dei tessuti dell'Urodelo. In un caso, lo pseudo-arco di *Triton cristatus* ha mantenuto la sua forma inalterata su una larva di *Hyla arborea* presa in esame 127 giorni dopo l'operazione.

Nelle presenti esperienze, le pseudo-code di *Triton taeniatus*, hanno mantenuto a lungo la loro forma raggiunta su larve di *Hyla arborea*. In un caso, quando il portatore Anuro si è metamorfosato, la pseudo-coda di *Triton* ha subito processi involutivi. Anche nella combinazione *Triton taeniatus* su *Discoglossus pictus*, quando i portatori Anuri si sono metamorfosati, le pseudo-code di *Triton* hanno subito processi involutivi; però, in queste pseudo-code, erano ancora presenti alcune cartilagini vertebrali dell'Urodelo, ma gravemente danneggiate.

Faccio presente che, tanto nella combinazione *Triton taeniatus* su *Discoglossus pictus* che in quella *Triton taeniatus* su *Hyla arborea*, le pseudo-code dell'Urodelo non si riassorbono con lo stesso ritmo delle code del portatore Anuro; inoltre le pseudo-code dell'Urodelo, pur essendo profondamente modificate di forma e di grandezza, persistono dopo il completo riassorbimento della coda del portatore Anuro.

Ciò dimostra che le pseudo-code del *Triton taeniatus* si riassorbono alla metamorfosi dell'*Hyla arborea* e del *Discoglossus pictus*, non perché risentono direttamente gli effetti ormonali della metamorfosi del portatore Anuro, ma perché esse subiscono passivamente gli effetti dei processi meccanici del riassorbimento della coda e delle modificazioni strutturali che avvengono nella zona degli arti posteriori del portatore Anuro.

CONCLUSIONI.

1° Bottoni codali di *Triton taeniatus* sono stati trapiantati nel campo dell'arto posteriore di embrioni di *Discoglossus pictus* e di *Hyla arborea*; le code trapiantate si sono sviluppate in una zona molto prossima alla coda dei portatori Anuri;

2° a pari età, a partire dal giorno dell'operazione, i tessuti dell'Urodelo sono degenerati prima nelle code di *Triton taeniatus* trapiantate su *Discoglossus pictus* che in quelle trapiantate su *Hyla arborea*;

3° tenendo presente che i portatori *Discoglossus pictus* si sono sviluppati più rapidamente dei portatori *Hyla arborea*, si è osservato che i tessuti delle code di *Triton taeniatus* sono degenerati prima sui portatori *Discoglossus pictus*, perché i processi involutivi delle vicine code del portatore Anuro hanno accelerato i processi degenerativi (dovuti a fenomeni d'incompatibilità) delle code trapiantate dell'Urodelo.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente Vittorio Gori

tenuta (*) dal Corrisp. D. GRAFFI

Incontrai Vittorio Gori l'ultima volta nel luglio scorso. Era stato da poco eletto Socio di questa Accademia; giusto riconoscimento dei Suoi meriti e lieve conforto al Suo animo addolorato dal gravissimo lutto per la recente, tragica fine della figlia maggiore. Speravo rivederLo spesso in questa sala, durante le nostre sedute. Il destino è stato avverso: il 31 agosto Vittorio Gori ci lasciava per sempre.

Altri, con ben altra parola, potrebbe dire qui di Lui; ma ho accettato l'invito del nostro Presidente di commemorarLo dinanzi all'Accademia, per l'amicizia vera e profonda che mi univa a Lui da oltre venticinque anni e che doveva terminare solo con la Sua scomparsa.

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.



Era nato a Firenze il 31 maggio 1896; dopo aver partecipato come volontario alla prima guerra mondiale si laureò nel 1921 presso la Scuola d'Ingegneria di Bologna. Ebbe per Maestri valorosi Scienziati che allora insegnavano a Bologna e fra i quali primeggiava Augusto Righi; ma Egli forse seguì con particolare interesse le lezioni dell'illustre Fisico-matematico Luigi Donati. Da lui, che fu uno dei primi a diffondere in Italia la teoria di Maxwell, Egli apprese quella concezione maxwelliana dei fenomeni elettromagnetici che guidò sempre la Sua opera, anche quando tale concezione non era molto comune nel campo tecnico. Dopo la laurea fu, per alcuni anni, assistente volontario alla cattedra d'Idraulica di Bologna, allora coperta da Umberto Puppini. Le Sue prime ricerche sono perciò dedicate all'Idraulica, in special modo ad analogie fra fenomeni idraulici ed elettrici. In una Nota, in collaborazione con Puppini, verifica sperimentalmente su un modello elettrolitico un teorema di reciprocità, stabilito dallo stesso Puppini, per le acque filtranti; in altro lavoro dimostra che le linee del vettore portata nelle acque filtranti, si rifrangono, alla superficie di passaggio fra due mezzi di permeabilità diversa, con la stessa legge delle tangenti, valida per le linee di forza elettriche o magnetiche.

Nel 1923, ottenuta una borsa di studio dal Ministero della Pubblica Istruzione, poté frequentare l'École Supérieure d'Électricité di Parigi, dove, l'anno successivo, conseguì il diploma di Ingegnere radio. Ritornato in Italia, fu assunto dalla società Italo-Radio con l'incarico di organizzare e dirigere un laboratorio sperimentale; della stessa società divenne, più tardi, Direttore tecnico. Non volle però abbandonare la ricerca scientifica; quindi, contemporaneamente, frequentò, come assistente volontario, l'Istituto di Elettrotecnica dell'Università di Pisa, allora diretto da Giancarlo Vallauri, altro illustre Socio di questa Accademia di cui lamentiamo la recente scomparsa. Gori si considerò sempre devoto allievo di Vallauri, che lo ricambiò di ugual stima e affetto. Nel periodo di cui stiamo parlando Egli pubblicò una trattazione, organica e non priva di motivi originali, dei filtri d'onda, che allora cominciavano ad avere vaste applicazioni tecniche, e pubblicò inoltre i risultati di alcune misure sul campo elettromagnetico delle onde radiotelegrafiche, misure compiute con nuovi e opportuni accorgimenti sperimentali. Ma più notevole è una ricerca del 1927, in cui, ispirandosi forse a considerazioni di Léon Brillouin, calcola la forza elettromotrice indotta in un circuito elettrico dalla corrente variabile che percorre un altro circuito tenendo anche conto della velocità finita con cui si propagano le perturbazioni elettromagnetiche. Egli giunge a formule semplici ed eleganti che generalizzano quelle adoperate nella elettrotecnica ordinaria, in cui detta velocità si suppone infinita. Il metodo che Egli adopera è quello che dopo di Lui è stato applicato da vari Autori, specie americani, ed è ormai di uso comune nel calcolo della resistenza e della reattanza di una antenna.

* * *

Com'è noto, realizzata in modo sicuro mediante i tubi elettronici la radiotelegrafia, verso il 1925 erano entrate in funzione, in vari luoghi del globo, le stazioni radio-diffusive. Nel gennaio 1927 avevano avuto inizio, mediante onde lunghe, regolari servizi telefonici commerciali fra l'Inghilterra e l'America. Ma era già noto, allora, che le radiotrasmissioni a grande distanza si possono ottenere, e con minore dispendio d'energia, mediante le onde corte; qualche mese dopo erano entrati in funzione collegamenti telefonici commerciali realizzati con onde corte, però solo fra Inghilterra e America del Nord e le due Americhe. Il Gori ebbe, verso il 1928, l'incarico di costruire una stazione radio per collegare telefonicamente l'Italia con l'Argentina e il Brasile. Il problema tecnico era, specie per quei tempi, tutt'altro che facile. La stazione trasmittente doveva essere in grado di emettere onde di tre frequenze diverse, una valida per il giorno, l'altra per la notte, la terza per il crepuscolo. Poi, per la regolarità del servizio, le frequenze dovevano essere stabili: ciò poteva ottenersi con un oscillatore a quarzo che però non generava correnti di frequenza sufficientemente elevata. Quindi era necessario far seguire all'oscillatore opportuni moltiplicatori di frequenza e la corrente in tal modo ricavata doveva, dopo conveniente amplificazione, venire immessa in una antenna direttiva in modo da irradiare un campo elettromagnetico verso la stazione ricevente. I vari elementi della stazione erano in gran parte noti, ma solo singolarmente (come Egli stesso si esprimeva a proposito delle prime stazioni radio in una Sua mirabile rievocazione di Guglielmo Marconi); bisognava unirli in modo opportuno, e ciò non era allora affatto facile; d'altronde le modalità delle stazioni trasmittenti fino allora realizzate all'estero non erano del tutto conosciute. È interessante seguire nelle numerose pubblicazioni che Gori dedicò alle radiotrasmissioni a distanza, le varie difficoltà che Egli, con accorgimenti spesso originali, seppe superare, ma non mi è concesso troppo dilungarmi. Concluderò col dire che nel 1932 fu inaugurato ufficialmente il servizio telefonico fra l'Italia e le maggiori repubbliche dell'America latina, dopo parecchi mesi di ottima prova. In seguito, non solo perfezionò la stazione trasmittente da Lui progettata e costruita a Torrenova (Roma), ma estese i collegamenti al Perù, all'America del Nord e al Giappone e ideò anche nuovi tipi di antenne direttive.

Intorno al 1940 nominato anche direttore tecnico dell'Italcable, si occupò, con ottimi risultati, di un'altra tecnica e cioè della telegrafia sottomarina, che, come è ben noto, si effettua mediante cavi.

* * *

Per quanto si fosse dedicato con successo alla soluzione di così importanti problemi tecnici, Vittorio Gori amava anche l'insegnamento che aveva esercitato giovanissimo, per qualche tempo, in una scuola industriale. Quindi

accettò con entusiasmo l'incarico del corso di Tecnica degli impianti radio nella Scuola di perfezionamento in radiocomunicazioni dell'Università di Bologna, Scuola di cui più tardi ebbe la direzione. Nel 1940, in seguito a concorso, in cui fu classificato primo, fu chiamato alla cattedra di Elettrotecnica della facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna, in cui già da qualche anno svolgeva, per incarico, il corso di Comunicazioni elettriche. Nominato professore universitario, pur conservando legami con la tecnica, si dedicò attivamente ai Suoi corsi, che esponeva con orientamenti nuovi e moderni. Né trascurò la ricerca scientifica; nel 1941 pubblicò una memoria dal titolo: i concetti d'impedenza e di guadagno applicati ai sistemi irradianti multipli per onde corte. La memoria è notevole (si tenga anche presente che, causa la guerra, le ricerche sulle antenne di Autori americani, in particolare quelle di Schelkunoff, erano allora sconosciute in Italia) per la profonda critica dei concetti di resistenza e reattanza di una antenna; Egli dimostra, fra l'altro, che queste grandezze non hanno in generale, carattere mutuo. Studiò anche, sempre in quel tempo, antenne di tipo aperiodico, adatte specialmente per scopi militari.

Ma Gori ebbe anche autentiche doti di Maestro. Per la vivacità del Suo ingegno e per l'entusiasmo che comunicava a quanti avevano rapporti di studio con Lui, Egli fu sempre circondato da un buon numero di ottimi assistenti ed allievi (alcuni dei quali raggiunsero poi la cattedra universitaria) e l'Istituto da Lui diretto divenne, ben presto, importante centro di ricerche.

* * *

Nel 1952 accettò, perché lo ritenne anche Suo dovere, la direzione dell'Istituto superiore delle Poste e Telecomunicazioni dove nel 1955 si trasferì definitivamente perché nominato professore ordinario nella Scuola di telegrafia e telefonia annesse all'Istituto, Scuola che Egli aveva già potenziata ed ampliata. Come a Bologna, anche nel nuovo Istituto, esplicò notevole attività organizzativa, didattica e scientifica; numerose ricerche sono state compiute per Suo consiglio e sotto la Sua guida; si può affermare che tutti gli argomenti di attualità nel campo delle trasmissioni elettriche sono oggetto di studio da parte dei ricercatori dell'Istituto.

Negli ultimi anni pubblicò alcuni lavori sulle correnti magnetiche, correnti fittizie; ma la cui introduzione è necessaria se si vuol dare espressione precisa ai principi di equivalenza e di induzione di Schelkunoff (in sostanza al principio di Huygens per il campo elettromagnetico), principi la cui importanza nelle applicazioni tecniche diventa sempre più notevole. È pure da segnalare la ricerca d'indole storica compiuta assieme al prof. Perrucca, sui pionieri delle telecomunicazioni.

* * *

Vittorio Gori apparteneva oltre che a questa Accademia a quelle di Bologna e di Torino e, fin dal 1929, al Consiglio Nazionale delle Ricerche. Per la Sua particolare competenza era poi membro o presidente di numerosi Enti o Società delle telecomunicazioni.

*
*
*

Vittorio Gori ha terminato prematuramente la Sua vita terrena. La Sua opera di pioniere in alcuni problemi delle trasmissioni elettriche non potrà essere dimenticata, chè troverà certamente continuatori.

Ma chi ebbe la fortuna di conoscerLo ricorderà non solo il Suo ingegno vivace e brillante, il Suo entusiasmo per la ricerca, le Sue doti eccezionali di espositore, ma soprattutto conserverà la memoria di un animo, che per quanto provato dalla sorte avversa, si mantenne sempre generoso e veramente buono.

PUBBLICAZIONI DEL PROF. VITTORIO GORI.

- (1) *Sulla variazione del coefficiente di resistenza in un problema di rigurgito.* « Il Monitore Tecnico », XXVIII, 286 (1922).
- (2) (In collaborazione con U. PUPPINI), *Verifica sperimentale del principio di reciprocità entro un elettrolita.* « Il Monitore Tecnico », XXVIII, 412 (1922).
- (3) *Legge di rifrazione nel moto delle acque filtranti.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », I, 57 (1922). Ristampato anche nel « Monitore Tecnico », XXVIII, 425 (1922).
- (4) *Su una reciprocità fra variazioni di flusso d'induzione magnetica e correnti indotte in circuiti elettrici.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana » (1) II, 163 (1923).
- (5) *Induzione mutua fra circuiti e propagazione delle perturbazioni elettromagnetiche.* « Elettrotecnica », XIV, 305 (1927).
- (6) *Sulle proprietà filtranti delle catene di circuiti elettrici.* « Elettrotecnica », XIV, 753, 784 (1927).
- (7) *Trasmettitori ad onda corta per i collegamenti transoceanici della Italo Radio.* « Elettrotecnica », XVI, 137 (1929).
- (8) *Cenno sui trasmettitori ad onda corta per i collegamenti transoceanici della Italo Radio.* « Dati e Memorie sulle Radiocomunicazioni C.N.R. », I, 149 (1929).
- (9) *Misure del campo elettromagnetico di onde radiotelegrafiche.* « Dati e Memorie sulle Radiocomunicazioni C.N.R. », 201 (1929).
- (10) *Misure del campo elettromagnetico di onde radiotelegrafiche.* « Dati e Memorie sulle Radiocomunicazioni C.N.R. », II, 637 (1930).
- (11) *I filtri elettrici.* « Dati e Memorie sulle Radiocomunicazioni C.N.R. », II, 819 (1930).
- (12) *Radiotelefonía transatlantica con onde corte.* « L'Elettrotecnica », XVII, 249 (1930).
- (13) *L'impianto italiano ad onda corta per il servizio radiotelefonico transoceanico.* « Dati e Memorie sulle Radiocomunicazioni C.N.R. », IV, 205 (1933).
- (14) *Sulla moderna tecnica dei centri radiotrasmettenti di grande potenza.* « Atti della XXXVII riunione annuale della A.E.I. » (1932).
- (15) *La tecnica degli impianti di radiocomunicazioni a grande distanza.* « Alta Frequenza », II, 377 (1933).
- (16) *Progetto di massima degli amplificatori di potenza per trasmettitori radiotelegrafici.* « Alta Frequenza », III, 149 (1934).
- (17) *Guglielmo Marconi.* « Radiodiffusion », Union Internationale de Radiodiffusion. Genève, n. 5, novembre 1937.
- (18) *Guglielmo Marconi e le radiocomunicazioni direttive.* Società Italiana per il progresso delle Scienze. Numero speciale nell'anniversario della morte di Guglielmo Marconi, 13 (1938).

- (19) *Cenno su un particolare caso di antenne direttive multiple*. Union Radio-Scientifique Internationale. Congresso di Venezia, 328 (1938).
- (20) *Antenna direttiva ad onde progressive*. Union Radio-Scientifique Internationale. Congresso di Venezia, 331 (1938).
- (21) *Il contributo italiano al progresso delle comunicazioni elettriche negli ultimi cento anni*. Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839-1939. Società Italiana per il progresso delle Scienze, II, 89 (1939).
- (22) *Recenti perfezionamenti nella telegrafia sottomarina*. «Alta Frequenza», IX, 260 (1940).
- (23) *I concetti di impedenza di radiazione e di guadagno applicati ai sistemi irradianti multipli a onde corte*. «Alta Frequenza», X, 665 (1941).
- (24) *Sulle antenne di tipo quasi aperiodico*. «Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna», (10), II, 23 (1944-45).
- (25) *Il cinquantenario della radio*. «La Ricerca Scientifica», XVII, 1947. Ristampato nell'Annuario dell'Università di Bologna, 1946-47, 1946-48, 137.
- (26) *Guglielmo Marconi e la sua prima trasmissione transatlantica*. «La Ricerca Scientifica», XXII, 8 (1952).
- (27) *Sopra la resistenza di radiazione magnetica*. «Recensioni e Notizie», 2, (marzo-aprile 1954). Ristampato con qualche variante nei «Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano», XXVI, 61 (1954-55).
- (28) (In collab. con E. PERRUCCA) *Pioneers in Electrical communications*. «Journal of the Franklin Institute», CCLXI, 61 (1956).
- (29) *La ricerca italiana nel campo dell'elettronica*. Atti del Convegno di elettronica e di televisione. Supplemento al vol. XXIV de «La Ricerca Scientifica» (1954).
- (30) *Le basi scientifiche dell'automazione*. Atti della Sezione delle Giornate della Scienza, aprile 1956. Supplemento al vol. XXVI de «La Ricerca Scientifica» (1956).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica alla Classe la dolorosa notizia della morte del Socio Nazionale Luigi Lombardi, della Categoria I, Sezione Meccanica, avvenuta il 6 corrente e ricorda brevemente, con commosse parole, la figura e l'opera del grande scienziato che egli si onora di avere avuto per Maestro nell'Ateneo napoletano e che fu altissimo esempio di operosità, di rettitudine e di attaccamento al dovere. Legato all'Accademia da profondi vincoli di affetto, Luigi Lombardi, nonostante le precarie condizioni di salute in cui si trovava negli ultimi anni, partecipò assiduamente alle sedute e, ancora due giorni prima di morire, aveva manifestato ai familiari il suo vivo desiderio di non mancare all'attuale adunanza.

A nome della Classe e suo personale, il Presidente Giordani eleva un reverente pensiero d'omaggio alla memoria del carissimo consocio scomparso, che sarà degnamente rievocato dall'Accademia.

Il Presidente dà poi la parola al Collega Dario Graffi che commemora il compianto Socio Vittorio Gori.

Alla commemorazione assistono, oltre ai familiari, anche la Marchesa Marconi e molti amici e discepoli dell'Estinto. Numerose le adesioni pervenute.

Il Presidente ringrazia il Collega Graffi e rinnova ai familiari del prof. Gori l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge un cordiale saluto al prof. G. Merguelyan, dell'Istituto Matematico dell'Università di Mosca, presente all'adunanza.

Il prof. Giordani comunica quindi che l'Accademia delle Scienze di Torino ha bandito un Premio Internazionale di lire un milione, con medaglia d'oro, dedicato alla memoria del compianto prof. Modesto Panetti, e che le designazioni per tale Premio possono essere inviate a quell'Accademia, entro il 30 aprile 1958, dai Soci Nazionali della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia delle Scienze di Torino e dai Presidenti di Accademie scientifiche, italiane e straniere.

Il Presidente informa poi che la Presidenza del Consiglio dei Ministri – Ufficio della Proprietà Letteraria, Artistica e Scientifica – ha assegnato un premio di cultura di lire un milione all'ing. Guido Ucelli, il quale, al fine di incoraggiare gli studi riguardanti la storia della scienza e della tecnica, ha rinunciato alla somma, disponendo che la stessa sia versata al Museo Nazionale della Scienza e della Tecnica per l'istituzione di un concorso a un Premio di lire un milione per un'opera divulgativa di storia della scienza e della tecnica, sotto il patrocinio dell'Accademia Nazionale dei Lincei, del Consiglio Nazionale delle Ricerche e della Società Italiana di Fisica.

L'ing. Ucelli ha inviato alla Presidenza una bozza predisposta per detto concorso, dalla quale risulta che la Commissione giudicatrice è costituita dai proff. Giovanni Polvani, per la Società Italiana di Fisica, Arturo Danusso, per il Consiglio Nazionale delle Ricerche e da un terzo membro che dovrà essere designato dall'Accademia.

Il prof. Giordani propone di nominare tale delegato nella persona di un patologo e la Classe, associandosi all'unanimità alla suddetta proposta, designa il Socio Califano, che accetta l'incarico.

Il Presidente informa la Classe, nell'eventualità che la notizia possa interessare qualche Socio, che dal 31 maggio all'8 giugno p.v. avrà luogo, a Francoforte sul Meno, il Convegno Europeo di Tecnologia Chimica e il XII Congresso-Esposizione per l'apparecchiatura chimica.

Il prof. Giordani, infine, prega il Collega Califano di riferire in merito all'organizzazione della progettata discussione sulle ossidazioni biologiche.

Il Socio Califano ritiene che ben difficilmente si potrà completare l'organizzazione nei prossimi mesi e sarebbe pertanto d'avviso di rinviare la discussione all'anno accademico 1958-59.

Anche il Socio Cambi conviene in tale opportunità.

Il Presidente prende atto di quanto comunicato dal Socio Califano, ma prega il Professore stesso e gli altri Colleghi interessati di voler tenere informata la Presidenza della questione.

PLICHI SUGGELLATI

Il Presidente informa la Classe che, nell'adunanza segreta a Classi riunite, tenuta oggi alle ore 16, l'Accademia, accogliendo una proposta presentata in tal senso da alcuni Soci, ha ratificato il provvedimento, adottato dalla Presidenza dopo le sedute dell'11 gennaio c.a., circa la sospensione della accettazione di plichi suggellati e ha deliberato di abolire la prassi riguardante l'accettazione e il deposito dei suddetti plichi in considerazione del fatto che, se tale consuetudine poteva essere giustificata in tempi remoti, non appare certo conforme alle attuali usanze ed esigenze del mondo scientifico. Non sembra invero corrispondere ai fini generali dell'Accademia l'incoraggiare una pratica con cui il ricercatore può sfuggire alla propria responsabilità e sottrarre i suoi risultati alle discussioni e all'eventuale utilizzazione da parte degli altri ricercatori. Tale prassi, della quale del resto non vi è traccia né nello Statuto né nel Regolamento dell'Accademia, non va certo a vantaggio della diffusione e del progresso della scienza.

Il Presidente comunica che il Sig. Andrea Prosdocimi ha inviato all'Accademia, in data 14 gennaio, un plico suggellato contenente, secondo le indicazioni dell'autore, la scoperta che «oltre ai limiti del campo magnetico dei pianeti, gli spazi intersiderali si possono attraversare senza l'aiuto di motori qualsiasi, essendo sufficiente la spinta della volontà dell'aviatore per solcare lo spazio infinito a velocità impensabili».

La Cancelleria, attenendosi alle disposizioni impartite dalla Presidenza circa la sospensione dell'accettazione dei plichi suggellati, ha provveduto a restituire tale plico all'autore, il quale, però, l'ha nuovamente rinviato agli uffici.

La Classe, in conformità delle decisioni adottate dall'Assemblea plenaria, delibera di non accettare il plico e dà mandato alla Cancelleria di restituirlo definitivamente al Sig. Prosdocimi.

Analoga decisione viene adottata nei confronti del plico suggellato dal titolo «Comunicazione di Fausto Sironi su lo «Energetene», inviato all'Accademia dal Dott. Fausto Sironi in data 29 gennaio.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Segre presenta, con le seguenti parole, un volume recentemente apparso del Socio Severi, dal titolo : « *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica* » (Roma, Cremonese, 1958).

« Questo volume è il secondo dell'importante opera di Francesco Severi della quale fin dal '42 apparve il vol. I, che però reca un altro titolo, e cioè: « Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche ». Esso è frutto dell'appassionata attività didattica svolta dal nostro eminente Consocio presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica negli ultimi tre lustri, e costituisce una ben degna continuazione del vol. I.

« Piacevole e suggestivo per la limpidezza dello stile e per l'acuto spirito geometrico che l'informa, il volume tratta in modo profondo ed organico di teorie fondamentali, create dall'A. o che a lui debbono progressi essenziali, relative soprattutto ai sistemi algebrici di curve sopra una superficie, alla base sulle superficie e sulle varietà algebriche, agli integrali semplici sopra una superficie. L'ultimo argomento verrà ripreso e completato in un terzo volume, dedicato allo studio degli integrali semplici e multipli appartenenti ad una superficie e ad una varietà algebrica.

« La ricchezza e la portata dei risultati acquisiti giustificano ampiamente l'adozione del punto di vista « classico », limitante le indagini al campo complesso; ma appare probabile che quest'opera abbia a suscitare presto nuove ricerche nei più moderni indirizzi. Ed è veramente ammirevole che né l'età né la recente grave malattia non abbiano affievolito l'eccezionale tempra dell'A., il quale ha dettato la prefazione al presente volume dalla Clinica Villa Margherita, poco prima di subire un nuovo intervento operatorio, anche esso - come i tre precedenti - ormai felicemente superato. Ritengo che l'Accademia vorrà unirsi a me nell'inviare al caro ed illustre Collega i più fervidi auguri per la sua pronta totale guarigione e per il completamento del vol. III, che mi consta esser già in buona parte redatto ».

La Classe si associa all'unanimità e il Presidente assicura che si renderà interprete presso il prof. Severi dei sentimenti dei Colleghi.

Il Socio Segre presenta poi una Monografia del Socio Beppo Levi, il quale pochi giorni or sono è stato di passaggio a Roma, in un suo viaggio dall'Argentina ad Israele. Si tratta di un ampio lavoro, redatto in ispannolo, dal titolo « *Puntos y variedades singulares sobre variedades algebraicas y analíticas* »; esso reca però un sottotitolo in italiano: « Ricerca analitica circa lo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche », e termina simpaticamente con « alcune parole di saluto » dirette a colleghi ed amici lontani, pure in italiano, rievocanti in modo suggestivo remoti ricordi di gioventù. Ivi è compiuta un'analisi approfondita di certi aspetti del problema generale dello scioglimento delle singolarità, la quale - pur mostrando tutta la difficoltà del problema - lascia intravedere come ad esso in futuro si potrà presumibilmente dare risposta affermativa.

Il Presidente si riserva di scrivere una lettera di ringraziamento e di saluto al Collega Beppo Levi.

Il Socio E. Bompiani presenta tre volumi che documentano l'attività del Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) nel 1956. Il primo volume contiene i corsi svolti dai proff. M. Cinquini-Cibrario, I. Leray, S. L. Sobolev, A. Weinstein sulla teoria delle equazioni a derivate parziali a caratteristiche reali, sia nei casi lineari che non lineari e singolari. Il secondo volume contiene i corsi e le conferenze dei proff. G. Toraldo di Francia, C. I. Bouncomp, G. Eckart, C. Agostinelli, D. Graffi sulla propagazione delle onde elettromagnetiche. Il terzo volume contiene i corsi e le conferenze tenuti dai proff. Eckmann, W. Feuchel, E. Martinelli, M. Stein, E. Peschl sulla teoria delle funzioni di più variabili complesse e delle funzioni automorfe.

(I volumi sono in vendita presso le Edizioni Cremonese in Roma).

Questi volumi e i precedenti che concernono un'attività ormai quadriennale del Centro Internazionale Matematico Estivo, costituiscono un notevole apporto alla trattatistica di argomenti elevati di matematica, apporto tanto più importante in quanto molti degli argomenti in essi trattati avevano ricevuto maggiore attenzione all'estero che in Italia. La riprova della utilità di queste pubblicazioni, e dei corsi che esse riflettono, sta nella produzione scientifica da essi provocata anche in Italia.

Il Socio Polvani presenta il Catalogo della Mostra Storica della Scienza Italiana, svoltasi a Milano per iniziativa dell'Ente Manifestazioni Milanesi, e osserva che tale pubblicazione, uscita sotto gli auspici della Cassa di Risparmio delle Province Lombarde, non è un semplice catalogo, ma contiene alcuni articoli riguardanti le finalità della Mostra, tra i quali uno dedicato al tema: «Scienza ed umanità nella storia del pensiero scientifico italiano».

L'oratore mette poi in evidenza che alle pagg. 43-45 è ampiamente illustrata la sala n. 9, ove sono state esposte le opere dei Lincei, mentre le pagg. 95-104 sono dedicate alla sala n. 16 ove sono state raccolte le opere e i cimeli di Enrico Fermi.

Il Socio Polvani, dopo aver ringraziato la Presidenza dell'Accademia per avere concesso alla Mostra il prestito di opere della Biblioteca accademica, desidera assicurare di avere egli stesso riconsegnato tali opere alla Biblioteca stessa.

Il Presidente ringrazia i Soci Segre, Bompiani e Polvani.

Il Presidente presenta il fascicolo dei Rendiconti del mese di novembre e desidera richiamare l'attenzione dei Colleghi sul fatto che, sia per il ritardo nella restituzione delle bozze da parte di alcuni Autori, sia per la richiesta di seconde e terze bozze da parte di altri, il ritmo dei Rendiconti, nonostante la mirabile diligenza dei Segretari accademici, non è più quello che, al tempo del compianto Presidente Castelnuovo, caratterizzava la pubblicazione e costituiva motivo di vanto per l'Accademia e di ammirazione in Italia e all'estero. Prega quindi i Soci di attenersi strettamente ai termini prescritti per il rinvio delle bozze avvertendo che, nei casi di eccessivo ritardo, si provvederà alla stampa del fascicolo con la semplice indicazione del titolo del lavoro, di cui la stampa sarà rinviata ai fascicoli successivi.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Cambi, Picone, Cotronei, Natta, Quilico, Pupilli, Solaini, Caloi, D'Ancona, Rossi-Fannelli e Caglioti.

Il Socio Picone presenta una Memoria di Renzo Possenti dal titolo «Sul principio di successione in alcuni problemi elettrodinamici».

Per l'esame della suddetta Memoria viene nominata una Commissione composta dallo stesso Socio Picone e dal Collega Polvani.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

CALOI P. - Dispersione delle onde sismiche nell'ambito delle altissime frequenze.

KRALL G. - Sulla stabilità trasversale degli archi da ponte. Nota II.

TONOLO A. - Classi di ds^2 ternari le cui geodetiche ammettono integrali primi quadratici.

BATTAGLIA B. - Selezione e rapporto dei sessi nel *Copepode Harpacticoides* *Tisbe gracilis* (pres. dal Corrisp. U. D'ANCONA).

BLASCHKE W. - Sull'uso dei quaternioni duali nella cinematica (pres. dal Socio M. PICONE).

COGNETTI G. - La spermatogenesi secondaria in *Asterina gibbosa* (pres. dal Socio G. COTRONEI).

D'ARCANGELO P. - Intossicazione acuta da streptomycin e da diidro-streptomycin nel colombo: effetti sul tasso delle sostanze riducenti del sangue (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

GARABEDIAN P. R. - Applicazione al flusso supersonico del problema di Cauchy per un'equazione ellittica (pres. dal Socio M. PICONE).

GHIZZETTI A. - Su una particolare equazione differenziale ordinaria non lineare (pres. dal Socio M. PICONE).

VÂLCOVICI V. - Sur la loi linéaire de E. P. Hubble concernant la récession des nébuleuses extragalactiques (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 febbraio 1958.

BIBLIOTECA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE. — *Prima sesiune științifică de biologie și documentare. București, 15-16 decembrie 1955. Comunicări și Discuții.* București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1957. Pp. XVI-364, in-8°.

BOJKO B. B. — Vedi: GUBKIN S. I., DOBROVOL'SKIJ S. I. i BOJKO B. B.

CANESTRINI L. e MORENO M. — *Studio camministico delle personalità nevrotiche.* Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1957. Pp. 238, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, XLII).

ČERKASOVA L. S. — *Biokhimiya travmy (pri ranenijah m'jagkih tkanej, perelomah kosti i ih osložnenijah gnojnoj infekciej).* Minsk, Institut Fiziologii Akademii Nauk Belorusskoj SSR, 1957. Pp. 191, in-8°, con figg.

DANUSSO Arturo. — *Memorie presentate al Symposium su la plasticità...*

DOBROVOL'SKIJ S. I. — Vedi: GUBKIN S. I., DOBROVOL'SKIJ S. I. i BOJKO B. B.

ENTE MANIFESTAZIONI MILANESI. — *Mostra Storica della Scienza Italiana.* Milano, Amilcare Pizzi Editore, 1957. Pp. XXXI-III, in-8°, con figg. e tavv.

Equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali. 1° ciclo. Varenna, Villa Monastero, 1-10 giugno 1956. Pagine varie, in-4° (In ciclostile) (Centro Internazionale Matematico Estivo).

Flora Republicii Populare Romîne. Vol. V. București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1957. Pp. 553, in-8°, con tavv.

Gidroenergetičeskie resursy Belorussii. Minsk, Akademija Nauk Belorusskoj SSR, Institut Energetiki, 1957. Pp. 174, in-8°, con figg.

- GUBKIN S.I., DOBROVOL'SKIJ S. I. i BOJKO B. B. — *Fotoplastičnost'*. Minsk, Akademijskaja Nauk BSSR, Fiziko-Tehničeskij Institut, 1957. Pp. 166, in-8°, con figg.
- Kompleksnoe energosnabženie gorodov*. Minsk, Institut Energetiki Akademii Nauk BSSR, 1957. Pp. 215, in-8°, con figg.
- Kratkij očerk geologii Belorussii*. Minsk, Institut Geologičeskikh Nauk an BSSR, 1957. Pp. 214, in-8°, con figg.
- LEVI Beppo. — *Puntos y variedades singulares sobre variedades algebraicas y analíticas*. Rosario, 1957. Pp. 119, in-8°.
- Memorie presentate al Symposium su la plasticità nella Scienza delle Costruzioni tenutosi... dal 25 al 27 settembre 1956 in onore di Arturo Danusso...* Bologna, Zanichelli, 1956. Pp. 351, in-8°, con figg. e tavv.
- MORENO M. — Vedi: CANESTRINI L. e MORENO M.
- Propagazione delle onde elettromagnetiche*. 2° ciclo. Varenna, Villa Monastero, 24 agosto-3 settembre 1956. Paginaz. varia, in-4° (In ciclostile) (Centro Internazionale Matematico Estivo).
- Scientific Results of the «Bratæg» Expedition, 1947-48*. N. 1: MOSBY H. — *The Norwegian Antarctic Expedition in «Bratæg» 1947-48*; LARSEN N. — *Narrative of the Expedition*. Bergen, A. S. John Griegs Boktrykkeri, 1956. Pp. 18, in-8°, con figg. (Publikasjon fra Kommandør Chr. Christensens Hvalfangstmuseum i Sandefjord, 17).
- Scientific Results of the «Bratæg» Expedition, 1947-48*. N. 3: MIDTTUN L. and NATVIG J. — *Pacific Antarctic Waters*. Bergen, A. S. John Griegs Boktrykkeri, 1957. Pp. 130, in-8°, con figg. (Publikasjon fra Kommandør Chr. Christensens Hvalfangstmuseum i Sandefjord, 20).
- Scientific Results of the «Bratæg» Expedition 1947-48*. N. 4: HOLGERSEN H. — *Ornithology of the «Bratæg» Expedition 1947-48*. Bergen, A. S. John Griegs Boktrykkeri, 1957. Pp. 80, in-8°, con figg. (Publikasjon fra Kommandør Chr. Christensens Hvalfangstmuseum i Sandefjord, 21).
- Scritti Medici in onore di Luigi Villa professore di Clinica Medica Generale e di Terapia Medica dell'Università di Milano nel XXV anno di insegnamento*. Milano, CEA, 1957. Pp. 801, in-8°.
- SEVERI Francesco. — *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica*. Vol. II. Roma, Edizioni Cremonese, 1958. Pp. 463, in-8°.
- Teoria delle funzioni di più variabili complesse e delle funzioni automorfe*. 3° ciclo. Varenna, Villa Monastero, 3-12 settembre 1956. Paginaz. varia, in-4° (In ciclostile) (Centro Internazionale Matematico Estivo).
- VILLA Luigi. — Vedi: *Scritti Medici in onore di Luigi Villa...*
- VITTORIA Vincenzo. — *Strade stabilizzate*. Estr. da «Giornale del Genio Civile», 1957, fasc. 4-5, aprile-maggio.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 marzo 1958

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Su certi complessi quadratici e cubici di rette.*

Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

I. — OGGETTO DELLA RICERCA.

In una Nota recente ⁽¹⁾ A. Terracini ha ripreso in considerazione il problema (già trattato da C. Segre) di trovare i complessi quadratici di rette mutati in sé dalle omologie armoniche che hanno per centri i vertici di un tetraedro T e per piani-assi le facce opposte a quei vertici. Il risultato è il seguente. Tali complessi sono di tre tipi: 1° complessi di Battaglini; 2° complessi tetraedrali di tetraedro T ; 3° complessi tetraedrali di tetraedro T^* avente due vertici comuni con T e gli altri due vertici sul lato opposto di T e separanti armonicamente i due vertici di T situati su di esso.

Quest'ultimo caso è interessante perché mostra che il tetraedro T rispetto a cui è definito il complesso tetraedrale può non coincidere col tetraedro T che definisce le omologie armoniche del complesso quadratico in sé.

Il risultato del Terracini può conseguirsi in altro modo che si estende senza difficoltà a trovare in qualsiasi ambiente proiettivo S_n i complessi sia quadratici che cubici che ammettono le omologie armoniche definite da un $(n + 1)$ -edro.

(*) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) A. TERRACINI, *Un'osservazione su un passo di un lavoro giovanile di C. Segre*, « Boll. U.M.I. » (3), 12, pp. 673-677 (1957).

2. - COMPLESSI QUADRATICI IN S_3 CON OMOLOGIE ARMONICHE.

Cominciamo dal ritrovare il risultato del Terracini.

In uno S_3 proiettivo si abbia un tetraedro T di vertici $O_i, i = 1, 2, 3, 4$, che assumiamo come tetraedro di un riferimento rispetto al quale (fissato che ne sia il punto unità) un punto x abbia coordinate x^i , una retta p abbia coordinate (radiali) p^{ik} . Sia Ω_i l'omologia armonica di centro O_i e di piano-asse la faccia opposta in T ; essa muta x^i in $-x^i$, p^{ik} in $-p^{ik}$ e lascia inalterate le altre coordinate (in cui non figura l'indice i).

Si cercano i complessi quadratici mutati in sé dalle Ω_i (e dai loro prodotti).

Sia E il primo membro dell'equazione di un tale complesso e $p^{hk} p^{jl}$ (con un certo coefficiente) un suo termine. Esso non cambia segno per Ω_i se zero o due degli indici h, k, j, l coincidono con i ; cambia segno se *uno* solo degli indici h, k, j, l coincide con i . Nel primo caso diremo che quel termine ha carattere pari, nel secondo che ha carattere dispari, rispetto ad Ω_i . Affinché il complesso sia invariante *ogni* termine deve avere lo stesso carattere rispetto ad Ω_i : questo può dirsi quindi il carattere di E rispetto ad Ω_i (o di Ω_i rispetto ad E).

Si devono quindi distinguere varî casi in relazione ai caratteri di E rispetto alle quattro Ω_i .

Se E ha carattere *pari* rispetto a *tutte* le Ω_i un determinato indice, per esempio 1, figura in ciascun termine zero o due volte. Nel termine $p^{1i} p^{1k}$ dev'essere $i = k$ (altrimenti si avrebbe carattere dispari rispetto ad Ω_i, Ω_k). Tanto basta per concludere che l'equazione è del tipo

$$(2.1) \quad c_{ih} (p^{ih})^2 = 0, \quad i, h = 1, 2, 3, 4; i \neq h$$

cioè si ha un *complesso di Battaglini*.

Abbia invece E carattere *dispari* rispetto a tutte le Ω_i ; ogni indice deve comparire una volta in ciascun termine e si ha necessariamente

$$(2.2) \quad Ap^{12} p^{34} + Bp^{13} p^{42} + Cp^{14} p^{23} = 0$$

che è un complesso tetraedrale di tetraedro T .

Abbia E carattere pari rispetto ad Ω_1 e dispari rispetto alle rimanenti. Se in un termine non figurasse l'indice 1, uno dei rimanenti indici figurerebbe due volte e si avrebbe carattere pari rispetto alla Ω_i con quell'indice; se in un termine figurasse 1 due volte c'è almeno uno dei rimanenti indici che non figura in esso e per la relativa Ω_i si avrebbe carattere pari. Questo caso non è possibile.

Allo stesso modo si esclude che una Ω_i abbia carattere dispari e tre caratteri pari.

Supponiamo infine che E abbia carattere *pari* rispetto a due omologie, per esempio Ω_1 e Ω_2 , e *dispari* rispetto a Ω_3, Ω_4 . Se v'è un termine $p^{1i} p^{1k}$

la coppia $i k$ deve coincidere (l'ordine è indifferente) con la coppia 3 4. Si ha il complesso di Terracini

$$(2.3) \quad A p^{13} p^{14} + B p^{23} p^{24} = 0,$$

che è pure tetraedrale, ma *non* rispetto a T, bensì rispetto ad un tetraedro T^* avente in comune con T i vertici O_3, O_4 e avente gli altri due vertici sulla retta $O_1 O_2$ e separanti questi armonicamente (la loro determinazione dipende da A, B supposti ambedue non nulli).

3. — ALCUNE PROPRIETÀ DEI COMPLESSI DI TERRACINI.

Dato T per finire di fissare il riferimento si dispone ancora del punto unità (cioè di un fattore in ciascuna delle x^i). Si può sempre scegliere questo (e in ∞^2 modi, poiché i fattori di x^3, x^4 non influiscono sul risultato) in modo che il complesso (2.3) si riduca all'una o all'altra delle due forme

$$p^{13} p^{14} = p^{23} p^{24} \quad , \quad p^{13} p^{14} = - p^{23} p^{24}.$$

Nel primo caso i vertici di T^* sulla $O_1 O_2$ sono reali (nei punti $1, \pm 1, 0, 0$), nel secondo complessi coniugati. Se si valuta il birapporto che definisce il complesso rispetto a T^* si trova -1 ; cioè i complessi (2.3) sono i complessi tetraedrali *armonici*.

Sia questo fatto, sia le equazioni precedenti mostrano che due tali complessi sono sempre proiettivamente equivalenti in ∞^2 modi (purché i loro tetraedri presentino la stessa realtà per i vertici). In particolare un complesso tetraedrale armonico si trasforma in sé per un gruppo G_2 di collineazioni, sottogruppo del G_8 che lascia fissi i vertici di T.

Mettiamo in evidenza un sistema ∞^1 (che *non* è un gruppo) di omologie armoniche che pure mutano tale complesso in sé.

L'omologia armonica che ha per centro il punto $x \underset{\circ}{(x^i)}$ e per piano-asse il piano $u \underset{\circ}{(u_i)}$ ha le equazioni

$$\bar{x}^i = c^i_j x^j$$

con

$$c^i_j = 2 x^i u_j - \delta^i_j (u x)$$

essendo $(u x) = u_h x^h \neq 0$.

Si prenda $x \underset{\circ}{(0, 0, 1, h)}$ sulla $O_3 O_4$ e il piano-asse $u \underset{\circ}{(0, 0, h, 1)}$ passante per $O_1 O_2$ e in modo che O_3, O_4 si corrispondano in questa omologia armonica.

Si ha $(u x) = 2h$ e si può prendere

$$c^i_j = x^i u_j - h \delta^i_j.$$

Per detta omologia

$$\bar{p}^{ik} = c^i_j c^k_l p^{jl}$$

cioè esplicitamente

$$\begin{aligned} \bar{p}^{12} &= +h p^{12} & , & \quad \bar{p}^{13} = -p^{14} & , & \quad \bar{p}^{14} = -h^2 p^{13} \\ \bar{p}^{23} &= -p^{24} & , & \quad \bar{p}^{24} = -h^2 p^{23} & , & \quad \bar{p}^{34} = -h p^{34} . \end{aligned}$$

Da queste seguono

$$\bar{p}^{13} \bar{p}^{14} = h^2 p^{13} p^{14} \quad , \quad \bar{p}^{23} \bar{p}^{24} = h^2 p^{23} p^{24}$$

cioè ogni complesso

$$A p^{13} p^{14} + B p^{23} p^{24} = 0$$

si muta in sé per effetto delle ∞^1 omologie armoniche ottenute al variare di h .

4. - COMPLESSI QUADRATICI IN S_n CON OMOLOGIE ARMONICHE.

Caratterizziamo i complessi quadratici in S_n ($n > 3$) che ammettono le $n + 1$ omologie armoniche determinate da un suo $(n + 1)$ -edro T (essendo centri delle omologie i suoi vertici, assi le facce opposte).

Indichiamo rispettivamente con Ω_i , Ω_α le omologie dette per cui E ha carattere dispari o carattere pari e ordiniamo gli indici in modo che quelli indicati con i siano i primi della serie naturale (o zero se non ve ne sono) e gli α i seguenti fino ad $n + 1$.

Esaminiamo i termini *a priori* possibili. Ciascun termine conterrà o soli indici del primo gruppo o soli indici del secondo gruppo, o indici sia del primo sia del secondo gruppo.

1° Termini del tipo $p^{ih} p^{kl}$ con i, h, k, l tutti diversi fra loro. Possono esistere termini di questo tipo se il primo gruppo comprende $s \geq 4$ indici; ma se $s > 4$ un termine sarebbe pari rispetto agli indici che non contiene; quindi $s = 4$; $\alpha = 5, \dots, n + 1$.

2° Termini del tipo $p^{\alpha\beta} p^{\gamma\delta}$; per la parità gli unici termini possibili sono $(p^{\alpha\beta})^2$ con $\alpha, \beta = 1, \dots, n + 1$.

3° Termini con indici dei due gruppi; per la parità rispetto agli indici α sono del tipo $p^{\alpha i} p^{\alpha k}$, $i \neq k$; se gli indici del primo gruppo fossero $s > 2$ un tale termine sarebbe pari rispetto agli indici di esso che non contiene, quindi è $s = 2$, cioè gli unici termini sono del tipo $p^{\alpha 1} p^{\alpha 2}$, $\alpha = 3, \dots, n + 1$.

Ora osserviamo che non possono coesistere in E termini di due diversi tipi a causa dei diversi intervalli di variabilità di i in essi.

I tipi di complessi quadratici aventi la proprietà voluta sono:

$$(I) \quad c_{ih,kl} p^{ih} p^{kl} = 0, \quad i, h, k, l = 1, 2, 3, 4$$

con $c_{ih,kl}$ simmetrico rispetto alle due coppie di indici, emisimmetrico rispetto agli indici di ciascuna coppia e gli indici i, h, k, l tutti diversi (se $n > 3$, $\alpha = 5, \dots, n + 1$);

$$(II) \quad c_{\alpha\beta} (p^{\alpha\beta})^2 = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n + 1$$

con $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$;

$$(III) \quad c_\alpha p^{\alpha 1} p^{\alpha 2} = 0 \quad \alpha = 3, \dots, n + 1.$$

I complessi del tipo (I) sono per $n > 3$ i meno interessanti perché si ottengono per proiezione di un complesso tetraedrale di S_3 dallo spazio S_{n-4} dei punti O_α ($\alpha = 5, \dots, n+1$); cioè (I) si compone di tutte le rette degli spazi S_{n-2} che da S_{n-4} proiettano le rette di un complesso tetraedrale.

I complessi del tipo (II) sono gli analoghi dei complessi di Battaglini.

I complessi del tipo (III) sono gli analoghi dei complessi di Terracini, ma appena $n > 3$, si differenziano nettamente dai complessi tetraedrali.

Essi non hanno invarianti rispetto al gruppo delle collineazioni che lasciano fisso lo $(n+1)$ -edro dato; infatti disponendo del punto unità (e supposte tutte le $c_\alpha \neq 0$) i coefficienti c_α possono ridursi tutti in valore assoluto $= 1$. E poiché in questa operazione non intervengono le coordinate x^1, x^2 , si ha che in particolare:

Esistono ∞^2 collineazioni, i cui punti uniti sono i vertici dell' $(n+1)$ -edro di S_n , che mutano un complesso generale del tipo (III) (cioè con tutte le $c_\alpha \neq 0$) in sé.

Si applichi a tale complesso una qualsiasi omologia armonica avente il centro sulla retta $O_1 O_2$ in $(1, h, 0, \dots, 0)$, che muti O_1 in O_2 e il cui asse passi per lo S_{n-2} dei punti O_α , (quindi di coordinate $(h, 1, 0, \dots, 0)$).

Con le stesse notazioni del n. 3 si ha

$$\begin{aligned} c_{11}^1 &= 0, & c_{12}^1 &= 1, & c_{11}^2 &= h^2, & c_{12}^2 &= 0 \\ c_{\beta}^\alpha &= -h \delta_\beta^\alpha, & c_{i1}^\alpha &= 0, & c_{i2}^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\bar{p}^{i\alpha} = -h c_{ij}^i p^{j\alpha}$$

o più esplicitamente

$$\bar{p}^{1\alpha} = p^{2\alpha}, \quad \bar{p}^{2\alpha} = p^{1\alpha}$$

da cui

$$\bar{p}^{1\alpha} \bar{p}^{2\alpha} = h^2 p^{1\alpha} p^{2\alpha}$$

e perciò *un complesso del tipo (III) è mutato in sé da ∞^1 omologie armoniche (sopra specificate).*

La costruzione geometrica dei complessi del tipo (III) è la seguente. Siano dati i punti O_1, O_2 , uno S_{n-2} sghembo con la retta $O_1 O_2$ e in questo una quadrica non specializzata (di rango massimo) Q . Scelti O_1, O_2 come vertici di un riferimento e i punti O_α in modo che formino un $(n-1)$ -edro autopolare rispetto a Q l'equazione di Q sia

$$c_\alpha (x^\alpha)^2 = 0.$$

Si consideri l'insieme delle rette tali che le loro intersezioni con $x^1 = 0$, $x^2 = 0$ dividano armonicamente quelle con il cono che da $O_1 O_2$ proietta Q . Per una tale retta i due primi punti hanno le coordinate $(0, p^{12}, p^{1\alpha})$ e $(-p^{12}, 0, p^{2\alpha})$. Un punto della loro congiungente di coordinate $(-\mu p^{12}, \lambda p^{12}, \lambda p^{1\alpha} + \mu p^{2\alpha})$ appartiene al cono se

$$\lambda^2 c_\alpha (p^{1\alpha})^2 + 2\lambda\mu c_\alpha p^{1\alpha} p^{2\alpha} + \mu^2 c_\alpha (p^{2\alpha})^2 = 0$$

e i punti così ottenuti formano gruppo armonico col precedente se e solo se

$$c_{\alpha} p^{1\alpha} p^{2\alpha} = 0, \quad \alpha \geq 3.$$

Questa è la caratterizzazione geometrica dei complessi del tipo (III) e che include quella dei complessi di Terracini quando $\alpha = 3, 4$ (Q si riduce ad una coppia di punti).

Come questi sono casi particolari dei complessi tetraedrali, così dai complessi del tipo (III) si può passare a complessi più generali imponendo che il birapporto delle intersezioni sopra considerate sia costante (non necessariamente $= -1$). Questi sono rappresentati dalla penultima equazione in cui s'interpreti λ/μ come una costante. Essi ammettono tutte le omologie armoniche aventi per centro un qualsiasi punto di S_{n-2} e come asse lo S_{n-1} congiungente $O_1 O_2$ allo S_{n-3} polare del centro rispetto a Q .

5. - COMPLESSI CUBICI IN S_n CON OMOLOGIE ARMONICHE.

Determiniamo ora i complessi cubici che ammettono le omologie armoniche relative all' $(n+1)$ -edro.

Manteniamo le stesse notazioni adoperate.

1° I termini con indici appartenenti soltanto al primo gruppo sono del tipo $p^{i_1 i_2} p^{i_3 i_4} p^{i_5 i_6}$ e ciascun indice deve figurare un numero dispari di volte. Ciò può accadere in due modi: o ciascun indice vi figura una volta sola, cioè tutti gli indici sono differenti, o un indice vi comparisce tre volte e gli altri una volta sola.

Nel primo modo, i sei indici distinti che compariscono in un termine devono comparire in tutti gli altri (se un indice non comparisse in un altro termine esso avrebbe carattere pari per quel termine); ciò implica che $i = 1, \dots, 6$.

2° Nel secondo modo si ha un termine del tipo $p^{ij} p^{ih} p^{il}$. Se fosse $j = h = l (\neq i)$ si avrebbe $(p^{ij})^3$ e poiché questo termine ha carattere pari rispetto agli altri indici nel primo gruppo (se ve ne fossero) questi non possono essere che due, $i = 1, 2$. Se due degli indici j, h, l sono distinti devono esserlo tutti: l'indice ripetuto i e gli altri tre indici devono comparire in ogni termine, quindi il primo gruppo deve constare di quattro indici, $i = 1, \dots, 4$.

3° Termini con soli indici del secondo gruppo. Per la parità in ciascun termine ogni indice α che vi figuri deve comparirvi due volte (non è possibile quattro volte). Sicché un termine di questo tipo deve potersi scrivere $p^{\alpha\beta} p^{\alpha\gamma} p^{\beta\gamma}$.

4° Termini con indici sia del primo che del secondo gruppo. Gli indici del secondo gruppo, che figurano due volte in un termine, potranno essere uno o due. Se v'è un solo tale indice il termine sarà del tipo $p^{\alpha i} p^{\alpha h} p^{kl}$.

E potrà accadere che sia $h = i$, cioè che si abbia un termine del tipo $(p^{\alpha i})^2 p^{kl}$, ma allora per il carattere dispari di i dovrà essere per esempio,

$i = k \neq l$, cioè si ha, il termine $(p^{\alpha i})^2 p^{il}$; poiché gli indici i, l devono allora comparire in tutti i termini (che altrimenti avrebbero carattere pari) il primo gruppo ha due soli indici, $i = 1, 2$.

5° Può invece accadere (sempre nell'ipotesi che vi sia un solo indice) che sia $i \neq h$ e in tal caso i quattro indici i, h, k, l sono tutti distinti; e poiché tali indici devono ritrovarsi in ciascun termine gli indici del primo gruppo sono quattro, $i = 1, 2, 3, 4$ e $\alpha \geq 5$.

6° Termini con due indici distinti del secondo gruppo. Possono darsi due casi. Se figura un fattore $(p^{\alpha\beta})^2$ l'altro fattore deve avere solo indici del primo gruppo; e poiché questi due indici devono comparire in tutti i termini dev'essere $i = 1, 2$.

Può essere invece che $p^{\alpha\beta}$ non comparisca al quadrato, e allora per la parità il termine che contiene quella coordinata è del tipo $p^{\alpha\beta} p^{\alpha i} p^{\beta h}$ e come prima i, h non possono prendere che i valori $1, 2$.

Abbiamo dunque i seguenti tipi di termini (indicando con lettere diverse valori distinti degli indici):

- | | |
|---|--|
| 1) $p^{i_1 i_2} p^{i_3 i_4} p^{i_5 i_6}$ | $i_1, \dots, i_6 = 1, \dots, 6; \alpha \geq 7$ |
| 2) $(p^{i2})^3$ | $\alpha \geq 3; i = 1, 2$ |
| 3) $p^{ij} p^{ih} p^{il}$ | $i, j, h, l = 1, 2, 3, 4; \alpha \geq 5$ |
| 4) $p^{\alpha\beta} p^{\alpha\gamma} p^{\beta\gamma}$ | $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n+1$ |
| 5) $(p^{\alpha i})^2 p^{i2}$ | $i = 1, 2; \alpha \geq 3$ |
| 6) $p^{\alpha i} p^{\alpha h} p^{kl}$ | $i, h, k, l = 1, \dots, 4; \alpha \geq 5$ |
| 7) $(p^{\alpha\beta})^2 p^{i2}$ | $i = 1, 2; \alpha, \beta \geq 3$ |
| 8) $p^{\alpha\beta} p^{\alpha i} p^{\beta 2}$ | $i = 1, 2; \alpha, \beta \geq 3.$ |

Da essi deduciamo i vari tipi di complessi tenendo conto dei termini che possono coesistere in E.

Da 1) si ha il complesso

$$I) c_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} p^{i_1 i_2} p^{i_3 i_4} p^{i_5 i_6} = 0, \quad i_1, \dots, i_6 = 1, \dots, 6.$$

Da 2), 5), 7), 8) si ha il complesso

$$II) c(p^{i2})^3 + c_{\alpha i} (p^{\alpha i})^2 p^{i2} + c_{\alpha\beta} (p^{\alpha\beta})^2 p^{i2} + c_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} p^{\alpha i} p^{\beta 2} = 0, \quad i = 1, 2; \alpha, \beta \geq 3.$$

Da 3), 6) si ha il complesso

$$III) c_{i,j,h,l} p^{ij} p^{ih} p^{il} + c_{\alpha,j,h,k,l} p^{\alpha j} p^{\alpha h} p^{kl} = 0, \quad i, j, h, k, l = 1, \dots, 4; \alpha \geq 5.$$

Da 4) si ha il complesso

$$IV) c_{\alpha\beta\gamma} p^{\alpha\beta} p^{\alpha\gamma} p^{\beta\gamma} = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n+1.$$

Naturalmente il tipo (I) non può presentarsi che a partire da S_5 ; gli altri tipi si presentano già in S_3 .

Geometria. — *Sui sistemi F di linee spaziali.* Nota (*) del Corrip. ALESSANDRO TERRACINI.

1. Ho già avuto in passato occasione di richiamare l'attenzione sui sistemi F di linee dello spazio ordinario ⁽¹⁾: sono i sistemi ∞^6 di linee integrali di un sistema di due equazioni differenziali ordinarie in due funzioni incognite $y(x), z(x)$, della forma

$$(F) \begin{cases} y''' = y''(Ay'' + Bz'') + C_1 y'' + D_1 z'' + E_1 \\ z''' = z''(Ay'' + Bz'') + C_2 y'' + D_2 z'' + E_2, \end{cases}$$

dove $A, B, C_1, D_1, E_1, C_2, D_2, E_2$ sono funzioni di x, y, z, y', z' (A. Terracini [2], dove si considerano più generalmente sistemi F di curve in un iperspazio). Tali sistemi mi si sono presentati come generalizzazioni di quei particolari sistemi ∞^3 di linee di un dato piano, che avevo parimenti designati come sistemi F. (A. Terracini [1], [3]). La proprietà caratteristica dei sistemi F piani di cui in [3] è poi stata estesa ai sistemi F spaziali da Demaria [4]. Ricordiamo inoltre che i sistemi F spaziali (al pari di quelli piani, e di quelli iperspaziali, cfr. [1], [2]) si trasformano ancora in sistemi F per trasformazioni puntuali, cosicché ha senso parlare di sistemi F di linee tracciate su una V_3 per esempio algebrica, o analitica; e anche (cfr. A. Terracini [2], n. 6) che un esempio di sistema F, su una V_3 algebrica qualunque, è fornito dalle mutue intersezioni delle superficie algebriche di un sistema lineare ∞^4 esistente sulla V_3 .

Scopo essenziale della presente Nota è quello di assegnare (nn. 2-3) una nuova proprietà caratteristica dei sistemi F spaziali, che formuliamo in uno S_3 proiettivo, ma che per la sua stessa natura è senz'altro valida sulle V_3 sopra menzionate.

Anzi più generalmente, essa si potrebbe formulare in una varietà V_3 differenziabile, nell'ordine di idee di cui in Bompiani [5].

È invece essenzialmente legata alla natura proiettiva dell'ambiente la questione, di natura assai più particolare, di cui mi occupo nella seconda parte della Nota (nn. 4-5): la determinazione dei sistemi F spaziali tali che le loro curve appartengano tutte a complessi lineari, in modo che la totalità di questi stia in un sistema lineare della minima dimensione possibile. Sebbene particolare, tale questione può tuttavia presentare qualche interesse, in quanto isola una classe completa di sistemi F, caratterizzati da una proprietà geometrica, tale però da presentare una certa generalità.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) Nel quale le x, y, z che seguono si interpretano come coordinate proiettive non omogenee di punto.

La proprietà caratteristica dei sistemi F spaziali alla quale si è alluso più sopra si può enunciare come segue: in S_3 , un sistema ∞^6 di linee, definito dal sistema di equazioni differenziali

$$(1.1) \quad y''' = \varphi(x, y, z, y', z', y'', z'') \quad , \quad z''' = \psi(x, y, z, y', z', y'', z'')$$

(dove⁽²⁾ supponiamo che le funzioni degli argomenti $x, y, z, y', z', y'', z''$ considerate nei secondi membri, oltre ad essere lipschitziane rispetto alle variabili y, z, y', z' , ammettano – per quanto riguarda gli argomenti y'', z'' – derivate parziali terze in un rettangolo $\alpha < y'' < \beta, \gamma < z'' < \delta$) è un sistema F se e solo se i tre E_3 delle tre linee del sistema contenenti tre E_2 uscenti da uno stesso punto con la medesima retta tangente e appartenenti ad una calotta del second'ordine σ_2^2 , appartengono necessariamente ad una calotta del terz'ordine σ_3^3 .

2. Che i sistemi F godano effettivamente della proprietà enunciata⁽³⁾ si controlla senza difficoltà come segue. Riferendoci per semplicità all' E_1 avente per centro l'origine e come retta tangente l'asse x , e continuando a denotare con A, B, \dots, E_2 i valori che le funzioni indicate con i medesimi simboli assumono per $x = y = z = y' = z' = 0$, scriviamo le condizioni affinché i tre E_3

$$(2.1) \quad y = \frac{y''}{2}x^2 + \frac{y'''}{6}x^3 + [4] \quad , \quad z = \frac{z''}{2}x^2 + \frac{z'''}{6}x^3 + [4] \quad (i = 1, 2, 3)$$

appartengano ad una calotta del terz'ordine

$$(2.2) \quad z = py + q_1x^2 + q_2xy + q_3y^2 + a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3 + [4].$$

Esse sono ovviamente le

$$(2.3) \quad z''_i = py''_i + 2q_1, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$(2.4) \quad z'''_i = py'''_i + 3q_2y''_i + 6a_1. \quad (i = 1, 2, 3)$$

Le (2.3) esprimono che gli E_2 dei tre E_3 appartengono ad una calotta del second'ordine σ_2^2 ; se esse sono soddisfatte, la compatibilità del sistema delle (2.4) considerato rispetto alle incognite q_2, a_1 è espressa dalla

$$(2.5) \quad \begin{vmatrix} z'''_1 - py'''_1 & y''_1 & 1 \\ z'''_2 - py'''_2 & y''_2 & 1 \\ z'''_3 - py'''_3 & y''_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

che, ricavando le y'''_i, z'''_i dal sistema (F), si riconosce subito essere soddisfatta.

3. Per stabilire ora che la proprietà enunciata nel n. 1 è atta a caratterizzare i sistemi F, proviamo anzitutto il seguente

(2) Senza preoccuparci di ridurre al minimo le ipotesi per la validità del teorema.

(3) E anzi i tre E_3 in questione appartengono a ∞^4 calotte del terz'ordine.

LEMMA. - Se $f(\xi, \eta), g(\xi, \eta)$ sono due funzioni di ξ, η definite in un rettangolo R ($\alpha < \xi < \beta, \gamma < \eta < \delta$) e ivi dotate di derivate terze, tali da soddisfare l'equazione funzionale

$$(3.1) \quad \begin{vmatrix} g(\xi_1, p\xi_1 + q) - pf(\xi_1, p\xi_1 + q) & \xi_1 & 1 \\ g(\xi_2, p\xi_2 + q) - pf(\xi_2, p\xi_2 + q) & \xi_2 & 1 \\ g(\xi, p\xi + q) - pf(\xi, p\xi + q) & \xi & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

dove ξ_1, ξ_2, ξ, p, q sono quantità arbitrarie tali che i tre punti

$$(\xi_1, p\xi_1 + q), \quad (\xi_2, p\xi_2 + q), \quad (\xi, p\xi + q)$$

risultino interni al rettangolo R , si ha necessariamente

$$(3.2) \quad \begin{cases} f(\xi, \eta) = (a\xi + b\eta)\xi + c_1\xi + d_1\eta + e_1 \\ g(\xi, \eta) = (a\xi + b\eta)\eta + c_2\xi + d_2\eta + e_2, \end{cases}$$

dove le a, b, c_i, d_i, e_i ($i = 1, 2$) sono costanti.

Per dimostrare il Lemma, osserviamo anzitutto che, fatto nella (3.1) $p = 0$, se ne deduce

$$(3.3) \quad g(\xi, \eta) = \varphi(\eta)\xi + \psi(\eta)$$

dove nelle ipotesi fatte esistono le successive derivate $\varphi', \varphi'', \varphi''', \psi', \psi'', \psi'''$.

Utilizzando le (3.3) nella (3.1), e derivando, come è lecito, rispetto a p , si ha un'equazione dalla quale, posto $p = 0$, si ricava

$$(3.4) \quad f(\xi, \eta) = \varphi'(\eta)\xi^2 + \lambda(\eta)\xi + \mu(\eta),$$

dove $\lambda(\eta), \mu(\eta)$ indicano funzioni di η , che nelle ipotesi fatte sono derivabili almeno due volte.

Se ora si sostituiscono le (3.3), (3.4) nella (3.1), e si deriva due volte rispetto a ξ , si ottiene.

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \{ \xi\varphi(p\xi + q) + \psi(p\xi + q) - p[\xi^2\varphi'(p\xi + q) + \lambda(p\xi + q)\xi + \mu(p\xi + q)] \} = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} & -3\xi\varphi''(p\xi + q) + \psi''(p\xi + q) - 2\lambda'(p\xi + q) - \\ & - p[\xi^2\varphi'''(p\xi + q) + \xi\lambda''(p\xi + q) + \mu''(p\xi + q)] = 0. \end{aligned}$$

E di qui, considerando come variabili indipendenti le $\xi, \eta = p\xi + q$, p si ricava

$$(3.5) \quad \begin{cases} \varphi(\eta) = a\eta + c_2, & \lambda(\eta) = b\eta + c_1, \\ \mu(\eta) = d_1\eta + e_1, & \psi(\eta) = b\eta^2 + d_2\eta + e_2, \end{cases}$$

dove le a, b, c_i, d_i, e_i ($i = 1, 2$) sono costanti. Sostituendo le (3.5) nelle (3.3), (3.4), si concludono appunto le (3.2). Viceversa, assunte le (3.2), la (3.1) è soddisfatta; il Lemma è così dimostrato.

Ciò premesso, consideriamo un sistema (I.1), per il quale supponiamo che le terne di linee integrali uscenti dall' E_1 ($x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0$) godano della proprietà di cui nell'enunciato del n. 1.

Siano $(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0, y''_i, z''_i)$, con $i = 1, 2, 3$, tre E_2 contenenti il predetto E_1 ; e - posto $x - x_0 = t$ - siano

$$(3.6) \quad \begin{cases} y - y_0 = y'_0 t + \frac{1}{2} y''_i t^2 + \frac{1}{6} y'''_i t^3 + [4] \\ z - z_0 = z'_0 t + \frac{1}{2} z''_i t^2 + \frac{1}{6} z'''_i t^3 + [4] \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

gli E_3 di tre linee integrali individuate rispettivamente dai predetti E_2 . Affinché essi appartengano ad una calotta del terz'ordine σ^2_2

$$\begin{aligned} z - z_0 = (z'_0 - p y'_0) (x - x_0) + p (y - y_0) + q_1 (x - x_0)^2 + \\ + q_2 (x - x_0) (y - y_0) + q_3 (y - y_0)^2 + a_1 (x - x_0)^3 + \\ + a_2 (x - x_0)^2 (y - y_0) + a_3 (x - x_0) (y - y_0)^2 + a_4 (y - y_0)^3 + [4], \end{aligned}$$

sono necessarie e sufficienti le condizioni

$$(3.7) \quad z''_i = p y''_i + 2 (q_1 + q_2 y'_0 + q_3 y'^2_0)$$

$$(3.8) \quad z'''_i = p y'''_i + 3 (q_2 + 2 q_3 y'_0) y''_i + 6 (a_1 + a_2 y'_0 + a_3 y'^2_0 + a_4 y'^3_0).$$

L'ipotesi che i tre E_2 appartengano ad una calotta del second'ordine esprime ovviamente la compatibilità delle tre equazioni (3.7) nelle due incognite $p, q = q_1 + q_2 y'_0 + q_3 y'^2_0$. Soddisfatte le (3.7), la compatibilità delle tre equazioni (3.8) nelle due incognite

$$q_2 + 2 q_3 y'_0, \quad a_1 + a_2 y'_0 + a_3 y'^2_0 + a_4 y'^3_0$$

si traduce nella

$$(3.9) \quad \begin{vmatrix} \psi(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0, y''_1, p y''_1 + q) - p \varphi(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0, y''_1, p y''_1 + q) & y''_1 & 1 \\ \psi(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0, y''_2, p y''_2 + q) - p \varphi(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0, y''_2, p y''_2 + q) & y''_2 & 1 \\ \psi(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0, y''_3, p y''_3 + q) - p \varphi(x_0, y_0, z_0, y'_0, z'_0, y''_3, p y''_3 + q) & y''_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Salvo il cambiamento delle notazioni, la (3.9) coincide con la (3.1). Basta perciò applicare il Lemma perché risulti completa la dimostrazione del teorema enunciato nel n. 1.

4. Passando ora a una questione particolare - che per la sua stessa natura si pone solamente in uno S_3 proiettivo - ci proponiamo di fermare l'attenzione su quei particolari sistemi F di linee spaziali, tali che ciascuna di queste appartenga ad un complesso lineare, in modo che la dimensione d del sistema lineare di complessi lineari così ottenuti sia la minima possibile.

Ove non si restringa il problema con l'aggiunta dell'ultima condizione, vi è naturalmente un'arbitrarietà molto maggiore nelle soluzioni. Già nel caso in cui si considerino sistemi F costituiti da cubiche sghembe citiamo - fra gli altri - gli esempi forniti dai seguenti sistemi:

1° il sistema delle ∞^6 cubiche sghembe che nascono come intersezioni residue delle quadriche di un sistema lineare ∞^4 dotato di retta base (ciò per la ragione indicata nel n. 6 di A. Terracini [2], già richiamata nel corso

del n. 1 della presente Nota); per esempio il sistema delle cubiche sghembe che passano per due punti fissi e ammettono come corda una retta fissa;

2° il sistema ∞^6 delle cubiche sghembe tangenti ad una retta fissa r in un punto variabile, nel quale ammettono un piano osculatore prefissato, e passanti ulteriormente per un punto dato. Che tale sistema sia effettivamente un sistema F si controlla subito assumendo per esempio lo spigolo A_2A_3 del tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ di riferimento delle coordinate proiettive coincidente con la retta r , la faccia $A_1A_2A_3$ nel piano osculatore prefissato, ed il vertice A_4 coincidente col punto dato;

3° il sistema ∞^6 contenuto entro il sistema $\infty^7\Theta_7$ delle cubiche sghembe passanti per un dato punto G con data retta tangente g , e dato piano osculatore γ , definito dalla condizione ulteriore che ciascuna delle sue cubiche, insieme con una cubica prefissata c_0^3 di Θ_7 dia luogo nel punto G ad invarianti J_1, J_2 di Beniamino Segre (cfr. [6] e anche le pp. 36-37 di [7]) ⁽⁴⁾ legati dalla $J_1^3 = J_2^2$. - Che anche questo sia un sistema F risulta in quanto si può disporre dei dati in modo che le $\infty^6 C^3$ siano rappresentate dalle

$$y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3, \quad z = c_4x + c_5x^2 + c_6x^3,$$

con c_1, \dots, c_6 costanti arbitrarie.

Ritornando ora al problema impostato al principio di questo numero, le condizioni iniziali che si possono imporre ad una soluzione del sistema (F) del n. 1 escludono subito la possibilità che tutte le linee del sistema appartengano ad un complesso lineare fisso; e non è nemmeno possibile che i complessi lineari delle linee di un sistema F appartengano ad un fascio.

Pertanto la minima dimensione d che, per il sistema lineare di complessi lineari in questione, non vi è ragione di respingere a priori è $d = 2$. Dalle considerazioni che seguono risulta che il valore $d = 2$ è effettivamente realizzabile, e anzi ci proponiamo di *indicare tutti i sistemi (F) le cui linee integrali appartengono tutte a complessi lineari, nell'ipotesi che questi appartengano ad una rete*.

Vi è luogo a distinguere tre casi in corrispondenza alle tre possibilità che può offrire la rete - che chiameremo T - secondoché la sua base è:

- I) una schiera di una quadrica F non specializzata;
- II) una coppia di fasci di raggi distinti $M\mu, N\nu$, dove i due punti M, N ed i due piani μ, ν appartengono ad una medesima retta;
- III) un fascio di raggi $M\mu$ contato due volte.

Studiamo anzitutto il caso I, adottando il sistema di riferimento in modo che l'equazione della quadrica F sia

$$(4.1) \quad z = xy,$$

(4) Per due E_3 rappresentati rispettivamente dalle

$$y = a_2x^2 + [3], \quad z = a_3x^3 + [4];$$

$$y = a'_2x^2 + [3], \quad z = a'_3x^3 + [4]$$

si ha

$$J_1 = a_2/a'_2, \quad J_2 = a_3/a'_3.$$

e supponendo che la schiera base della rete T sia quella delle generatrici $x = \text{costante}$, cosicch  l'equazione della rete T  

$$(4.2) \quad p_{12} + p_{34} + lp_{14} + mp_{23} = 0,$$

con l, m costanti arbitrarie. Affinch  le linee $y = y(x), z = z(x)$ appartengano ad un complesso lineare (4.2)   necessario e sufficiente che le funzioni

$$xy' - y - z' \quad , \quad yz' - y'z \quad , \quad 1$$

siano legati da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, vale a dire che sia

$$(4.3) \quad \begin{vmatrix} xy'' - z'' & yz'' - y''z \\ xy''' - z''' + y'' & yz''' - y'''z + y'z'' - y''z' \end{vmatrix} = 0.$$

Supponiamo ora che si tratti di una linea integrale del sistema (F) del n. 1: sostituendo nel primo membro della (4.3) le y''', z''' a norma del sistema stesso, risulta un'equazione che lega $x, y, z, y', z', y'', z''$. Si devono scrivere le condizioni affinch  questa equazione sia soddisfatta identicamente: eseguendo il calcolo, si trovano, come necessarie e sufficienti, le condizioni

$$(4.4) \quad D_1 = \frac{y'}{z - xy}, \quad C_2 = \frac{z - xz'}{z - xy}, \quad D_2 - C_1 = \frac{xy' - y + z'}{z - xy}, \quad E_1 = 0, \quad E_2 = 0.$$

Perci  il pi  generale sistema F le cui linee appartengono a complessi lineari della rete avente come base la schiera $x = \text{cost.}$ della quadrica (4.1)   costituito dalle linee integrali del sistema

$$(4.5) \quad \begin{cases} y''' = y''(Ay'' + Bz'') + C_1 y'' + \frac{y'}{z - xy} z'' \\ z''' = z''(Ay'' + Bz'') + \frac{z - xz'}{z - xy} y'' + D_2 z'', \end{cases}$$

dove A, B, C_1 sono funzioni arbitrarie delle x, y, z, y', z' , mentre D_2 si calcola dalla terza fra le (4.4).

Vi   luogo a osservare che secondo l'enunciato che precede i sistemi F in questione risultano contenuti in quella classe dei sistemi F con $E_1 = E_2 = 0$, per la quale Demaria - cfr. il n. 7 di [4] - ha rilevate alcune propriet , tra cui l'invarianza della classe stessa per omografie. La stessa osservazione sussiste per entrambi i casi II e III, a norma del successivo n. 5.

All'ultimo enunciato si pu  aggiungere che, come si verifica senza difficolt , per il sistema F definito dalle (4.5) le ∞^6 linee integrali si ripartiscono fra gli ∞^2 complessi lineari (4.2) in modo che a ciascuno di questi corrispondono ∞^4 linee del sistema.

5. Nel caso II, assunto il tetraedro di riferimento $A_1 A_2 A_3 A_4$ in modo che sia $A_3 \equiv M, A_2 \equiv N, A_3 A_2 A_1 \equiv \mu, A_3 A_2 A_4 \equiv \nu$, si trova, analogamente, che il pi  generale sistema F le cui linee appartengano a complessi lineari della

rete considerata è costituito dalle linee integrali del sistema

$$(5.1) \quad \begin{cases} y''' = y'' (Ay'' + Bz'') + My'' \\ z''' = z'' (Ay'' + Bz'') + \left(M + \frac{1}{x}\right)z'', \end{cases}$$

dove A, B, M sono funzioni arbitrarie di x, y, z, y', z' .

Finalmente, nel caso III, assunto - come è lecito - il sistema di riferimento in modo che la rete T sia individuata dai complessi $p_{14} = 0, p_{42} = 0, p_{12} - p_{34} = 0$, il più generale sistema (F) le cui linee integrali appartengono a complessi lineari della rete considerata è

$$(5.2) \quad \begin{cases} y''' = y'' (Ay'' + Bz'') + My'' \\ z''' = z'' (Ay'' + Bz'') - y'' + Mz'', \end{cases}$$

dove A, B, M sono funzioni arbitrarie di x, y, z, y', z' .

Si riscontra senza difficoltà che si ottengono esempi di sistemi F costituiti da cubiche sghembe, corrispondenti al caso II, oppure al caso III, nel modo seguente. Partiamo dal sistema ∞^7 di C^3 sghembe indicato con Θ_7 nell'esempio 3° del n. 4 (cubiche sghembe passanti per un punto G con data retta tangente g e dato piano osculatore γ); i complessi lineari delle ∞^7 cubiche costituiscono soltanto un sistema lineare ∞^3 che indichiamo con Σ_3 . Orbene, le ∞^6 C^3 contenute in Θ_7 , e soddisfacenti all'ulteriore condizione che i loro complessi lineari siano involutori con un complesso lineare fisso K (non appartenente al fascio involutorio con il sistema lineare Σ_3) forniscono precisamente gli esempi in questione; e più precisamente esempi del caso II, oppure del caso III, secondoché il punto G ed il piano γ non si corrispondono, oppure si corrispondono, nella polarità nulla definita da K .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. TERRACINI, *Aportes al estudio de la ecuación diferencial* $y''' = F(x, y, y') + G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$, « Rev. de matem. y de fís. teor. de la Univ. Nac. de Tucumán », vol. 2 (1941).
- [2] A. TERRACINI, *Sobre algunos sistemas de ecuaciones diferenciales de tercer orden*, « Anais da Acad. Brasileira de Ciencias », t. xvi (1944).
- [3] A. TERRACINI, *Sobre las ecuaciones diferenciales de tipo (G) y de de tipo (F)*, « Rev. de matem. y de fís. teor. de la Univ. Nac. de Tucumán », vol. 6 (1948).
- [4] D. C. DEMARIA, *Sui sistemi di curve iperspaziali che godono della proprietà proiettiva o prospettiva in prima approssimazione*, « Mem. dell'Acc. delle Scienze di Torino », (3), t. I (1954).
- [5] E. BOMPIANI, *Topologia differenziale*. - I. *Enti topologici determinati da elementi differenziali di curve*. - II. *Invarianti topologici di elementi curvilinei*. - III. *Calotte superficiali del 2° ordine tangenti in un punto*. - IV. *Teoremi topologici e proiettivi sulle calotte superficiali*. - V. *Geometria delle superficie in uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni*. - VI. *Invarianti topologici di elementi di una calotta*, questi « Rend. » (8), voll. 8 (1950) e 15 (1953).
- [6] BENIAMINO SEGRE, *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori*, questi « Rend. » (6), t. xxii, 2° sem. 1935.
- [7] BENIAMINO SEGRE, *Some properties of differentiable varieties and transformations, with special reference to the analytic and algebraic cases*. (« Erg. der Mathematik », Heft 13), Springer 1957.

Geometria differenziale. — *Sulle rappresentazioni isodromiche di una superficie sopra un'altra.* Nota (*) del Socio CORRADINO MINEO.

È del 1898 una Nota del prof. Adolfo Venturi, nella quale egli definisce una rappresentazione *isodromica*, che conserva le *lossodromiche*, senza essere *isogona*. In termini più precisi, si tratta d'una rappresentazione di una superficie su di un'altra, in modo che alle curve isogonali, secondo un certo angolo, d'un sistema di curve dell'una corrisponda un sistema di curve isogonali, secondo un angolo differente, del corrispondente sistema di curve dell'altra. Il Venturi dà le equazioni dell'isodromia, senza risolverle ⁽¹⁾. Di risolverle mi proposi, il 1911, in due Note presentate a questa Accademia ⁽²⁾. Ma purtroppo una sola delle equazioni date dal Venturi si riferisce al problema, mentre l'altra è del tutto estranea alla questione. Ecco perché ora torno sull'argomento, per porre esattamente il problema e risolvere le relative equazioni, necessarie e sufficienti per l'isodromia: non soltanto per compiere un dovere, ma perché l'isodromia è una generalizzazione, oso dire elegante, della rappresentazione conforme. Come per quest'ultima, la ricerca dipende dal trovare due funzioni armoniche una delle quali si può dare ad arbitrio, mentre l'altra resta in conseguenza determinata (salvo una costante arbitraria).

I. Sia

$$(1) \quad ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2)$$

il quadrato dell'elemento lineare sulla superficie S, e

$$(2) \quad ds'^2 = \lambda' (d\alpha^2 + d\beta^2)$$

il quadrato dell'elemento lineare della superficie S' sulla quale si rappresenta S.

Sulla S consideriamo le isogonali alle curve $v = \text{costante}$ ⁽³⁾, e sia

$$(3) \quad v - f(u) = \text{costante}$$

l'equazione di queste isogonali. Siano

$$(4) \quad \alpha = \alpha(u, v), \quad \beta = \beta(u, v)$$

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) A. VENTURI, *Sopra alcune proprietà rappresentative degli angoli e sulla proiezione isodromica*, « Rivista Geografica Italiana », Firenze, pp. 35-37 (1898).

(2) Vedi questi « Rendiconti », CORRADINO MINEO, *Sulle rappresentazioni isodromiche*. Nota I e II, Vol. XX, serie 5^a, 1911.

(3) Si può osservare che così il problema non è posto nella forma più generale, perché sulla S il sistema fondamentale rispetto al quale si considerano le isogonali fa parte d'un sistema isoterma. In generale, volendo prendere come sistema fondamentale su S le $v = \text{costante}$, si può riferire la S a un sistema semplicemente ortogonale, ma non isoterma. Si è scelto, in questa Nota, un sistema isoterma (come fa il Venturi), per semplificare i calcoli: generalizzare è poi agevole.

le formole di rappresentazione di S su S' . Per mezzo delle (4), il ds'^2 diventa

$$(5) \quad ds'^2 = \lambda' (E_1 du^2 + 2 F_1 du dv + G_1 dv^2),$$

essendo:

$$(6) \quad E_1 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial v} \right)^2.$$

Se chiamiamo θ l'angolo secondo cui le (3) incontrano le $v = \text{cost.}$ di S e θ_1 l'angolo secondo cui le stesse (3) incontrano le $v = \text{cost.}$ di S' (il cui ds'^2 si è trasformato secondo la (5)), abbiamo

$$(7) \quad \text{tang } \theta = \frac{dv}{du} = f' \quad , \quad \text{tang } \theta_1 = \frac{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} f'(u)}{E_1 + F_1 f'(u)}.$$

Se vogliamo che $\text{tang } \theta$ sia una costante c , dovrà essere

$$f'(u) = c.$$

E se nello stesso tempo vogliamo che $\text{tang } \theta_1$ sia eguale a un'altra costante c_1 , ne segue:

$$c_1 = \frac{c \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{E_1 + c F_1},$$

ovvero:

$$(8) \quad \frac{1}{c_1} = \frac{E_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} \frac{1}{c} + \frac{F_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}.$$

Ora, affinché, qualunque sia la costante c (compresa tra, $-\infty$ e $+\infty$), il 2° membro di (8) prenda un valore costante $\frac{1}{c_1}$ (compreso tra $\frac{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{F_1}$ e F_1), è necessario e sufficiente che si abbia

$$(9) \quad \frac{F_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} = h \quad , \quad \frac{E_1}{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}} = k,$$

essendo h e k due assegnate costanti ⁽⁴⁾.

Si ha intanto dalle (6):

$$(10) \quad E_1 G_1 - F_1^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u} \right)^2;$$

e le (9) diventano:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} = \epsilon h \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u} \right), \\ \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} \right)^2 = \epsilon k \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u} \frac{\partial \beta}{\partial v} - \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial u} \right). \end{cases}$$

$$(\epsilon = \pm 1)$$

Si tratta dunque d'un sistema di due equazioni a derivate parziali del 1° ordine, al quale devono soddisfare le due funzioni incognite α e β : sistema che in generale non si sa risolvere. Ma qui il sistema è particolarmente semplice.

(4) La prima delle (9) è la sola esatta che si trovi nella citata Nota del Venturi.

Basta fare due combinazioni delle (11): la prima combinazione moltiplicando la 1^a delle (11) per $\partial\alpha/\partial u$ e la seconda delle (11) per $\partial\alpha/\partial v$ e poi sottraendo l'una dall'altra, la seconda combinazione moltiplicando la prima delle (11) per k e la seconda delle (11) per h e poi sottraendo l'una dall'altra. Otteniamo le due relazioni:

$$\frac{\partial\beta}{\partial u} = \varepsilon \left(h \frac{\partial\alpha}{\partial u} - k \frac{\partial\alpha}{\partial v} \right) \quad , \quad \frac{\partial\alpha}{\partial u} \frac{\partial\beta}{\partial u} = \varepsilon \frac{\partial\beta}{\partial u} \left(k \frac{\partial\beta}{\partial v} - h \frac{\partial\beta}{\partial u} \right) .$$

Escludendo il caso banale $\frac{\partial\beta}{\partial u} = 0$, deduciamo

$$(12) \quad \frac{\partial\alpha}{\partial u} = \varepsilon \left(k \frac{\partial\beta}{\partial v} - h \frac{\partial\beta}{\partial u} \right) \quad , \quad \frac{\partial\alpha}{\partial v} = \varepsilon \left(h \frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{1+h^2}{k} \frac{\partial\beta}{\partial u} \right) .$$

Le (12) sono perfettamente equivalenti alla (12).

Esse impongono la condizione (affinchè α esista):

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(k \frac{\partial\beta}{\partial v} - h \frac{\partial\beta}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(h \frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{1+h^2}{k} \frac{\partial\beta}{\partial u} \right) ,$$

cioè:

$$(13) \quad (1+h^2) \frac{\partial^2\beta}{\partial u^2} - 2hk \frac{\partial^2\beta}{\partial u \partial v} + k^2 \frac{\partial^2\beta}{\partial v^2} = 0 .$$

Segue dunque

$$(14) \quad \alpha = \varepsilon \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \left[\left(k \frac{\partial\beta}{\partial v} - h \frac{\partial\beta}{\partial u} \right) du + \left(h \frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{1+h^2}{k} \frac{\partial\beta}{\partial u} \right) dv \right] + \text{costante} .$$

Infatti, il differenziale totale sotto il segno integrale è, per la (13), un differenziale esatto. Il problema dell'isodromia è quindi teoricamente risolto: per β bisogna prendere un *qualunque* integrale della (13) come funzione β e allora la funzione α è data dalla (14).

Si verifica facilmente che anche per α si ha:

$$(15) \quad (1+h^2) \frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} - 2hk \frac{\partial^2\alpha}{\partial u \partial v} + k^2 \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} = 0 ,$$

sicché, viceversa, si può dare per α un qualunque integrale della (15) e la funzione β è allora data da

$$\beta = \varepsilon \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \left[\left(k \frac{\partial\alpha}{\partial v} - h \frac{\partial\alpha}{\partial u} \right) du + \left(h \frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{1+h^2}{k} \frac{\partial\alpha}{\partial u} \right) dv \right] + \text{costante} .$$

2. L'equazione (13), essendo negativa l'espressione

$$h^2 k^2 - (1+h^2) k^2 = -k^2 ,$$

è un'equazione lineare del 2° ordine del tipo ellittico. Operando la classica trasformazione

$$(16) \quad \xi = \frac{hk}{1+h^2} u + v \quad , \quad \eta = \frac{k}{1+h^2} u ,$$

essa diventa

$$(17) \quad \frac{\partial^2\beta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial \eta^2} = 0 .$$

D'altra parte, il sistema fondamentale (12) si trasforma nel seguente

$$(18) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = -\varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial \xi}.$$

E quindi la soluzione del problema si ha assumendo come funzione β una *qualsunque* funzione armonica di ξ ed η , e la α è data da

$$(19) \quad \alpha = \varepsilon \int_{(\xi_0, \eta_0)}^{(\xi, \eta)} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \xi} d\eta - \frac{\partial \beta}{\partial \eta} d\xi \right) + \text{costante}.$$

Si vede subito che anche α è una funzione armonica di ξ ed η ; e quindi si può, viceversa, dare ad arbitrio α e poi determinare β . Peraltro le (18) si possono condensare nella relazione

$$\alpha + i\beta = F(\xi \pm i\eta),$$

dove F è simbolo di funzione olomorfa della variabile complessa $\xi + i\eta$ ⁽⁵⁾.

Nelle nuove coordinate, come si vede, la soluzione del problema è praticamente più semplice, bastando darsi una funzione $\Phi(\xi, \eta)$ armonica in ξ, η . La soluzione del sistema (12) è allora

$$\alpha = \varepsilon \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} \left[\left(k \frac{\partial \Phi}{\partial v} - h \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) du + \left(h \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{1+h^2}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right) dv \right], \quad \beta = \Phi \left(\frac{hk}{1+h^2} u + v, \frac{k}{1+h^2} u \right).$$

Geometria differenziale. — *Classi di ds^2 ternari le cui geodetiche ammettono integrali primi quadratici.* Nota ^(*) del Corrisp. ANGELO TONOLO.

La questione di determinare tutti i ds^2 riemanniani le cui geodetiche ammettono integrali primi quadratici fu dal Levi-Civita tradotta in un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali del primo ordine che involgono elementi intrinseci di una terna ortogonale di congruenze di linee della varietà V_n definita dal corrispondente ds^2 . Si conoscono già dei ds^2 che godono della proprietà enunciata, ad esempio, quelli segnalati dallo Stäckel [1], dal Painlevé [2] e dal Levi-Civita [3]. Lo scopo della presente Nota, con riferimento ai ds^2 ternari, è di risalire dalle equazioni del Levi-Civita alle espressioni esplicite di questi elementi lineari, il che è stato possibile facendo

(5) È superfluo dire che con ciò l'isodromia non si muta in isogonia! Nelle nuove coordinate ξ, η , la (1), per esempio, si muta in

$$ds^2 = \lambda \left[d\xi^2 - 2h d\xi d\eta + \left(\frac{(1+h^2)^2}{k^2} + h^2 \right) d\eta^2 \right],$$

che non è una forma isometrica; ecc. ecc.

(*) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1958.

particolari ipotesi su certe indeterminate ausiliarie che figurano nel sistema differenziale e sulla terna di congruenze di linee. Ho considerato pertanto non privo d'interesse far conoscere la suddetta deduzione anche se, nello sviluppo dei calcoli, si potranno constatare coincidenze con quelli che si trovano nella Memoria del Di Pirro [4], con riferimento ai ds^2 di Stäckel, ed in quella del Levi-Civita.

È quasi superfluo osservare che, per questi ds^2 , riuscirà anche conseguita l'espressione della forza viva T dei sistemi olonomi a tre gradi di libertà con vincoli lisci, indipendenti dal tempo e non soggetti a forze le cui equazioni dinamiche ammettono integrali primi quadratici nelle componenti delle velocità, oltre quello delle forze vive, avendosi, come è notissimo, $T = 1/2 (ds/dt)^2$.

PRELIMINARI.

Siano, nelle coordinate x^λ ($\lambda, \mu, \nu, h, k, j = 1, 2, 3$), $c_{\mu\nu}(x^\lambda)$ le componenti di un tensore doppio simmetrico covariante; denotiamo con ρ_h i suoi autovalori e con i_h il corrispondente campo covariante di autovettori unità mutuamente ortogonali nella varietà riemanniana V_3 di tensore fondamentale $a_{\mu\nu}$. Possiamo scrivere

$$(I) \quad c_{\mu\nu} = \rho_1 i_\mu^1 i_\nu^1 + \rho_2 i_\mu^2 i_\nu^2 + \rho_3 i_\mu^3 i_\nu^3.$$

Per i nove coefficienti di rotazione $\gamma_{h\bar{k}j}$ della terna ortogonale di congruenze di linee $[h]$ individuata dagli autovettori, possiamo liberarci dalla notazione a tre indici per adoperare quella a due indici soltanto mediante le posizioni

$$(2) \quad \rho_{h\bar{k}} = \gamma_{h+1 \ h+2 \ \bar{k}},$$

con la convenzione di considerare equivalenti gli indici che sono congrui fra loro rispetto al modulo 3. Il Levi-Civita ha dimostrato [5] che le equazioni del moto di un sistema materiale di forza viva

$$(3) \quad T = \frac{1}{2} a_{\mu\nu}(x^\lambda) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$$

nelle variabili lagrangiane x^λ , che noi supporremo a tre gradi di libertà, nelle ipotesi che i vincoli siano indipendenti dal tempo, senza attrito e siano nulle le forze esterne, ammettono l'integrale primo quadratico nelle componenti delle velocità

$$(4) \quad H = c_{\mu\nu}(x^\lambda) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \text{cost.}$$

solo e soltanto quando nella varietà riemanniana V_3 il cui quadrato dell'elemento lineare ds è dato da

$$(5) \quad ds^2 = 2 T dt^2 = a_{\mu\nu}(x^\lambda) dx^\mu dx^\nu,$$

è possibile tracciare una terna di congruenze $[h]$ di linee per cui si ha

$$(6) \quad (\rho_2 - \rho_3) \rho_{11} + (\rho_3 - \rho_1) \rho_{22} + (\rho_1 - \rho_2) \rho_{33} = 0,$$

$$(7) \quad \begin{cases} i^\lambda \partial_\lambda \rho_h = 0 & , & i^\lambda \partial_\lambda \rho_h = 2 (\rho_{h+1} - \rho_h) \rho_{h+2h}, \\ i^\lambda \partial_\lambda \rho_h = 2 (\rho_h - \rho_{h+2}) \rho_{h+1h} & , & \partial_\lambda = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} & , & i^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds_j}, \end{cases}$$

ds_j elemento d'arco della linea j della congruenza $[j]$.

Il problema generale sarà risolto quando sapremo dedurre dalle equazioni (6), (7) le espressioni degli elementi lineare delle varietà V_3 nelle quali esiste una terna di congruenze di linee caratterizzata dalle soprascritte equazioni, ove le ρ_h vanno trattate come indeterminate ausiliarie. In seguito, noi effettueremo questa deduzione in tre casi particolari che portano ai ds^2 di Stäckel, di Painlevé e di Levi-Civita.

§ 1. - ds^2 di Stäckel.

Facciamo l'ipotesi che le tre ρ_h siano distinte e che la terna $[h]$ sia costituita da congruenze normali, cioè ognuna di esse risulti dalle traiettorie ortogonali di una famiglia di superficie di V_3 . In tal caso, come è noto, sono nulle tutte le ρ_{hh} e quindi sono soddisfatte le equazioni (6). Assumendo come sistema di riferimento le tre famiglie di superficie ora definite, il ds^2 della varietà assume la forma

$$(8) \quad ds^2 = H_1^2 dx^{12} + H_2^2 dx^{22} + H_3^2 dx^{32}.$$

Avendosi ora

$$(9) \quad i^\lambda = H_h^{-1} e^\lambda,$$

dal sistema (7) si ottiene

$$(10) \quad \begin{cases} \partial_h \rho_h = 0 & , & H_{h+1}^{-1} \partial_{h+1} \rho_h = 2 (\rho_{h+1} - \rho_h) \rho_{h+2h}, \\ H_{h+2}^{-1} \partial_{h+2} \rho_h = 2 (\rho_h - \rho_{h+2}) \rho_{h+1h}, \end{cases}$$

ove

$$(11) \quad \rho_{h+2h} = -H_{h+1}^{-1} \partial_{h+1} \log H_h, \quad \rho_{h+1h} = H_{h+2}^{-1} \partial_{h+2} \log H_h.$$

Ne consegue, per essere diverse fra loro le ρ_h ,

$$(12) \quad \partial_h \rho_h = 0, \quad (13) \quad \partial_i \log \frac{\rho_h - \rho_i}{H_h^2} = 0, \quad i = h+1, h+2.$$

Le (12) ci dicono che la ρ_h non dipende dalla variabile x^h ; quindi

$$(14) \quad \rho_h = \rho_h(x^{h+1}, x^{h+2});$$

dalle (13) si trae

$$(15) \quad H_h^2 = (\rho_h - \rho_{h+1}) \Psi_{h+1h}(x^h, x^{h+2}) = (\rho_h - \rho_{h+2}) \Psi_{h+2h}(x^h, x^{h+1}),$$

ove le Ψ_{jh} , $j = h+1, h+2$, sono funzioni arbitrarie delle variabili x^h , con esclusione della x^j . Posto

$$(16) \quad \Phi_h = \frac{\Psi_{h, h+2}}{\Psi_{h, h+1}} = \Phi_h(x^{h+1}, x^{h+2}),$$

si trova agevolmente dalle (15)

$$(17) \quad \prod_h \Phi_h = -1.$$

Da questa identità e da quelle che si deducono per derivazione, si conclude che si ha

$$(18) \quad \Phi_h = \varepsilon_{h3} \frac{\tau_{h+23}(x^{h+2})}{\tau_{h+13}(x^{h+1})}, \quad \varepsilon_{h3} = 1 \text{ per } h = 1, 2 \\ \varepsilon_{h3} = -1 \text{ per } h = 3$$

ove le τ_{j3} sono funzioni arbitrarie della variabile x^j .

Dalle (16) si trae, per le (18),

$$(19) \quad \Psi_{h, h+2} = \varepsilon_{h3} \tau_{h+23} w_h(x^{h+1}, x^{h+2}), \quad \Psi_{h, h+1} = \tau_{h+13} w_h(x^{h+1}, x^{h+2}).$$

Dalle relazioni

$$(20) \quad \frac{\Psi_{h+2, h}}{\Psi_{h+1, h}} + \frac{\Psi_{h, h+2}}{\Psi_{h+1, h+2}} = 1,$$

che facilmente si deducono dalle (15), si ottiene l'identità

$$(21) \quad \varepsilon_{h3} w_{h+2} + \varepsilon_{h+13} w_h + \varepsilon_{h+23} w_{h+1} = 0,$$

mentre dalle (15) stesse, in forza delle (19), si ricava la relazione

$$(22) \quad \varepsilon_{h3} \rho_{h+2} w_{h+2} + \varepsilon_{h+13} \rho_h w_h + \varepsilon_{h+23} \rho_{h+1} w_{h+1} = 0.$$

Dalle (21), (22) per derivazione, tenendo presente che le ρ_h, w_h sono indipendenti dalla variabile x^h , si riconosce che si ha

$$(23) \quad w_h = \varepsilon_{h+13} (\tau_{h+23} - \tau_{h+13}),$$

$$(24) \quad \rho_h = \frac{\tau_{h+11} - \tau_{h+21}}{\tau_{h+22} - \tau_{h+12}},$$

ove le τ_{j1}, τ_{j2} sono funzioni arbitrarie della sola variabile x^j .

Sostituendo nelle (15) le (24) e le (19), nelle quali sono state poste le (23), e facendo le posizioni

$$(25) \quad \omega_{hk} = -\varepsilon_{h3} \tau_{h3} \tau_{hk}, \quad h = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2; \quad \omega_{h3} = -\varepsilon_{h3} \tau_{h3},$$

$$(26) \quad \Omega = \text{Det}(\omega_{hk}),$$

si trova

$$(27) \quad H_h^2 = \frac{\Omega}{\Omega_{h1}},$$

ove le Ω_{h_i} denotano i complementi algebrici degli elementi ω_{h_i} del determinante Ω . Si osservi che le funzioni ω_{hk} dipendono dalla sola variabile x^h . Ponendo le (27) nella (8) si ottiene

$$(28) \quad ds^2 = \Omega \left(\frac{dx^{12}}{\Omega_{11}} + \frac{dx^{22}}{\Omega_{21}} + \frac{dx^{32}}{\Omega_{31}} \right),$$

che è l'espressione di un ds^2 di Stäckel.

Osservazione. - Per la deduzione della (28) è essenziale supporre che le ρ_h siano distinte. Nel caso, ad esempio, $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$, l'espressione del corrispondente ds^2 è diversa dalla (28). (Cfr. la Memoria del Di Pirro). Se $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho$, dal sistema (7) si ottiene $\rho = \text{cost.}$ e quindi dalla (1)

$$c_{\mu\nu} = \rho a_{\mu\nu},$$

donde dalla (4) l'integrale delle forze vive

$$a_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \text{cost.}$$

§ 2. - ds^2 di Painlevé.

Si supponga che le congruenze $[h]$, oltre che normali, siano anche isotrope ⁽¹⁾; inoltre delle ρ_h due siano eguali e distinte dalla terza; per fissare le idee, si abbia $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$. Per un fissato valore h , la normalità della corrispondente congruenza $[h]$ è caratterizzata dalle equazioni

$$(29) \quad \rho_{h+1 \ h+1} + \rho_{h+2 \ h+2} = 0,$$

mentre per la sua isotropia si ha

$$(30) \quad \rho_{h+1 \ h+2} + \rho_{h+2 \ h+1} = 0.$$

Ne consegue, per la coesistenza delle (29), (30),

$$(31) \quad \rho_{hk} + \rho_{kh} = 0,$$

le quali, posto

$$(32) \quad \vartheta_h = \rho_{h+1 \ h+2} = -\rho_{h+2 \ h+1},$$

permettono di esprimere tutte le rotazioni della terna di congruenze $[h]$ per mezzo delle ϑ_h . Per un teorema di Ricci [6], nelle ipotesi fatte, la V_3 è rappresentabile conformemente sullo spazio euclideo ed assumendo come sistema di riferimento la terna $[h]$, il suo ds^2 assume la forma

$$(33) \quad ds^2 = H^{-2} (dx^{12} + dx^{22} + dx^{32}),$$

avendosi inoltre

$$(34) \quad \vartheta_h = \partial_h H.$$

(1) Cioè tali che il vettore rappresentante la curvatura geodetica di ogni congruenza $[h]$ della terna coincida in direzione con la bisettrice dell'angolo che fanno tra di loro le linee delle congruenze $(h+1)$, $(h+2)$.

Le equazioni (6) sono soddisfatte identicamente e le (10), (11) danno, sostituendo alle H_i , H^{-i} ,

$$(35) \quad \partial_h \rho_h = 0,$$

$$(36) \quad \partial_{h+1} \rho_h = (\rho_{h+1} - \rho_h) \partial_{h+1} \log H^2, \quad \partial_{h+2} \rho_h = (\rho_{h+2} - \rho_h) \partial_{h+2} \log H^2.$$

Se in queste teniamo conto che $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, si ricavano le equazioni

$$(37) \quad \begin{cases} \partial_1 \rho_1 = 0, & \partial_2 \rho_1 = 0, & \partial_3 \rho_1 = (\rho_3 - \rho_1) \partial_3 \log H^2, \\ \partial_1 \rho_3 = (\rho_1 - \rho_3) \partial_1 \log H^2, & \partial_2 \rho_3 = (\rho_1 - \rho_3) \partial_2 \log H^2, & \partial_3 \rho_3 = 0. \end{cases}$$

Le prime due ci dicono intanto che ρ_1 è funzione della sola variabile x^3 . Eliminando dalle (37) le indeterminate ρ_1 , ρ_3 , si trovano le equazioni

$$(38) \quad \partial_{i3} \log H = 2 \partial_i \log H \cdot \partial_3 \log H, \quad i = 1, 2.$$

Le quali, ponendo

$$(39) \quad H^2 = \Psi^{-1},$$

si trasformano nelle seguenti

$$\partial_{i3} \Psi = 0,$$

donde

$$(40) \quad \Psi = \Gamma(x^1, x^2) + K(x^3),$$

$\Gamma(x^1, x^2)$, $K(x^3)$ essendo funzioni arbitrarie delle variabili indicate, tali però da rendere positiva la funzione Ψ . Sostituendo nella (8) si trova

$$(41) \quad ds^2 = [\Gamma(x^1, x^2) + K(x^3)] [dx^{12} + dx^{22} + dx^{32}],$$

che è un ds^2 di Painlevé.

§ 3. - ds^2 di Levi-Civita.

Delle tre congruenze $[h]$ una, ad esempio la $[1]$, sia normale e geodetica e delle tre ρ_h due siano eguali e distinte dalla terza; per fissare le idee, supponiamo $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$. Dalla (6) si ottiene allora

$$(42) \quad \rho_{22} - \rho_{33} = 0.$$

Ma per la normalità della congruenza $[1]$ si ha

$$(43) \quad \rho_{22} + \rho_{33} = 0.$$

Concludiamo intanto che deve essere

$$(44) \quad \rho_{22} = \rho_{33} = 0.$$

A queste vanno aggiunte le

$$(45) \quad \rho_{21} = \rho_{31} = 0.$$

per il fatto che la $[1]$ è geodetica. Poiché questa congruenza è anche normale, essa risulta dalle traiettorie ortogonali di una famiglia di superficie $f_1(x^\lambda) = c_1$. Gli autovettori i^λ sono proporzionali alle funzioni f_1^λ , con

$$f_1^\lambda = a^{\lambda\mu} \partial_\mu f_1.$$

Alle superficie $f_1(x^\lambda) = c_1$ associamo altre due famiglie di superficie $f_2(x^\lambda) = c_2$, $f_3(x^\lambda) = c_3$ che taglino ortogonalmente la $f_1(x^\lambda) = c_1$. Ciò si può sempre fare in quanto che la condizione di ortogonalità fra la $f_1(x^\lambda) = c_1$ e la $f_i(x^\lambda) = c_i$ in V_3 si ottiene scrivendo che deve aversi

$$f_1^\mu \partial_\mu f_i = 0, \quad i = 2, 3.$$

L'equazione a derivate parziali del primo ordine lineare ed omogenea nella incognita u

$$f_1^\mu \partial_\mu u = i^\mu \partial_\mu u = 0$$

ammette due integrali indipendenti $u = f_2(x^\lambda)$, $u = f_3(x^\lambda)$. Otteniamo così un sistema triplo di superficie $f_j(x^\lambda) = c_j$ tale che $f_1(x^\lambda) = c_1$ è ortogonale tanto alle $f_2(x^\lambda) = c_2$, quanto alla $f_3(x^\lambda) = c_3$. Assumendo come sistema coordinato nella V_3 , otteniamo per il ds^2 della varietà una espressione del tipo

$$(46) \quad ds^2 = H_1^2 dx^{12} + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 2, 3.$$

Teniamo presente che per il campo contravariante (covariante) degli autovettori si hanno le espressioni

$$(47) \quad i^\lambda = H_1^{-1} e_1^\lambda, \quad i_\lambda = H_1 e_\lambda^1,$$

mentre, con riferimento agli altri due campi di autovettori, abbiamo

$$(48) \quad i_2^1 = 0, \quad i_1^2 = 0, \quad (49) \quad i_3^1 = 0, \quad i_1^3 = 0.$$

Dal sistema (7) si trae, tenendo conto che $[1]$ è geodetica,

$$(50) \quad i^\lambda \partial_\lambda \rho_1 = 0,$$

donde

$$(51) \quad \rho_1 = \text{cost.} = K.$$

Dallo stesso sistema si ottiene, ($\rho_2 = \rho_3$)

$$(52) \quad i^\lambda \partial_\lambda \rho_2 = 0, \quad h = 2, 3.$$

La sommatoria rispetto a λ può essere effettuata soltanto per $\lambda = 2, 3$, in quanto che per le (48), (49), sono nulle le i^1 per $h = 2, 3$. Moltiplicando per i_μ^h ($\mu = 2, 3$) e sommando rispetto ad h , otteniamo

$$(53) \quad i^\lambda i_\mu^h \partial_\lambda \rho_2 = 0.$$

La sommatoria rispetto ad h può essere estesa anche al valore 1 dell'indice h perché (formule (47)) per $\lambda, \mu = 2, 3$, $i^h = i^\mu = 0$. Si trae quindi, con facile calcolo della (53),

$$(54) \quad \partial_\mu \rho_2 = 0, \quad \mu = 2, 3.$$

Dunque $\rho_2 = \rho_3$ funzione della sola variabile x^1 :

$$(55) \quad \rho_2 = \rho_3 = \Psi_1(x^1).$$

Vogliamo ora dimostrare che il coefficiente H_1 che figura nella (46) è funzione della sola variabile x^1 . Infatti, ricorrendo alle espressioni delle ρ_{hk} mediante gli autovettori i^h , i_k e loro derivate ordinarie ⁽²⁾, si trova per le (45),

$$(56) \quad \rho_{21} = 0 = i_3^3 \partial_{x^2} i_1^1 - i_2^3 \partial_{x^3} i_1^1, \quad \rho_{31} = 0 = -i_3^2 \partial_{x^2} i_1^1 + i_2^2 \partial_{x^3} i_1^1.$$

Poiché il determinante formato dai coefficienti delle derivate vale $i^1 | \sqrt{a} \neq 0$, si conclude che esse devono essere nulle; quindi per le (47)

$$\partial_\lambda H_1 = 0, \quad \lambda = 2, 3,$$

cioè H_1 funzione della sola variabile x^1 ,

$$(57) \quad H_1 = H_1(x^1).$$

Dalle (7) si ricava, per le (47),

$$(58) \quad 2 \rho_{32} = H_1^{-1} \partial_1 \log(\Psi_1 - K), \quad 2 \rho_{23} = -H_1^{-1} \partial_1 \log(\Psi_1 - K).$$

Dalle formule ⁽³⁾ che danno le ρ_{hk} mediante gli autovettori e loro derivate covariante rispetto alla forma (46), si ottiene

$$(59) \quad \rho_{23} = i^u_{1} i^v_{3} \nabla_v i^3_\mu = H_1^{-1} i^v_{3} \nabla_v i^3_\mu,$$

ove nel secondo membro la sommatoria rispetto a v s'intende effettuata per $v = 2, 3$, perché è nullo i^1 . Eseguendo la derivazione covariante rispetto alla forma (46), si ha

$$(60) \quad \rho_{23} = -\frac{1}{2} H_1^{-1} i^u_{3} i^v_{3} \partial_1 g_{\mu\nu}.$$

Con un calcolo analogo si ricava

$$(61) \quad \rho_{32} = \frac{1}{2} H_1^{-1} i^u_{2} i^v_{2} \partial_1 g_{\mu\nu}.$$

$$(2) \quad \rho_{hk} = \gamma_{h+1 \ h+2 \ k} = i^h_{h+2} i^u_{k} (\partial_\mu i^u_{h} - \partial_h i^u_\mu) + \text{termini ciclici.}$$

$$(3) \quad \rho_{hk} = \gamma_{h+1 \ h+2 \ k} = i^u_{h+2} i^v_{k} \nabla_v i^h_\mu.$$

Confrontando le (60), (61) con le (58), otteniamo

$$(62) \quad \partial_i \log (\Psi_i - K) = \underset{h}{i}^{\mu} \underset{h}{i}^{\nu} \partial_i g_{\mu\nu}, \quad h = 2, 3.$$

Se invece calcoliamo le sommatorie

$$\underset{h}{i}^{\mu} \underset{k}{i}^{\nu} \partial_i g_{\mu\nu}, \quad h \neq k = 2, 3$$

troviamo, tenendo presente che sono nulle le ρ_{22}, ρ_{33} ,

$$(63) \quad \underset{h}{i}^{\mu} \underset{k}{i}^{\nu} \partial_i g_{\mu\nu} = 0.$$

Le (62), (63) si possono conglobare nella seguente

$$(64) \quad \underset{h}{i}^{\mu} \underset{k}{i}^{\nu} \partial_i g_{\mu\nu} = \varepsilon_{hk} \partial_i \log (\Psi_i - K), \quad h, k = 2, 3$$

ove $\varepsilon_{hh} = 1$, $\varepsilon_{hk} = 0$ con $h \neq k$.

Moltiplicando per $\underset{h}{i}_{\sigma}, \underset{k}{i}_{\tau}$, sommando rispetto ad h, k , osservando che tale sommatoria può essere estesa anche al valore 1 di h, k perché $\underset{1}{i}^{\mu} = \underset{1}{i}_{\mu} = 0$ per $\mu = 2, 3$ e ricordando che

$$(65) \quad g_{\sigma\tau} = \underset{h}{i}_{\sigma} \underset{k}{i}_{\tau},$$

si trova

$$(66) \quad \partial_i g_{\sigma\tau} = g_{\sigma\tau} \partial_i \log (\Psi_i - K).$$

Da qui si trae

$$(67) \quad g_{\sigma\tau} = (\Psi_i - K) \Gamma_{\sigma\tau} (x^2, x^3),$$

ove le $\Gamma_{\sigma\tau}$ sono funzioni arbitrarie delle variabili indicate, tali però da rendere definita positiva la forma quadratica (46). Sostituendo in questa le (67), con ovvio cambiamento del parametro x^1 , che continuiamo a indicare ancora con questa lettera, si ottiene l'espressione di un ds^2 di Levi-Civita

$$(68) \quad ds^2 = dx^{12} + (\Psi_i - K) \Gamma_{\mu\nu} (x^2, x^3) dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

BIBLIOGRAFIA.

- [1] STÄCKEL, *Sur une classe de problèmes de Dynamique*, «Comptes Rendus», T. CXVI (1893).
- [2] PAINLEVÉ, *Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique*, Ibidem, T. CXXIV (1897).
- [3] LEVI-CIVITA, *Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche*, «Opere matematiche», Zanichelli, Bologna (1954), Vol. I, XXXII.
- [4] DI PIRRO, *Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica*, «Annali di Matem.», Serie 2^a, T. XXIV (1896).
- [5] LEVI-CIVITA, *Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique*, «Opere matematiche», Zanichelli, Bologna (1954), Vol. I, XIV; RICCI-LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Ibidem, XXXII.
- [6] RICCI-CURBASTRO, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori*, «Opere», Edizioni Cremonese, Roma (1957), Vol. II, XLIII, Nota I.

Geofisica. — *Dispersione delle onde sismiche nell'ambito delle altissime frequenze.* Nota (*) del Corrisp. PIETRO CALOI.

1. Da qualche anno mi sto occupando di un fenomeno che ritengo di particolare interesse per i riflessi che esso ha sulla natura, non esclusivamente elastica, del materiale costituente la crosta terrestre.

In parecchie valli alpine ho avuto occasione di determinare la velocità di propagazione delle onde sismiche, destinate da piccole esplosioni, lungo brevi tragitti che, nel loro insieme, venivano a costituire l'involuppo di una sezione trasversale di una valle. Altri tragitti riguardavano brevi tratti longitudinali della valle stessa, dai bordi esterni al fondo.

Devo precisare che l'interpretazione delle registrazioni veniva fatta *singolarmente* e le velocità calcolate caso per caso, senza mediare. Le distanze prese in esame variavano fra 50 e 200 m circa, in media. Oltre alle velocità, venivano annotati anche i periodi delle onde longitudinali e trasversali.

Lunghe serie di osservazioni mi hanno consentito di arrivare alle seguenti conclusioni.

a) In alcune delle valli Prealpi (Valle del Mis — presso Belluno, in prossimità della valle del Cordevole —, Valle dell'Ambiesta — affluente del Tagliamento, nei pressi di Tolmezzo —, Val Gallina — affluente del Piave, nei pressi del lago di Santa Croce —, Valle del Glagnò — affluente del Fella, nei pressi di Carnia —, ecc.), le velocità di propagazione osservate per le onde longitudinali non superano mai i 5 km/sec e possono essere anche sensibilmente inferiori a tale limite.

Inoltre, i periodi associati non scendono mai al di sotto di 1/100 di secondo e possono essere invece sensibilmente superiori.

Si tratta generalmente di valli poco profonde e relativamente larghe, nelle quali il lavoro dell'erosione non appare eccessivamente penetrante.

b) In altre valli invece si sono ripetutamente osservati valori altissimi per la velocità di propagazione delle onde longitudinali: valle del Lumiei — affluente del Piave, sopra Ampezzo carnico —, alta valle del Chiarzò, in località Zermula — affluente del But-Tagliamento, nei pressi di Paularo —, valle del Vinadia — affluente del Tagliamento —, valle del Piave — nei pressi di Pieve di Cadore —, valle del Vajont — affluente del Piave, nei pressi di Longarone —, valle del Maè — affluente del Piave, nei pressi di Forno di Zoldo —, Marmolada — ad oltre 2600 m di quota, nei pressi del Pian dei Fiacconi —, Valle del Leno (Vallarsa) — affluente dell'Adige, nei pressi di Parrocchia di Vallarsa —, Cordevole, presso Caprile, ecc.

Le velocità in dette valli possono raggiungere valori di 7-7,5 km/sec ed anche superiori.

(*) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1958.

I periodi associati non superano 0,005 sec e possono arrivare a 0,002 sec.

I valori citati vengono generalmente osservati sul fondo valle (Pieve di Cadore, Zermula, Vajont, Valle del Leno, ecc.) od anche su pareti a picco (Vajont, Lumiei, Maè, ecc.) od anche in alta montagna alla base di ghiacciai (Marmolada).

Si tratta generalmente di valli profonde, strette, nelle quali l'erosione ha compiuto poderosi lavori di penetrazione, creando vere forre penetranti nel vivo della montagna (vedasi il Vajont, Zermula, il Lumiei, ecc.). Inoltre, sono sovrastate da montagne quasi sempre di quota elevata.

Gli elevatissimi valori osservati per la velocità delle onde longitudinali (e trasversali), come possono conciliarsi con i valori forniti dagli studi sismici, condotti su terremoti che hanno interessato le stesse zone?

In ricerche sismologiche precedenti, condotte su terremoti che riguardano la zona interessata in modo specifico (terremoto del Bellunese dell'8 giugno 1934, forte terremoto del Cansiglio del 18 ottobre 1936, ecc.), la velocità delle onde Pg è risultata concordemente di 5,7 km/sec, ben inferiore quindi a quelle sopra riportate.

Valori, come quelli sopra riportati osservati in superficie, sono caratteristici dello strato-base della crosta terrestre, a profondità medie di 30 km.

Tali stratificazioni d'altronde, non possono pensarsi affioranti in corrispondenza delle Alpi, nell'ambito delle quali numerose ricerche sismologiche hanno mostrato, come si è detto, velocità medie dell'ordine di 5,7 km/sec.

D'altra parte, l'esistenza di quei valori non può essere messa in dubbio. Deve pertanto intervenire un'« effetto » che ne consenta una spiegazione. E qui un fatto innegabile va subito sottolineato: *le massime velocità osservate sono associate alle massime frequenze*. Ciò ho avuto modo di constatare non sporadicamente, bensì *sistematicamente*. Le figg. 1 e 2 ne forniscono un saggio evidentissimo. Questo assodato, restava da vedere quale teoria contempla un effetto del genere. Feci ricorso alla teoria della propagazione in mezzi elastici, che ammettono attrito interno (firmo-elasticità). Con essa, avevo già risolto ⁽¹⁾, fra l'altro, il problema dell'estinzione delle onde di Rayleigh, con risultati in pieno accordo con l'osservazione; problema che attendeva soluzione da oltre un quarantennio.

Ho fatto ricorso alla stessa teoria, con le opportune modifiche suggerite dal fatto che qui si tratta di onde spaziali. A questo riguardo, soccorre un lavoro di Kubotera ⁽²⁾. Partendo dalla teoria sviluppata da Toda per mezzi firmo-elastici, si trova che la velocità V_p delle onde longitudinali viene espressa da

$$(1) \quad V_p^2 = \frac{1}{\rho K_s} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

(1) CALOI P., *Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo firmo-viscoso indefinito*. « Annali di Geofisica », I, 4 (1948); IDEM, *Teoria delle onde di Rayleigh in mezzi elastici e firmo-elastici, esposta con le omografie vettoriali*. « Archiv für Met. Geoph. und Biokl. », IV (1951).

(2) KUBOTERA AKIRA, *Rheological Properties of the Earth's Crust...*, « Journal of Physics of the Earth », I, 1 (1952).

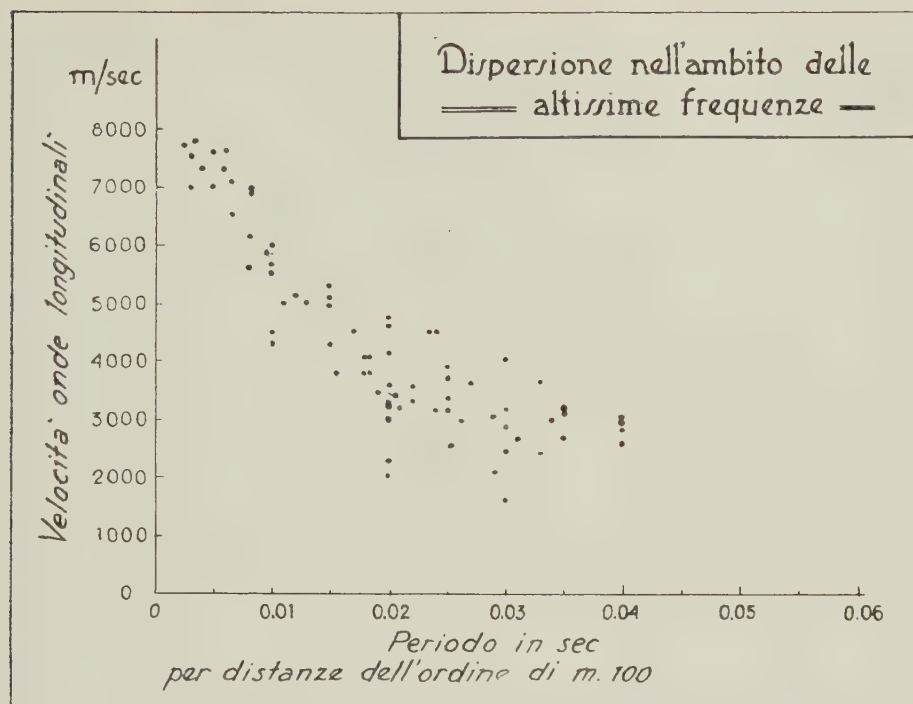


Fig. 1.

essendo ρ la densità, K_S la compressibilità statica, μ la rigidità, τ il tempo di rilassamento per tensioni tangenziali e $\omega = 2\pi/T$, essendo T il periodo dell'onda.

La velocità delle corrispondenti onde trasversali è espressa da

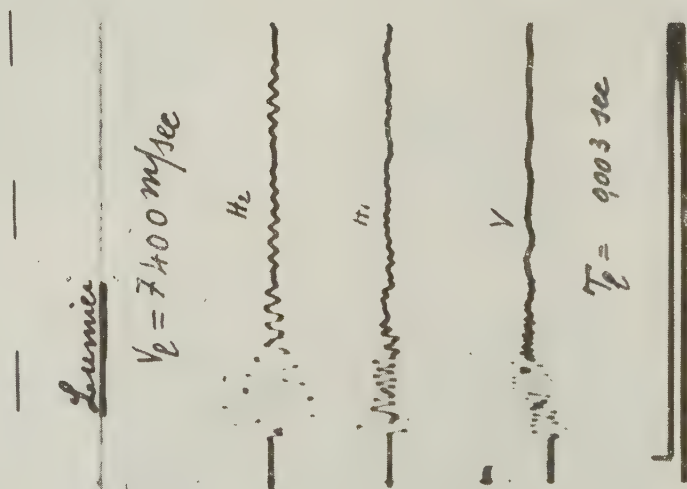
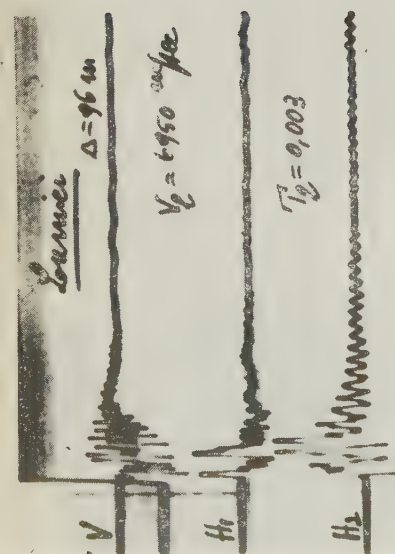
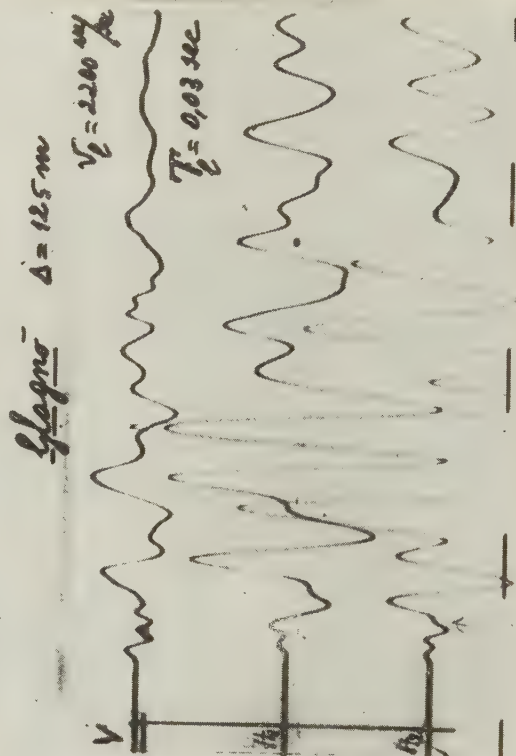
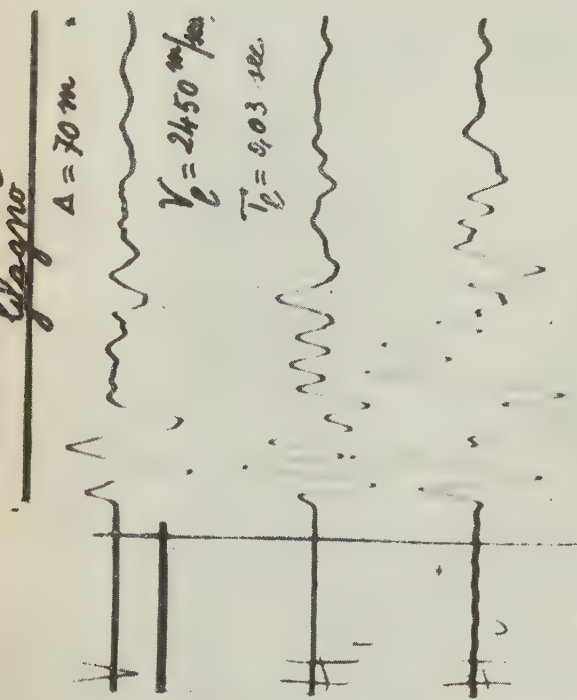
$$(2) \quad V_S^2 = \frac{\mu}{\rho} \frac{\omega^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}.$$

In entrambe le espressioni, la velocità dipende da ω .

Se k è il coefficiente di attenuazione dipendente dalla firmo-viscosità del mezzo, partendo dal modello di Toda, Kubotera ottiene la seguente relazione approssimata fra k e le costanti viscoelastiche:

$$(3) \quad k = \frac{2}{3} \frac{1}{V_P} \left(\frac{V_S}{V_P} \right)^2 \frac{1}{\tau}.$$

Il valore di k è stato da me determinato per le onde di Rayleigh e – per lunghi periodi – è risultato conforme a quello dato dalle osservazioni. Mancavano confronti con i brevi periodi: dai risultati ottenuti da Kubotera appare evidente la validità della teoria anche per i più piccoli periodi. Come del resto appare chiaro dai valori calcolati da Kubotera ⁽²⁾ (p. 32), per i periodi molto piccoli (quali sono quelli che si osservano nelle registrazioni delle esplosioni) i valori di k relativi alle onde longitudinali e a quelle di Rayleigh sono dello stesso ordine di grandezza. Pertanto nella (3), per la determinazione



di τ relativo ad un dato periodo, mi sono valso dei corrispondenti valori di k , a suo tempo da me calcolati (vedi lavori citati).

Tenendo conto dei valori elevati che ω assume nel caso delle esplosioni, la velocità delle onde longitudinali nelle esplosioni potrà essere espressa da

$$V_{P_{es.}}^2 = \frac{1}{\rho K_S} + \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho}.$$

Possiamo pertanto legare le velocità delle onde longitudinali, quali si osservano nei terremoti naturali e nelle esplosioni, con la relazione

$$(4) \quad V_{P_{sis.}}^2 = V_{P_{es.}}^2 - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

dove μ/ρ esprime il quadrato della velocità delle onde trasversali destinate da esplosioni.

2. Ho applicato la (3) e la (4). Mi limito a riportare qui i risultati relativi alle massime frequenze, come quelli che più ci interessano.

	V_P	
	osservata	ridotta
<i>Lumiei</i> (valle e fondo valle)	6,9	5,7
	6,9	5,7
	6,9	5,7
	6,95	5,8
	7,4	6,0
	7,5	6,1
	7,3	6,0
<i>Pieve di Cadore</i>	7,0	5,65
<i>Vajont</i> (valle e fondo valle)	7,6	6,3
<i>Pontesei</i> (Val Zoldana, sperone, sponda sinistra e fondo valle)	7,5	6,0
	6,7	5,6
<i>Travignolo</i> (fondo valle)	6,6	5,3
<i>Caprile</i> (sperone sponda sinistra)	6,0	5,0
<i>Zermula</i> (Alta Carnia - fondo valle)	6,5	5,2
	7,1	5,9
	7,6	6,3
<i>Specchieri</i> (Vallarsa, sperone, fondo valle)	7,3	6,3

In media, risulta un valore di 5,8 km/sec.

Naturalmente, ciò che conta in questo genere di calcoli è l'ordine di grandezza dei valori ottenuti, e questo non potrebbe essere più significativo.

La teoria della firmo-elasticità, come si è visto, spiega come i valori massimi osservati (intorno ai 7 km/sec) siano riportabili ai valori *sismologici*, propri dello strato del « granito ».

Concludendo, le ricerche vibrografiche condotte nell'ambito di numerose valli Alpine - collegate con quelle eseguite su terremoti della Val Padana -, hanno consentito di trarre due notevoli conclusioni:

a) Nei fenomeni sismici esiste realmente dispersione, nel senso che le *massime velocità* sono collegate alle *massime frequenze*: quanto più compatta è la roccia tanto maggiori possono essere le frequenze (e quindi le velocità) in essa destinate.

Questo fenomeno del resto, assume carattere generale nella Fisica, tanto che questa specie di dispersione non è più ritenuta - dai fisici - anomala, bensì normale dispersione.

La teoria della firmo-elasticità (sulla base dei forti coefficienti d'assorbimento, collegati alle più forti frequenze) permette di provare che le massime velocità osservate sono riducibili - sismologicamente parlando - alle velocità nei terremoti, per frequenze abituali.

b) Nel sistema alpino - almeno nella sua parte centro-orientale-meridionale, il così detto strato del granito affiora in superficie in più posti (specie nelle valli più profonde), anche a notevoli quote.

3. Ogni mezzo, evidentemente, presenta un limite massimo di dispersione, legato alla sua natura fisica.

Si è visto che, nei mezzi con i quali si è sperimentato - calcari in genere, dolomia in particolare - tale limite si aggira sugli 8 km/sec. Per periodi superiori a 0,02 di secondo la dispersione si riduce moltissimo. Essa, in tutti i casi, cessa a brevissima distanza (poche centinaia di metri), a causa dell'elevatissimo coefficiente di estinzione, cui sono soggette le altissime frequenze.

Potrà meravigliare il fatto che tale dispersione non sia stata osservata nelle normali esperienze di prospezione sismica, mediante l'uso dei geofoni. Va osservato, a questo riguardo, che i filtri d'onda, di cui si fa uso in tali esperienze, comportano un più o meno sensibile ritardo nella propagazione, oltre costituire un ostacolo per certe gamme d'onda. L'esistenza dei galvanometri è poi sorgente, a sua volta, di altre cause di ritardo.

Le registrazioni da me eseguite sono state ottenute con vibrografi «Askania», nei quali interviene esclusivamente un'amplificazione ottica, con esclusione quindi di amplificazioni galvanometriche.

Va ancora notato che, nelle esperienze di laboratorio, ci si limita a campioni di roccia, di limitate dimensioni. È inevitabile che tali campioni siano alterati nelle loro intime caratteristiche: la struttura molecolare subisce certamente modifiche nelle operazioni di prelievo dei pezzi di roccia; modifiche che non possono essere agevolmente valutate. Inoltre, le vibrazioni in esse destinate sono imposte, forzate, condizionate dalla forma limitata e dalla sostanza comunque alterata. Non sono certo come quelle osservate in natura, nella roccia in sito, non artificialmente alterata.

4. Restava da compiere una nuova esperienza, a testimonianza della dispersione nell'ambito delle altissime frequenze. Se tale fenomeno ha reale

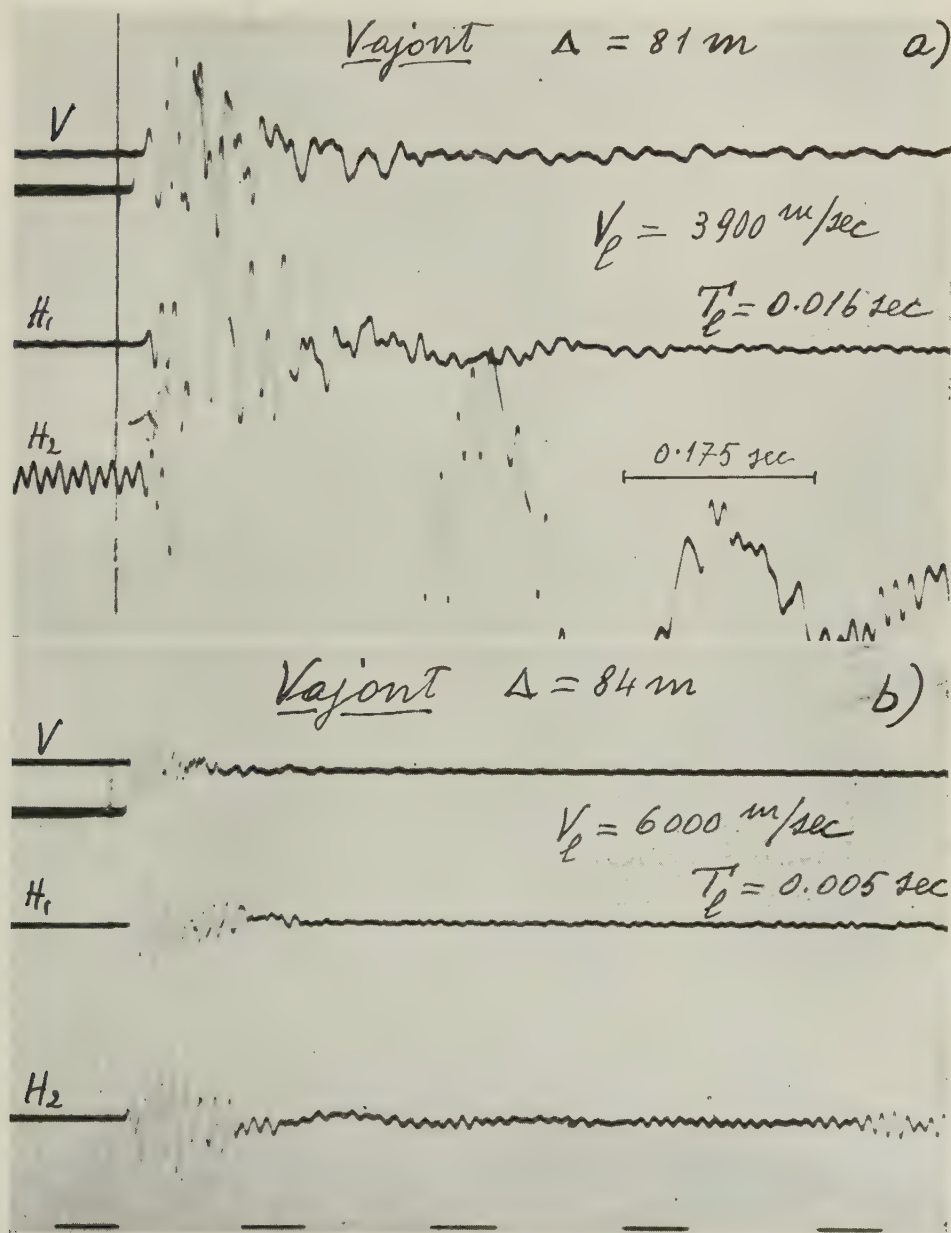


Fig. 3.

a) Prima del consolidamento; b) dopo il consolidamento per iniezione di cemento.

esistenza, un tipo di roccia – comunque consolidato – dovrà rivelarlo, più o meno chiaramente.

È ciò che ho avuto campo di verificare, nel corso delle indagini condotte in alcune valli alpine.

Mi limito ai chiarissimi esempi forniti dal Vajont. Si è già osservato che la quasi generalità delle valli alpine presenta un modulo elastico decre-

scente dai limiti superiori al fondo. La profonda stretta del Vajont presenta la stessa caratteristica. Poiché essa verrà sbarrata da una grande diga, i costruttori si sono preoccupati di rendere il più possibile elasticamente omogenea la roccia in cui lo sbarramento troverà il suo appoggio. A questo scopo, molte zone sono state consolidate mediante iniezione di cemento, per notevoli profondità. Ciò mi ha consentito di poter sperimentare alcuni tratti di roccia, prima e dopo il consolidamento per iniezione di cemento. Il risultato è pienamente conforme ai principi del fenomeno accennato: il consolidamento comporta infatti un notevole aumento della velocità di propagazione nel mezzo, aumento che diviene anormale a mano a mano che l'entità del consolidamento consente il progressivo elevarsi della frequenza.

La fig. 3 ne dà significativa testimonianza.

Resta così provato l'effetto di dispersione (un tempo detta anomala) delle onde sismiche nel campo delle altissime frequenze. L'analogia con analoghi fenomeni osservati in altri rami della Fisica si spinge a constatare che, come in Ottica, la dispersione è in dipendenza stretta dell'assorbimento, e i due fenomeni devono sempre essere studiati e spiegati nello stesso tempo. In altri termini, come nel dominio dei raggi X e in quello dell'Ottica, anche *nell'ambito delle onde sismiche la dispersione è intimamente legata all'assorbimento.*

Chimica. — *Impostazione cinetica dello studio della formazione dei polimeri a stereoblocchi*^(*). Nota ^(**) del Socio GIULIO NATTA.

INTRODUZIONE. — In un recente lavoro si era riferito sulla variazione, con la temperatura di polimerizzazione, della composizione stereoisomerica dei polipropileni ottenuti con catalizzatori diversi di differente stereospecificità ⁽¹⁾.

Uno studio più approfondito sulla cinetica dei processi che influiscono sulla stereospecificità delle polimerizzazioni è attualmente in corso presso il nostro laboratorio e su di esso riferiremo dettagliatamente in seguito.

Mi limito per ora ad accennare alcuni aspetti interessanti del problema, deducibili dai dati sperimentali, già esposti nel primo lavoro sopracitato, che riportiamo nelle figg. 1 e 2. Essi si riferiscono a catalizzatori molto particolari, che hanno subito un trattamento termico prolungato (2 h a 175°), ossia ad una delle più alte temperature consentite, affinché il catalizzatore non risulti eccessivamente ridotto. I catalizzatori così trattati risultano stabilizzati per quanto riguarda la reversibilità della variazione di attività

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) G. NATTA, G. MAZZANTI e P. LONGI, «Chim. e Ind.», (in corso di pubblicazione nel numero di aprile del 1958).

e di stereospecificità con la variazione di temperatura e sono caratterizzati da una variazione apparentemente lineare delle percentuali delle frazioni isotattiche e di quelle a stereoblocchi con la temperatura di polimerizzazione.

Nel caso della fig. 1 la frazione, che consideriamo come prevalentemente isotattica, diminuisce linearmente con la temperatura; quella a stereoblocchi e quella atattica aumentano pure linearmente negli intervalli di temperatura considerati. Prolungando le rette tracciate nella fig. 1, sino all'intersezione con l'ascissa (o con la sua parallela corrispondente all'ordinata

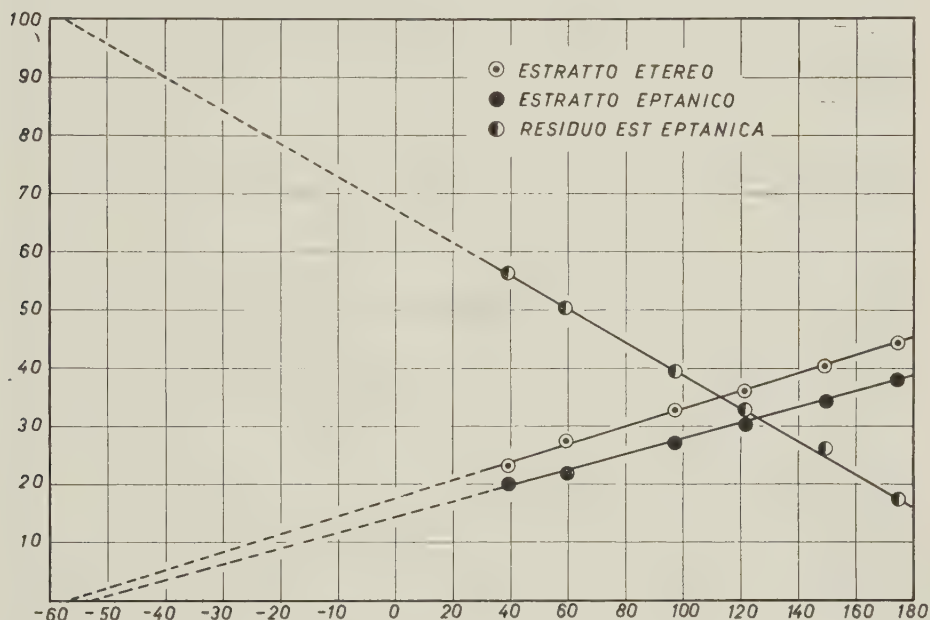


Fig. 1. - Variazione della composizione stereoisomerica, con la temperatura di polimerizzazione, di polipropileni preparati con catalizzatori prestabilizzati a 175°, ottenuti da TiCl_4 e $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ in rapporto 1 : 2.

100 %), si può rilevare una temperatura, alla quale si dovrebbe annullare la formazione dei polimeri atattici e di quelli tipicamente a stereoblocchi ed alla quale il polimero dovrebbe risultare tutto prevalentemente isotattico.

Nel caso della fig. 2 la stessa estrapolazione può essere fatta per la frazione considerata isotattica e per quella a stereoblocchi, mentre per quella atattica l'estrapolazione dei meno regolari punti sperimentali porta ad una intersezione a temperatura più bassa, a meno di non correggere tali dati attribuendo la formazione di una parte del polimero atattico alla presenza di una piccola quantità di un diverso catalizzatore non stereospecifico, che agisca indipendentemente da quello che provoca la produzione del polimero isotattico considerato.

Alla temperatura così estrapolata dovrebbero risultare estremamente lenti, per il catalizzatore considerato, quei processi che determinano all'istante

della polimerizzazione le inversioni di configurazione sterica nelle unità monomeriche del polimero provocando la formazione di polimeri a stereoblocchi, aventi limitata cristallinità, e di polimeri amorfi. Variazioni lineari di composizione sono state riscontrate solo per certi catalizzatori non molto stereospecifici, che hanno subito un opportuno trattamento ad alta temperatura, mentre per la massima parte dei catalizzatori, preparati a temperature più basse, anche per quelli più stereospecifici, la variazione della composizione

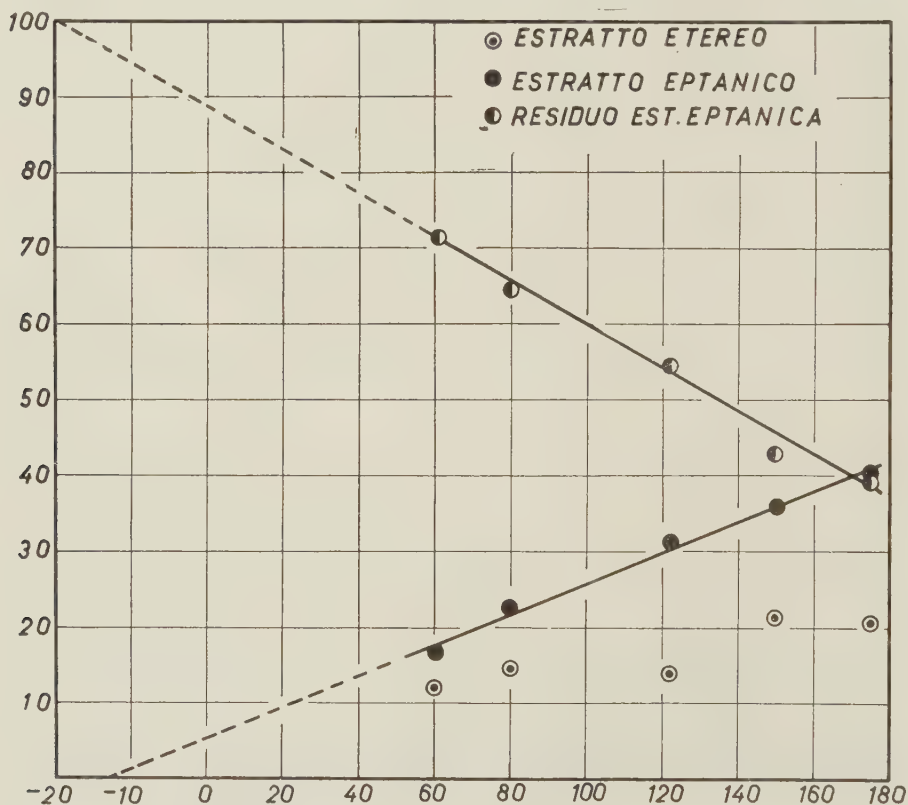


Fig. 2. - Variazione della composizione stereoisomerica, con la temperatura di polimerizzazione, di polipropileni preparati con catalizzatori prestabilizzati a 175° ottenuti da TiCl_3 (modificazione violetta) e $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ in rapporto 1 : 2.

stereoisomerica presenta un andamento complesso: talvolta si osserva un massimo di frazione isotattica ad una temperatura intermedia, che denota la complessità del fenomeno.

Sebbene l'estrapolazione da noi fatta per i catalizzatori stabilizzati non abbia, almeno per ora, che un significato puramente formale e non possa ricevere una conferma diretta sperimentale, a causa della bassa attività a bassa temperatura dei catalizzatori termicamente stabilizzati, ciò nondimeno la variazione lineare della composizione con la temperatura, osservata per i due sistemi catalitici riportati e nell'intervallo di temperatura esaminato, rappresenta un fatto sperimentale meritevole di ricevere una interpretazione.

IMPOSTAZIONE CINETICA DEL PROCESSO DI INVERSIONE DI CONFIGURAZIONE STERICA. — Abbiamo supposto che l'aumento di polimeri a stereoblocchi e di quelli atattici con la temperatura si possano attribuire ad un fattore cinetico che provochi durante la polimerizzazione un'inversione nella configurazione di qualche unità monomerica rispetto a quella che la precede. Se si ammette che tale fattore cinetico presenti una energia di attivazione E_i , il numero di inversioni nel tempo dovrebbe risultare una funzione di E_i e della temperatura. La velocità globale di polimerizzazione, ossia il numero di unità monomeriche che si addizionano, è invece funzione dell'energia di attivazione E_p del processo di propagazione.

Operando con catalizzatori eterogenei e con una quantità di catalizzatore costante, in un intervallo di temperatura in cui il numero di centri attivi si mantiene costante, possiamo semplificare la espressione cinetica che dà la velocità globale di polimerizzazione ⁽²⁾ nel seguente modo:

$$V_p = \frac{dN}{dt} = K_p C^* M \quad \text{dove } K_p = A e^{-E_p/RT}.$$

Se ammettiamo che il processo, che porta all'inversione della configurazione sterica delle unità monomeriche in accrescimento, sia monomolecolare ed equiparabile ad una certa probabilità di inversione, dipendente dalla temperatura, a cui sono soggette tutte le unità monomeriche nell'istante della loro formazione, possiamo scrivere:

$$V_i = \frac{dN_i}{dt} = K_i \frac{dN}{dt} = K_i K_p C^* M$$

$$K_i = B e^{-E_i/RT}$$

dove:

- N = numero di unità monomeriche totali;
- N_i = numero di unità invertite rispetto alla precedente;
- E_p = energia di attivazione del processo di propagazione;
- E_i = energia di attivazione del processo di inversione;
- n = N_i/N frequenza delle inversioni;
- M = concentrazione del monomero;
- C^* = numero di centri attivi nel sistema considerato.

Il numero relativo di inversioni sulla catena polimerica, riferito al numero totale di unità monomeriche, sarà dato da:

$$\frac{dN_i}{dN} = \frac{N_i}{N} = K_i.$$

Tale ipotesi è confermata dal fatto che, nelle polimerizzazioni condotte a temperatura costante, la composizione stereoisomera è praticamente indipendente non solo dal tempo, ma anche dalla pressione del monomero e dalla concentrazione del catalizzatore, fattori questi ultimi che influiscono sulla

(2) G. NATTA, I. PASQUON, E. GIACHETTI, «Makromol. Chem.», 24, 258 (1957); «Chim. e Ind.», 39, 993, 1002 (1957).

velocità globale, ed è pure praticamente indipendente dalla concentrazione degli alchili, fattore che influisce sul peso molecolare.

Ne consegue che alle temperature T_1 e T_2

$$(1) \quad \lg \frac{n_2}{n_1} = \frac{E_i (T_2 - T_1)}{RT_1 T_2}.$$

A risultati praticamente identici si arriverebbe ammettendo che il processo di inversione sia un processo concomitante ma indipendente da quello di polimerizzazione e di prim'ordine rispetto a M ed al catalizzatore.

In tal caso risulterebbe a concentrazione di catalizzatore costante:

$$V_i = K_i MC^* \quad \text{dove } K_i = Be^{-E_i/RT}$$

$$\frac{V_i}{V_p} = n = \frac{B}{A} e^{(-E_i + E_p)/RT} \quad \frac{dN_i}{dN} = \frac{K_i MC^*}{K_p MC^*} = \frac{K_i}{K_p}$$

$$\lg \frac{n_2}{n_1} = \frac{(E_i - E_p) (T_2 - T_1)}{RT_1 T_2}$$

che equivale alla (1), ponendo $E_i = (E_i - E_p)$.

Quest'ultima ipotesi può essere messa in relazione, ad esempio, con un processo di inversione che sia connesso con una dissociazione del complesso catalitico bimetallico, attivata in concomitanza con la reazione di propagazione fortemente esotermica.

Dal valore medio di n e dalla sua dispersione dipende la composizione stereoisomerica.

TEMPERATURA DI FUSIONE DI POLIMERI IN FUNZIONE DELLA FREQUENZA DELLE INVERSIONI DI CONFIGURAZIONE. - Il numero n di irregolarità in una catena provoca una riduzione della cristallinità ed un abbassamento della temperatura di fusione del polimero. Quest'ultimo può essere calcolato applicando la teoria che Flory ⁽³⁾ ha proposto per i copolimeri. Noi possiamo infatti ammettere che le irregolarità dovute ad inversioni di configurazione sterica abbiano un effetto, nell'abbassare la temperatura di fusione, equiparabile a quello delle irregolarità dovute ad unità monomeriche diverse. Almeno in prima approssimazione, per percentuali piccole di irregolarità, si può infatti prescindere dall'entità delle perturbazioni laterali causate da tali irregolarità, che possono risultare in molti casi della stessa entità per dei copolimeri di unità stereoisomere chimicamente eguali che per quelli costituiti da unità monomeriche chimicamente diverse.

L'espressione di Flory consente di calcolare n dall'abbassamento ΔT della temperatura di fusione:

$$\Delta T = \frac{RT_{f_0} \cdot T_f}{\Delta H_f} \lg (1 - n)$$

(3) P. J. FLORY, *Principles of Polymer Chemistry* (Cornell Univ. Press. New York 1953), p. 237.

dove n è la frazione di irregolarità rispetto al numero di unità monomeriche nella catena principale, è stata applicata al polipropilene ponendo

$$\Delta H_f = 1.650 \text{ cal}$$

$$\Delta T = T_{f_0} - T_f$$

$$T_{f_0} = 448^\circ \text{ K.}$$

Il valore di ΔH_f sopraindicato risulta da determinazioni fatte presso questo Istituto su cui verrà riferito dettagliatamente in altra sede.

Applicando tale ipotesi, possiamo distinguere certe frazioni di polimeri ad alto peso molecolare $[n] > 1$, in funzione del valore medio di n e delle loro temperature di fusione:

$n=0$ polimero isotattico ideale (insolubile in n -ottano bollente) $T_f = 175^\circ$;

$n < 0,02$ polimeri altamente isotattici (insolubili in eptano bollente), aventi proprietà poco diverse da quelle del polimero isotattico ideale $T_f = 170-175^\circ$;

$n = 0,04-0,2$ polimeri tipici a stereoblocchi (solubili in eptano, insolubili in etere), aventi temperatura di fusione notevolmente minore e solubilità maggiore dei polimeri altamente isotattici: $T_f < 165^\circ$;

$n > 0,25$ polimeri amorfi (solubili in etere) costituiti da stereoblocchi a tratti regolari molto corti, aventi praticamente proprietà eguali a quelle dei polimeri atattici ideali.

Il polimero atattico ideale corrisponde ad una distribuzione statistica di unità delle due configurazioni steriche possibili e non deve essere confuso con quello sindiotattico ideale per il quale $n = 1$.

La cristallinità, misurata coi raggi X, dipende da molti fattori, quali i trattamenti termici, ed in particolare dal peso molecolare, ma a parità di altri fattori decresce con il diminuire della temperatura di fusione⁽⁴⁾.

Per un determinato valore medio di n è possibile avere differenti proporzioni delle diverse frazioni stereoisomere (isotattiche, stereoblocchi, atattiche) a seconda delle dispersioni dei valori singoli di n rispetto al valore medio.

METODO PROPOSTO PER LA DETERMINAZIONE DELL'ENERGIA DI ATTIVAZIONE DEL PROCESSO DI INVERSIONE. — La variazione lineare con la temperatura di polimerizzazione, osservata per le percentuali delle frazioni indicate nelle figure, è un fenomeno che, contrariamente a quanto può a prima vista sembrare, non è in contrasto con l'ipotesi che il valore medio di n sia funzione esponenziale di T .

È da tener presente che il frazionamento dei diversi stereoisomeri è stato effettuato per estrazione con solventi, impiegati alla loro temperatura di ebollizione, e che la solubilità di una frazione in queste condizioni è funzione della sua temperatura di fusione, compresa entro un certo intervallo.

Un metodo, che abbiamo perciò pensato di adottare, per la determinazione sia pure approssimata di E_i , è quello di determinare la variazione della

(4) G. NATTA, G. MAZZANTI, G. CRESPI e G. MORAGLIO, «Chim. Ind.», 39, 275 (1957).

temperatura media di fusione di polimeri, ottenuti a temperature diverse. Come temperatura media di fusione verrebbe assunta la media ponderale delle temperature di fusione T_f delle singole frazioni.

Per ogni frazione, T_f può diminuire con l'aumentare della temperatura di polimerizzazione. Alla temperatura estrapolata in figura, alla quale dovrebbero scomparire le frazioni atattica ed a stereoblocchi tipici, T_f media dovrebbe risultare $> 170^\circ$ ed $n < 0,02$.

Un frazionamento più accurato con un numero maggiore di estrazioni, rispetto a quelle riportate nelle figure, potrebbe portare alla possibilità di calcolare tale temperatura media di fusione. La frazione considerata come polimero isotattico (quello insolubile in eptano bollente) ha ad esempio una temperatura di fusione di circa 170° . I polimeri a stereoblocchi insolubili in pentano od etere ed estraibili successivamente con esano ed eptano presentano temperature di fusione comprese tra 110° e 165° . Al polimero amorfo contenente un numero di inversioni tali da abbassare la temperatura di fusione al di sotto di 100° e da rendere irrilevabile coi raggi X una sia pur minima cristallinità, si dovrebbe attribuire una temperatura di fusione convenzionale minore di 100° .

Un valore medio più accurato di n potrebbe essere determinato dalla media ponderale dei valori di n trovati per molte singole frazioni.

Dal valore medio di T_f si calcolerebbe il valore di n per ogni temperatura di polimerizzazione ed introducendo i valori di n così calcolati per diverse temperature nella (1) si dovrebbe poter calcolare E_i . A tale scopo abbiamo in corso alcuni frazionamenti accurati di polimeri ottenuti a diverse temperature di polimerizzazione.

Da un primo esame orientativo, basato sui vecchi frazionamenti e su prodotti ottenuti con catalizzatori stabilizzati di media stereospecificità, si sono calcolati valori orientativi E_i piuttosto bassi (1.000-3.000 cal.). Naturalmente per E_i si calcolerebbe un valore superiore in dipendenza del valore di E_p essendo $E_i = E_i + E_p$. Per il TiCl_3 al disotto di 70° risulta $E_p = 14.000$ ma per i catalizzatori meno stereospecifici, quale quelli qui esaminati, il valore di E_p risulta inferiore.

I valori di E_i sopraindicati sono da considerarsi puramente orientativi e suscettibili di subire notevoli variazioni, qualora fossero calcolati in base a dati di frazionamenti più accurati. Sono prevedibili inoltre valori più alti nel caso di catalizzatori molto stereospecifici.

Qualora si supponesse che l'inversione della configurazione sterica fosse connessa con la desorpzione e con la dissociazione di un complesso bimetallico, contenente titanio ed alluminio chemiosorbito sulla superficie del catalizzatore, il valore indicato per E_i potrebbe corrispondere all'energia di attivazione di tale desorpzione o dissociazione.

INTERPRETAZIONE DEI PROCESSI DI INVERSIONE. - È probabile che vi sia una certa connessione tra la cinetica dei processi che provocano l'inversione di configurazioni e certi processi di rottura di catena. In alcuni casi dei fattori che provocano un abbassamento del peso molecolare per trasferi-

mento di alchili provocano anche un aumento del polimero a stereoblocchi. È perciò possibile che, analogamente a quanto si verifica per i processi di rottura di catena ⁽⁵⁾, più di un processo cineticamente distinto sia responsabile della inversione di configurazione nei polimeri a stereoblocchi.

L'ipotesi che la dissociazione di un complesso, tra il composto del metallo di transizione ed il composto metallorganico, a cui è legata la catena polimerica in accrescimento, sia un fattore connesso con la frequenza delle inversioni di configurazione, è confermata dal fatto che sperimentalmente era stato osservato che la stereospecificità diminuisce con il diminuire della tendenza del metallo alchile a formare complessi.

La massima stereospecificità si ha con composti metallorganici dei metalli aventi più piccolo raggio ionico, che sono quelli che più facilmente formano complessi stabili ⁽⁶⁾, ed inoltre la stereospecificità diminuisce con l'aumentare della lunghezza dei gruppi alchilici legati al composto metallo-alchilico usato per la preparazione del catalizzatore.

Si deduce da queste osservazioni che tutto ciò che favorisce la dissociabilità o la solubilità del complesso che si forma sul centro attivo, riduce la stereospecificità.

Ammettendo, come è logico, che esista un equilibrio tra molecole metalloalchiliche in soluzione e molecole associate in un complesso sui centri attivi del substrato cristallino e supponendo che a tale equilibrio partecipino anche le molecole metallorganiche contenenti una catena polimerica, è logico ritenere che la velocità di scambio tra molecole in soluzione e molecole chemisorbite sia maggiore a temperature alte che a temperature basse.

Se la configurazione sterica del polimero dipende, come è logico supporre, dalla configurazione sterica del complesso di cui fanno parte atomi della superficie del reticolo cristallino e se quindi essa dipende da condizioni topologiche dei singoli centri attivi, si deve concludere che l'aumento della frequenza delle inversioni e perciò la diminuzione della lunghezza dei segmenti isotattici nel polimero derivino dall'accrescimento delle catene successivamente su centri attivi diversi, sui quali si sposta, per un equilibrio associazione-dissociazione, il composto metallorganico contenente la catena in accrescimento.

Alla stessa conclusione si giunge se si ammette che la forma anionica terminale della catena in accrescimento coordinata al complesso fissato al centro attivo, possa dissociarsi e riassociarsi al catione di un altro complesso facente parte di un centro attivo diverso.

I due processi considerati, entrambi favoriti dalla temperatura, l'uno di desorbzione o di dissociazione termica del composto metallorganico facente parte del complesso superficiale cataliticamente attivo, l'altro di dissociazione elettrolitica di una parte ionica dello stesso complesso, possono egualmente spiegare l'accorciamento della lunghezza dei tratti isotattici di ogni macromolecola a stereoblocchi e quindi la diminuita stereospecificità ad alte temperature.

(5) G. NATTA, I. PASQUON, E. GIACHETTI, «Chim. e Ind.», 40, 97 (1958).

(6) G. NATTA, «Experientia», Supplementum VII, 21 (1957).

Chimica fisica. — *Transizioni isofasiche dei polimeri delle α -olefine della serie alifatica normale*^(*). Nota di GIULIO NATTA, FERDINANDO DANUSSO e GIOVANNI MORAGLIO, presentata^(**) dal Socio G. NATTA.

Nello studio del comportamento dei polimeri alla temperatura è interessante, dal punto di vista teorico e pratico, la considerazione ed il rilevamento di transizioni o trasformazioni, che modificano in modo critico le proprietà del materiale in ristretti intervalli di temperatura.

Una delle trasformazioni più importanti è quella che si verifica nei materiali polimerici amorfi (o nella parte amorfa di materiali parzialmente cristallini), che è stata finora per lo più chiamata trasformazione vetrosa o transizione del 2° ordine.

Essa, secondo la maggioranza degli Autori, non avrebbe carattere termodinamico, ma prevalentemente cinetico, essendosi rivelata, sulla base di un notevole complesso di risultati, strettamente connessa con fenomeni di rilassamento macromolecolare⁽¹⁾. Noi la denomineremo, più genericamente, « transizione isofasica », poiché con essa non si hanno cambiamenti di fase e poiché non sempre si verifica un evidente passaggio, nel raffreddamento del materiale, a proprietà che dovrebbero essere tipiche di uno stato vetroso, almeno nel senso normalmente indicato.

Un esempio peculiare del modo non univoco, con cui tale transizione si manifesta in dipendenza del metodo di rilevamento, è stato messo in evidenza per il polietilene in un nostro recente lavoro⁽²⁾, da cui tra l'altro risulta che la temperatura della transizione del tipo di quella vetrosa, determinata per via dilatometrica, è in tale caso di parecchie decine di gradi superiore alle temperature che si possono mettere in evidenza con altri metodi, tra cui quello basato su di una temperatura di infragilimento.

Prescindendo dai tentativi intesi a raggiungere una migliore comprensione della natura assai complessa di tali transizioni, il problema attualmente più interessante e significativo è senz'altro quello delle relazioni tra la temperatura della transizione isofasica sopra specificata e le proprietà strutturali del polimero. Prendendo in considerazione alti polimeri (cioè polimeri di grado di polimerizzazione superiore al migliaio circa) si elimina praticamente l'eventuale influenza del peso molecolare e le loro proprietà possono risultare dipendenti dalla sola struttura dell'unità monomerica costitutiva, cioè dalla sola natura del monomero, specie quando le macromolecole polimeriche hanno struttura lineare regolare.

(*) Lavoro eseguito all'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) Ved. ad esempio: W. KAUZMANN, « Chem. Rev. », **43**, 219 (1948).

(2) F. DANUSSO, G. MORAGLIO, G. TALAMINI, « J. Polymer Sci. », **21**, 139 (1956).

Poiché in tempi recenti sono stati da noi sviluppati metodi di polimerizzazione stereospecifica, che consentono la preparazione di polimeri di α -olefine a struttura altamente regolare⁽³⁾, è interessante esaminare l'andamento della transizione isofasica, di cui sopra, in polimeri di olefine appartenenti ad un'unica serie omologa, per i quali la struttura chimica varia con gradualità ed in modo semplice.

In questa Nota presenteremo i risultati relativi all'andamento completo della temperatura di transizione isofasica dilatometrica dei polimeri delle α -olefine della serie alifatica normale. Alcuni risultati relativi ai polimeri dei primi termini della serie sono stati da noi anticipati, in via preliminare, in una precedente comunicazione⁽⁴⁾, inoltre, in un primo lavoro⁽²⁾ si erano effettuate determinazioni su polietileni di diversa struttura ed i relativi risultati saranno pure qui considerati a completamento e confronto.

I polimeri delle α -olefine sono stati da noi preparati per polimerizzazione a temperatura di 40–50° con catalizzatori da TiCl_3 ed $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$, usando benzolo come solvente. Decomposto il catalizzatore con alcool metilico, si ridiscioglieva il polimero prodotto in *n*-eptano, si trattava la soluzione con acqua ed HCl , per eliminare impurezze catalitiche, ed infine si precipitava il polimero a bassa temperatura in acetone. Dopo digestione di alcune settimane nell'acetone, che veniva spesso rinnovato, il polimero veniva essiccato sotto vuoto, per tempi da uno a più giorni, ed infine riscaldato, sempre sotto vuoto, fino ad assumere consistenza gommosa e quindi lasciato raffreddare. Il campione, così preparato, veniva introdotto, a piccoli pezzi, in normali dilatometri a capillare e ad esso veniva aggiunto alcool metilico od etilico come liquido di riempimento, fino all'altezza voluta nel capillare.

I dilatometri venivano immersi in un recipiente Dewar contenente una miscela di alcool metilico e ghiaccio secco. La temperatura veniva stabilita in ascesa mediante riscaldamenti intermittenti con resistenza elettrica immersa e in discesa mediante aggiunte regolate di ghiaccio secco. Una moderata agitazione assicurava una sufficiente uniformità di temperatura. Questa veniva misurata con una termocoppia rame-costantana, collegata ad un potenziometro.

Il campo di temperatura effettivamente ed in ogni caso esplorato era così compreso tra -60° e 0° circa. La curva dilatometrica (volume specifico-temperatura) presentava in tale campo un «ginocchio» in corrispondenza della transizione isofasica, la cui temperatura veniva determinata per intersezione dei due tratti di curva rettilinei, al disopra ed al disotto dell'intervallo di transizione.

Per ognuno dei campioni esaminati si sono effettuate varie esperienze, con temperature ascendenti e discendenti, a velocità medie di circa $0,3^\circ\text{C}/\text{min}$ ed effettuando determinazioni di temperatura ogni 3° circa.

(3) G. NATTA, «Atti Accad. Naz. Lincei», Mem. 8, 4 (1955); G. NATTA, P. PINO, P. CORRADINI, F. DANUSSO, E. MANTICA, G. MAZZANTI, G. MORAGLIO, «J. Am. Chem. Soc.», 77, 1708 (1955); Ved. anche: «J. Polymer Sci.», 16, 143 (1955); «Makromol. Chemie», 16, 77, 213 (1955); «Chimica e Industria», 37, 888 (1955); 38, 124 (1956); 38, 751 (1956) ed altri.

(4) G. NATTA, F. DANUSSO, G. MORAGLIO, «J. Polymer Sci.», 25, 119 (1957).

Nella Tabella I sono raccolti i valori delle temperature di transizione isofasica dilatometrica T_d ottenuti in ognuna delle esperienze ed in colonna a parte si è indicato il valore medio di esse per ogni tipo di polimero. Per ogni campione si è anche indicata la presenza o meno di cristallinità (con eventualmente specificato tra parentesi il grado approssimativo) e la viscosità intrinseca in opportuni solventi.

I valori medi delle temperature T_d sono stati infine riportati nel diagramma di fig. 1, in funzione del numero di atomi di carbonio dell'olefina di partenza

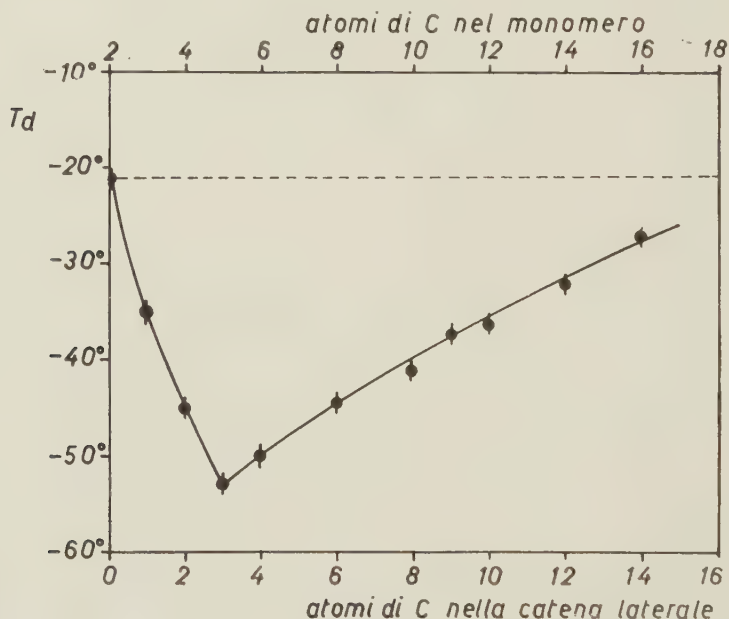


Fig. 1.

o della catena normale laterale dell'unità strutturale (sostituente del gruppo vinilico nell'olefina).

I risultati relativi a singoli tipi di strutture polimeriche (come ad esempio quelli sui polipropileni) dimostrano che si ottengono gli stessi valori della temperatura di transizione sia per polimeri completamente amorfi, sia per polimeri altamente cristallini. Inoltre l'intensità del fenomeno della transizione è decrescente all'aumentare della cristallinità⁽²⁾. Queste due osservazioni sono in completo accordo sia col fatto, già riscontrato e dimostrato in precedenti lavori⁽³⁻⁵⁾, che le proprietà di polimeri isotattici e non isotattici di uno stesso monomero, allo stato amorfo o di soluzione diluita, sono assai simili tra loro, sia col fatto che la transizione isofasica considerata è peculiare della parte amorfa del polimero e non della parte cristallina.

(5) G. NATTA, F. DANUSSO, G. MORAGLIO, «Makromol. Chemie», 20, 37 (1956); F. DANUSSO, G. MORAGLIO, «J. Polymer Sci», 24, 161 (1957).

TABELLA I.

Polimero	Campione	$[\eta]$ (100 cm ³ g ⁻¹) (*)	Stato fisico (**)	T _d (°C) (sperimentale)	T _d (°C) (media)
Polipropilene	A	0,11	am.	— 34,5 — 35	— 35
	B	0,28	cr. (0,8)	— 35,5 — 34,5 — 36 — 34 — 34,5 — 35	
	C	0,43	cr. (0,65)	— 37 — 37	
	D	0,65	cr. (0,5)	— 34 — 39 — 35	
	E	0,78	cr. (0,45)	— 35,5 — 33,5	
	F	0,86	am.	— 35 — 36,5	
	G	0,96	cr. (0,35)	— 37 — 35	
	H	2,82	cr. (0,80)	— 34,5	
	I	3,47	cr. (0,75)	— 36 — 35	
Polibutilene	J	0,76	am.	— 48 — 43	— 45
	K	2,00	cr. (0,6)	— 45 — 44	
Polipentene	L	n. d.	am.	— 53 — 51,5	— 53
	M	2,65	cr.	— 53 — 52,5 — 53	
	N	2,96	cr.	— 52 — 53,5	
Poliesene	O	1,99	am.	— 49 — 51	— 50
	P	1,99	am.	— 51 — 50	

Segue: TABELLA I.

Polimero	Campione	$[\eta]$ (100 cm ³ g ⁻¹) (*)	Stato fisico (**)	T _d (°C) (sperimentale)	T _d (°C) (media)
Poliottene	Q	1,6	am.	— 41 — 46 — 46 — 44 — 49 — 45	— 45
Polidecene	R	1,6	am.	(— 45) — 42 — 41 — 41,5 — 40,5	— 41
Poliundecene	S	4,3	cr.	— 36 — 37 — 37,5 — 36 — 38,5 (— 25) — 38	— 37
Polidodecene	T	2,7	cr.	— 35 — 35,5 — 37,5 — 38	— 36
Politetradecene	U	2,0	cr.	— 30 — 31 — 31 — 35 — 33 — 33 — 30 — 34	— 32
Poliesadecene	V	0,8	cr.	— 27,5 — 23,5 — 29 — 26,5 — 26,5 — 27 — 27,5	— 27

(*) Da A a K in tetralina a 135 °C; da M a P in toluolo a 30 °C; da Q a V in tetracloruro di carbonio a 30 °C.

(**) Am.=amorfo; cr.=cristallino; ai raggi X, a temperatura ambiente. Tra parentesi il grado approssimativo di cristallinità.

I risultati sui polipropileni dimostrano, inoltre, che la temperatura di transizione è la stessa sia per alti che per relativamente bassi pesi molecolari. Ciò può essere dovuto alla relativa omogeneità chimica e strutturale dei polimeri ed all'assenza di gruppi terminali non idrocarburici, che, in fenomeni tipici della parte amorfa, potrebbero creare sensibili eterogeneità d'interazione nel polimero complessivo.

Esaminando in fig. 1 l'andamento delle temperature di transizione nell'intera serie polimero-omologa, si osserva che la temperatura del polietilene (-21°) viene dapprima diminuita per inserzione di catene laterali corte (metiliche, etiliche e propiliche) e raggiunge così con una certa legge il valore minimo -53° col polipentene. Da questo valore minimo essa cresce poi, con altra legge, in modo graduale, tendendo per i termini più alti nuovamente al valore tipico del polietilene, messo in evidenza nella fig. 1 con una retta orizzontale tratteggiata.

Questo andamento è evidentemente connesso con la predominanza, nei primi termini della serie, delle proprietà dipendenti dalle configurazioni delle catene principali e con la prevalenza, nei termini successivi, delle proprietà e della struttura delle catene laterali lineari che, al limite, tendono a riprodurre nuovamente la struttura polietilenica.

Anche se tale andamento appare essenzialmente logico, è pur sempre peculiare il fatto che si passi per una zona critica, corrispondente alla struttura con catene laterali a tre atomi di carbonio.

Un andamento analogo si manifesta anche, come risulta da prove in corso, nei riguardi della temperatura di fusione della parte cristallina degli stessi polimeri, pur con differenze rispetto all'andamento della temperatura di transizione isofasica. Tali andamenti costituiscono un fenomeno degno di considerazione per lo studio e la determinazione di nuove proprietà utili di materiali polimerici.

CONCLUSIONI. — La temperatura di transizione isofasica di polimeri, cristallini ed amorfi, della serie delle α -olefine alifatiche normali, preparati con processi a cui attribuiamo un meccanismo di polimerizzazione anionica coordinata ⁽⁶⁾, è stata determinata per via dilatometrica.

Il valore di essa, per polimeri di uno stesso monomero, è praticamente indipendente dal peso molecolare, dal grado di cristallinità e dalla struttura stereoisomerica del campione esaminato. Inoltre la transizione si dimostra, una volta di più, connessa con trasformazioni della sola parte amorfa del polimero.

La temperatura di transizione è, nell'intera serie polimero-omologa considerata, sempre inferiore a quella del polietilene (-21°), varia in modo regolare con il variare del numero di atomi di carbonio della catena laterale del monomero ed assume un valore minimo (-53°) per il polipentene. Nei termini più alti essa tende asintoticamente al valore del polietilene in

(6) G. NATTA, « *Experientia* », Supplementum VII (1957).

virtù delle proprietà imposte al polimero dalla prevalenza strutturale delle lunghe catene laterali, proprietà che nei termini più bassi sono invece prevalentemente determinate dalla catena principale. Questo duplice aspetto si ritrova anche nelle proprietà strutturali delle parti cristalline dei polimeri della stessa serie. I primi termini, infatti, hanno, allo stato cristallino, una configurazione delle macromolecole di tipo elicoidale, mentre per termini sufficientemente alti la forma cristallina viene imposta dalle catene laterali che tendono ad assumere la configurazione a zig-zag planare del polietilene.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Calcolo delle probabilità. — *Sur certains processus à liaisons complètes.* Nota di RADU THEODORESCU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Soit $\{E, \mathbf{K}\}$ un champ d'événements, où le corps borélien \mathbf{K} contient aussi les ensembles de la forme $\{\xi\}$, $\xi \in E$.

Introduisons les notations: $\Omega = \prod_{\tau \in [-\infty, 0)} E_{\tau}$, $E_{\tau} = E$ ($\tau \in [-\infty, 0)$); \mathbf{H} le corps borélien engendré par les ensembles de la forme $\prod_{\tau \in [-\infty, 0)} A_{\tau}$, $A_{\tau} \in \mathbf{K}$; $E^{[0, u)} = \prod_{\tau \in [0, u)} E_{\tau}$, $E_c = E$ ($\tau \in [0, u)$), $u > 0$; $\mathbf{K}^{[0, u)}$ le corps borélien engendré par l'ensemble $\mathbf{C}^{[0, u)}$ des parties cylindriques de $E^{[0, u)}$.

Pour tout $x^{[0, u)} = \{\xi^{\alpha}\}_{\alpha \in [0, u)} \in E^{[0, u)}$, soit $w(\cdot, x^{[0, u)})$ l'application de Ω dans Ω , ainsi définie

$$w(\omega, x^{[0, u)}) = \{w^{\beta}\}_{\beta \in [-\infty, 0)} \quad , \quad w^{\beta} = \begin{cases} \omega^{\beta+u}, & \beta \in [-\infty, -u), \\ \xi^{\beta+u}, & \beta \in [-u, 0), \end{cases}$$

si $\omega = \{\omega^{\alpha}\}_{\alpha \in [-\infty, 0)}$.

2. Considérons maintenant la fonction $p(\omega, X^{[0, u)})$, définie sur $\Omega \times \mathbf{C}^{[0, u)}$, telle que $p(\omega, \cdot)$ soit une probabilité sur $\mathbf{C}^{[0, u)}$ pour tout $\omega \in \Omega$ fixé; évidemment $p(\omega, X^{[0, u)})$ peut être prolongée uniquement sur $\mathbf{K}^{[0, u)}$ [1, 2]. Supposons donc:

- a) quelque soit $\omega \in \Omega$ fixé, $p(\omega, \cdot)$ est une probabilité sur $\mathbf{K}^{[0, u)}$;
- b) quelque soit $X^{[0, u)} \in \mathbf{K}^{[0, u)}$ fixé, $p(\cdot, X^{[0, u)})$ est une fonction \mathbf{H} -mesurable.

(*) Nella seduta dell'11 gennaio 1958.

Soit $P_t(\omega, X^{[0,u]})$ la fonction définie sur $\Omega \times \mathbf{K}^{[0,u]} \times [0, \infty)$ par la relation

$$P_0(\omega, X^{[0,u]}) = p(\omega, X^{[0,u]}),$$

$$P_t(\omega, X^{[0,u]}) = \int_{E^{[0,t]}} p(\omega, dx^{[0,t]}) p(w(\omega, x^{[0,t]}), X^{[0,u]}), \quad t > 0,$$

avec les propriétés suivantes:

α) quelques soient $\omega \in \Omega$ et $t \in [0, \infty)$ fixés, $P_t(\omega, \cdot)$ est une probabilité sur $\mathbf{K}^{[0,u]}$;

β) quelques soient $t \in [0, \infty)$ et $X^{[0,u]} \in \mathbf{K}^{[0,u]}$ fixés, $P_t(\cdot, X^{[0,u]})$ est une fonction \mathbf{H} -mesurable;

γ)

$$P_{s+t}(\omega, X^{[0,u]}) = \int_{E^{[0,s]}} p(\omega, dx^{[0,s]}) P_t(w(\omega, x^{[0,s]}), X^{[0,u]}),$$

pour tous $s, t \in [0, \infty)$, $\omega \in \Omega$, $X^{[0,u]} \in \mathbf{K}^{[0,u]}$.

La fonction $P_t(\omega, X^{[0,u]})$ peut être considérée comme la probabilité de passage d'un processus à liaisons complètes [3].

3. Ceci étant, nous dirons qu'un processus à liaisons complètes est un processus (B'), s'il existe une fonction réelle positive $\varepsilon(\alpha)$, définie sur $[0, \infty]$,

$$\int_0^\infty \varepsilon(\alpha) d\alpha < \infty, \text{ telle que l'on ait pour tout } X^{[0,u]} \in \mathbf{K}^{[0,u]} (u > 0)$$

$$(B') \quad |P_t(w(\omega, x^{[0,s]}), X^{[0,u]}) - P_t(w(\omega', x^{[0,s]}), X^{[0,u]})| \leq \int_s^\infty \varepsilon(\alpha) d\alpha,$$

quelques soient $\omega, \omega' \in \Omega$, $t \geq 0$, $x^{[0,s]} \in E^{[0,s]}$, $s \geq S$, où $\varepsilon(s) < 1$ pour $s \geq S$.

Remarquons d'ailleurs que dans le cas du temps denombrable, une chaîne (B) est aussi une chaîne (B'), comme il résulte, par exemple, de [4].

Un processus à liaisons complètes sera appelé un processus (K) si l'on a

$$(K) \quad p(\omega, X^{[0,u]}) \geq \lambda p(\omega', X^{[0,u]}), \quad \lambda > 0,$$

quelques soient $\omega, \omega' \in \Omega$, $X^{[0,u]} \in \mathbf{K}^{[0,u]}$; évidemment $\lambda \leq 1$.

Nous pouvons maintenant donner le théorème suivant:

THÉORÈME. — Si un processus (B') est aussi un processus (K), $P_t(\omega, X^{[0,u]})$ tend, pour $t \rightarrow \infty$, vers une limite bien déterminée indépendante de $\omega \in \Omega$, quelque soit $X^{[0,u]} \in \mathbf{K}^{[0,u]}$ ($u > 0$).

4. Si nous supposons l'existence des densités, c'est à dire si l'on a

$$p(\omega, X^{[0,u]}) = \int_{X^{[0,u]}} p(\omega, y^{[0,u]}) p(dy^{[0,u]}), \quad (u > 0),$$

où $\varphi(\omega, y^{[0,u]})$ est une fonction $\mathbf{H} \times \mathbf{K}^{[0,u]}$ -mesurable ⁽¹⁾, définie sur $\Omega \times E^{[0,u]}$ et $p(\cdot)$ une probabilité sur $\mathbf{K}^{[0,u]}$, le théorème énoncé ci-dessus reste valable, en remplaçant les fonctions $P_t(\omega, X^{[0,u]})$ par les densités correspondantes $\Phi_t(\omega, y^{[0,u]})$.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] O. ONICESCU, G. MIHOC, C. T. IONESCU TULCEA, *Calcul des probabilités et applications* (en roumain), Bucarest, 1956.
 [2] J. L. DOOB, *Stochastic processes*, New York, 1953.
 [3] O. ONICESCU, *Calcul des probabilités* (en roumain), Bucarest, 1956.
 [4] G. CIUCU, *Chaînes à liaisons complètes du type (B)* (en roumain), «Com. Acad. R.P.R.», t. I, n. 6, 455-460 (1951).

Analisi matematica. — *Su una particolare equazione differenziale ordinaria non lineare* ^(*). Nota di ALDO GHIZZETTI, presentata ^(**) dal Socio M. PICONE.

In questa Nota sono esposte alcune considerazioni sull'equazione differenziale ordinaria

$$(1) \quad x'' + x + \varphi(x') = 0,$$

nell'incognita $x = x(t)$ con $t \geq 0$, sotto l'ipotesi che $\varphi(x')$ sia una funzione definita per tutti i valori di x' , crescente e dotata di derivata prima continua. È poi considerato il caso particolare

$$(2) \quad x'' + x + (x' + q)|x' + q| = 0, \quad (q \geq 0),$$

che si presenta nello studio delle oscillazioni dell'acqua in un impianto idraulico dotato di pozzo piezometrico ⁽¹⁾.

Molte ricerche sono state fatte da vari Autori sull'equazione (1) e su casi particolari di essa ⁽²⁾; fra l'altro sono noti criteri per decidere se gli inte-

(1) $\mathbf{H} \times \mathbf{K}^{[0,u]}$ désigne le corps borélien sur le produit $\Omega \times E^{[0,u]}$, engendré par les ensembles de la forme $X \times Y$, $X \in \mathbf{H}$, $Y \in \mathbf{K}^{[0,u]}$.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) Vedi: *Oscillazioni dell'acqua in impianti idraulici dotati di pozzi piezometrici*. «Manuali per applicazioni tecniche del calcolo», N. 1, Casa editrice Perrella, Roma, 1950 (Pubblicazione n. 250 dell'I.N.A.C.).

(2) Si veda: A. SIGNORINI, *Moto di un punto soggetto a resistenza idraulica e forza di richiamo*, «Atti R. Istituto Veneto Sc. Lettere ed Arti», 73 (1913-14); W. E. MILNE, *Damped vibrations*, «University of Oregon Publication», Vol. 2, n. 2 (1923); M. PICONE, *Complementi analitici e numerici ad una ricerca di Signorini sul moto di un sistema soggetto a resistenza idraulica e forza di richiamo*, «Atti R. Istituto Veneto Sc. Lettere ed Arti», 101, (1942); G. SANSONE, *Sulla durata delle oscillazioni di un punto soggetto a resistenza idraulica e forza di richiamo. Valutazione asintotica*, ibidem, 102 (1942-43); E. KAMKE, *Differentialgleichungen*, Leipzig

grali di (1) sono *oscillanti* oppure no. Qui riprendo quest'ultima questione e trovo dei criteri sostanzialmente già noti, però con dimostrazioni che mi risultano nuove ed assai più semplici di quelle conosciute (vedi n. 3).

Successivamente (n. 4) espongo per la (1) un metodo rapido di calcolo dei suoi integrali oscillanti, che già avevo dato nel caso dell'equazione (2)⁽³⁾. Il metodo in questione è fondato sull'uso di un certo nomogramma da tracciarsi una volta per tutte e che, nel caso della (2), è stato calcolato per $q \leq 1/2$ ⁽⁴⁾. Mi è però stato osservato che ciò non è sufficiente per le applicazioni pratiche e che è necessario considerare anche valori più elevati di q . Disponendo di macchine calcolatrici elettroniche, non vi è oggi alcuna difficoltà ad eseguire i calcoli occorrenti ed è appunto la preparazione di questi calcoli che mi ha condotto alla redazione della presenta Nota. I già citati n. 3 e 4 che ne costituiscono la parte essenziale sono preceduti dai n. 1 e 2 ove sono svolte considerazioni preliminari.

1. — Nello studio della (1) non è restrittivo supporre che sia

$$(3) \quad \varphi(0) = 0;$$

basta infatti cambiare x in $x - \varphi(0)$ per ridursi a tale caso. In tale ipotesi la (1) ammette l'integrale $x \equiv 0$.

In base a teoremi noti⁽⁵⁾ ogni integrale $x(t)$ (continuo assieme alla sua derivata prima) è prolungabile in $(0, +\infty)$ e si ha

$$(4) \quad x(t) \rightarrow 0, \quad x'(t) \rightarrow 0 \quad (\text{per } t \rightarrow +\infty).$$

Ogni integrale di (1) ammette continue anche le derivate $x''(t)$, $x'''(t)$ e risulta

$$(5) \quad x''' + x' + \varphi'(x')x'' = 0.$$

2. — Osserviamo le seguenti altre proprietà elementari degli integrali $x(t)$ della (1) con $\varphi(0) = 0$.

I) *Per ogni integrale $x(t)$ non identicamente nullo, l'insieme degli zeri di $x(t)$, oppure di $x'(t)$, oppure di $x''(t)$, se non è vuoto, è costituito da punti isolati. Tali zeri sono tutti semplici.*

1943, p. 559; G. SESTINI, *Moto di un punto soggetto a resistenza e a forza di richiamo*, « Rend. Ist. Lombardo Sc. Lettere », 79 (1945-46); G. MALGARINI, *Studio asintotico del moto d'un oscillatore elastico, con resistenza di tipo subviscoso*, ibidem, 86 (1953); G. SANSONE e R. CONTI, *Equazioni differenziali non lineari*, « Monografie matematiche del C.N.R. », n. 3, Ed. Cremonese, Roma 1956; Cap. VI, § 6 e Cap. VII, § 6, 7, 8.

(3) Vedi op. cit. in ⁽¹⁾, pp. 31-42.

(4) Vedi op. cit. in ⁽¹⁾, pp. 22-30.

(5) Vedi R. CACCIOPOLI e A. GHIZZETTI, *Ricerche asintotiche per una classe di sistemi di equazioni differenziali ordinarie non lineari*. « Rendiconti della Reale Accademia d'Italia », s. VII, Vol. III, 493-501 (1942); in particolare i teoremi III e IV di p. 498. Per applicare il teor. III, si deve osservare che $\varphi'(x') \geq 0$ e che $x(t) \equiv 0$ è l'unico integrale per il quale risulti $\varphi'[x'(t)] = 0$ per tutti i t di un intervallo I . Infatti la $\varphi'[x'(t)] = 0$ per $t \in I$ ed il fatto che $\varphi(x')$ è crescente implicano ovviamente $x'(t) = \text{costante}$ per $t \in I$; da ciò e da (1), (3) segue $x(t) \equiv 0$ per $t \in I$.

Dim. - Basta osservare che da $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ segue $x(t) \equiv 0$ e che alla stessa conclusione portano le $x'(t_0) = x''(t_0) = 0$ in virtù di (1), (3) e le $x''(t_0) = x'''(t_0)$ in virtù di (5).

II) *Per ogni integrale $x(t)$ non identicamente nullo, ogni zero di $x'(t)$ è punto di massimo positivo oppure di minimo negativo.*

Dim. - La $x'(t_0) = 0$ implica anzitutto $x(t_0) \neq 0$ ed inoltre, per (1) e (3), $x''(t_0) = -x(t_0)$.

III) *Ogni integrale $x(t)$, non identicamente nullo, è di tipo smorzato cioè, detti $t_0 < t_1$ due punti di estremo consecutivi, si ha $x^2(t_1) < x^2(t_0)$.*

Dim. - All'interno di (t_0, t_1) la $x'(t)$ ha segno costante, mentre si annulla agli estremi. Tenuto conto che $\varphi(x')$ ha il segno di x' , si ricava da (1) che all'interno di (t_0, t_1) le due funzioni $x''(t) + x(t)$ e $x'(t)$ hanno segni opposti, vale a dire che $x'(t)[x''(t) + x(t)] < 0$. Ne segue, integrando su (t_0, t_1) , $\frac{1}{2}[x'^2(t) + x^2(t)]_0^1 < 0$ ossia $x^2(t_1) < x^2(t_0)$.

IV) *Per ogni integrale $x(t)$ non identicamente nullo, ogni zero di $x''(t)$ è punto di flesso, o di crescita con ordinata negativa, oppure di decrescenza con ordinata positiva.*

Dim. - Per il teor. I la $x''(t_0) = 0$ implica $x'''(t_0) \neq 0$ ed anche $x'(t_0) \neq 0$. D'altra parte dalla (1) si ricava $x(t_0) = -\varphi[x'(t_0)]$ onde risulta $x(t_0) < 0$ se $x'(t_0) > 0$, $x(t_0) > 0$ se $x'(t_0) < 0$.

Si può anche dire che ogni punto di flesso è per $x'(t)$ un punto di massimo positivo oppure di minimo negativo: ne deriva ovviamente:

V) *In ogni intervallo (finito o infinito) in cui la $x'(t)$ sia sempre positiva o sempre negativa, la $x''(t)$ può annullarsi al più una volta.*

VI) *Per ogni integrale $x(t)$ non identicamente nullo, fra due punti di estremo consecutivi cade uno ed un solo punto di flesso ed uno ed un solo zero; inoltre il primo precede il secondo.*

Dim. - La prima affermazione deriva dal teorema di Rolle e dal teor. V. La seconda è immediata conseguenza del teor. II e la terza del teor. IV.

3. - Osserviamo ora che per un integrale $x(t)$ della (1), non identicamente nullo e considerato in $(0, +\infty)$, appaiono possibili due casi: o la $x'(t)$ si annulla un numero finito (eventualmente nullo) di volte, oppure la $x'(t)$ si annulla infinite volte. Nel primo caso diremo che l'integrale $x(t)$ è *definitivamente monotono*, nel secondo che è *oscillante*. Dimostriamo al riguardo i teoremi seguenti:

VII) *Se $x(t)$ è un integrale definitivamente monotono, si ha definitivamente $x'(t)x''(t) < 0$.*

Dim. - Per ipotesi esiste un intervallo $(t_0, +\infty)$ in cui $x'(t)$ ha segno costante, per esempio positivo. In tale intervallo la $x''(t)$ può annullarsi al più una volta (teor. V) e perciò esiste un $t_1 \geq t_0$ tale che in $(t_1, +\infty)$ si ha $x''(t) \neq 0$, anzi $x''(t) < 0$ perché nel caso opposto la $x'(t) > 0$ non potrebbe, crescendo, tendere a zero per $t \rightarrow +\infty$, come prescrive la (4).

VIII) Se la (1) ammette un integrale definitivamente monotono, allora è necessariamente $\varphi'(0) \geq 2$. Perciò se $0 \leq \varphi'(0) < 2$ tutti gli integrali della (1) sono oscillanti (escluso $x \equiv 0$).

Dim. — Per il teor. VII l'integrale in questione $x(t)$ è tale da aversi definitivamente $-\frac{x''(t)}{x'(t)} > 0$. Posto

$$(6) \quad \max_{t \rightarrow +\infty} \lim \left[-\frac{x''(t)}{x'(t)} \right] = \lambda, \quad (0 \leq \lambda \leq +\infty),$$

possiamo intanto affermare che sarà

$$(7) \quad \max_{t \rightarrow +\infty} \lim \frac{x'(t)}{x''(t)} = -\frac{1}{\lambda}, \quad \left(-\infty \leq -\frac{1}{\lambda} \leq 0 \right).$$

Si osservi poi che dalla (1) segue $-\frac{x''}{x'} = \frac{x}{x'} + \frac{\varphi(x')}{x'}$ onde, prendendo il massimo limite per $t \rightarrow +\infty$ di ambo i membri e tenendo conto di (6), (4), (3), si ottiene

$$(8) \quad \lambda = \max_{t \rightarrow +\infty} \lim \frac{x(t)}{x'(t)} + \varphi'(0).$$

D'altra parte per una nota generalizzazione del teorema di L'Hospital ⁽⁶⁾ si ha $\max_{t \rightarrow +\infty} \lim \frac{x'(t)}{x''(t)} \geq \max_{t \rightarrow +\infty} \lim \frac{x(t)}{x'(t)}$ e questa, in virtù di (7), (8), equivale alla $-\frac{1}{\lambda} \geq \lambda - \varphi'(0)$. Ne deriva che non può essere $\lambda = 0$, né $\lambda = +\infty$; dunque λ è finito positivo e si ha $\lambda^2 - \varphi'(0)\lambda + 1 \leq 0$. Ma questo è possibile solo se $\varphi'^2(0) - 4 \geq 0$ ossia, dato che $\varphi'(0) \geq 0$, solo se $\varphi'(0) \geq 2$, c. d. d.

IX) Se $\varphi'(0) > 2$ tutti gli integrali della (1) sono definitivamente monotoni.

Dim. — Posto $\varphi'(0) = \alpha > 2$ si può scrivere $\varphi(x') = x'[\alpha + \omega(x')]$ con $\omega(x')$ continua e $\omega(0) = 0$. Se nella (1) si pone $x = e^{-\alpha t/2} y$, lasciando inalterato $\omega(x')$, si ottiene

$$(9) \quad y'' - \left[\frac{1}{4} \alpha^2 - 1 + \frac{1}{2} \alpha \omega(x') \right] y = -y' \omega(x').$$

Poiché $\alpha > 2$ e vale la (4), per ogni integrale $x(t)$ di (1) esiste un intervallo $(t_0, +\infty)$ in cui riesce

$$(10) \quad \frac{1}{4} \alpha^2 - 1 + \frac{1}{2} \alpha \omega(x') > 0.$$

Supposto $x(t)$ non identicamente nullo, la corrispondente $y(t)$ (non identicamente nulla) può in $(t_0, +\infty)$ annullarsi al massimo una volta. Infatti, se ciò non fosse, considerati due zeri consecutivi t_1, t_2 della $y(t)$, esisterebbe nell'interno di (t_1, t_2) un punto τ di massimo positivo o di minimo negativo

(6) Vedi M. PICONE, *Sul teorema di L'Hospital*. « Periodico di Matematiche », 1929.

per $y(t)$. Dalla $y'(\tau) = 0$ e dalle (9), (10) seguirebbe che $y''(\tau)$ ha lo stesso segno di $y(\tau)$, il che è assurdo.

Dunque si ha definitivamente $y(t) \neq 0$, quindi $x(t) \neq 0$ e perciò (teorema VI) $x(t)$ non può essere oscillante, c. d. d..

Nel caso $\varphi'(0) = 2$ ci limiteremo a citare il teorema seguente (in cui rientra l'equazione (2) che più ci interessa):

X) Se $\varphi'(0) = 2$ e se esiste un intorno del punto $x' = 0$ in cui la funzione $\varphi(x') - 2x' = x'\omega(x')$ non cambia segno, tutti gli integrali della (1) sono definitivamente monotoni.

Dim. - Nel caso $\alpha = 2$ la (9) può essere scritta sotto la forma $y'' = -e^t x'\omega(x')$, cosicché al tendere di t a $+\infty$, risulta definitivamente

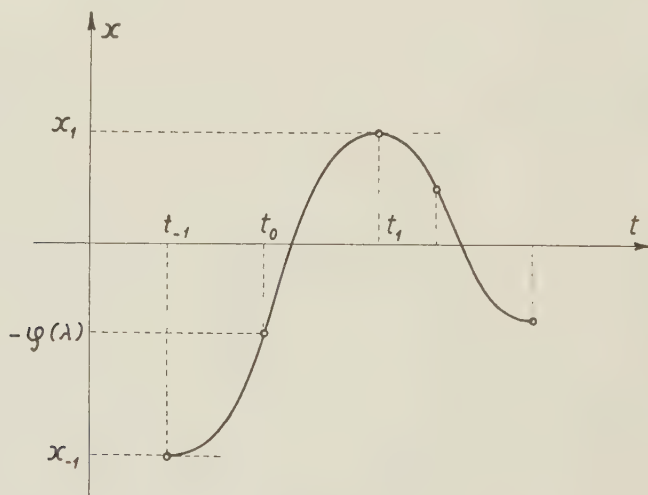


Fig. 1.

$y'' \geq 0$ oppure $y'' \leq 0$. Perciò, se $y(t)$ non è identicamente nullo, non può annullarsi infinite volte, ecc. ecc.

Applicando i teor. VIII, IX, X all'equazione (2) si ottiene:

XI) Se $0 \leq q < 1$ tutti gli integrali della (2) sono oscillanti (escluso $x \equiv -q^2$)⁽⁷⁾; se $q \geq 1$ sono tutti definitivamente monotoni.

4. - Per l'equazione (1) prendiamo in esame il caso $0 \leq \varphi'(0) < 2$ in cui tutti gli integrali (escluso $x \equiv 0$) sono oscillanti. In base ai teoremi del n. 2 ogni integrale $x(t) \neq 0$ ha un grafico che si compone di infinite onde smorzate, ciascuna del tipo di fig. 1. Detto t_0 un punto di flesso di $x(t)$ e posto $x'(t_0) = \lambda$, l'integrale stesso può ritenersi individuato dalle condizioni iniziali

$$(11) \quad x(t_0) = -\varphi(\lambda) \quad , \quad x'(t_0) = \lambda \quad , \quad (\lambda \neq 0).$$

(7) Se $q > 0$ per la (2) non è verificata la (3); perciò le (4) vanno sostituite dalle $x(t) \rightarrow -q^2$, $x'(t) \rightarrow 0$ (per $t \rightarrow +\infty$). Le oscillazioni di $x(t)$ avvengono attorno alla retta $x = -q^2$.

Il predetto punto di flesso è preceduto da un punto (t_{-1}, x_{-1}) di minimo (o di massimo) e seguito da un punto (t_1, x_1) di massimo (o di minimo). Osservato che in (1) la variabile t non figura esplicitamente, è evidente che le grandezze $t_0 - t_{-1}, x_{-1}, t_1 - t_0, x_1$ dipendono soltanto dal parametro λ dianzi introdotto. Posto

$$(12) \quad t_0 - t_{-1} = T_{-1}(\lambda) \quad , \quad x_{-1} = X_{-1}(\lambda),$$

$$(13) \quad t_1 - t_0 = T_1(\lambda) \quad , \quad x_1 = X_1(\lambda),$$

supponiamo, per un momento, di conoscere queste quattro funzioni. A proposito di esse ci basta osservare il seguente teorema:

XII) *La funzione $X_{-1}(\lambda)$ è decrescente, la $X_1(\lambda)$ è crescente.*

Dim. - Agli integrali di (1) corrispondono nel piano (x, x') delle *caratteristiche* (curve integrali della

$x' \frac{dx'}{dx} + x + \varphi(x') = 0$) per le quali

l'origine è un *fuoco*. Al tratto di

curva $x = x(t)$, $t_{-1} \leq t \leq t_1$ della

fig. 1 corrisponde l'arco di carat-

teristica C della fig. 2, tutto

situato al di sotto della retta

$x' = \lambda$ ⁽⁸⁾. Considerato $\bar{\lambda} > \lambda$, avremo un altro arco di caratteri-

stica \bar{C} , dello stesso tipo, che

deve partire dal punto \bar{L} situato

al di sopra della retta $x' = \lambda$ e

raggiungere l'asse x in due punti

\bar{x}_{-1}, \bar{x}_1 , il primo decrescendo

verso sinistra, il secondo decrescendo verso destra. Siccome ciò deve avvenire

senza che \bar{C} incontri C , è ovvio che il punto $\bar{x}_{-1} = X_{-1}(\bar{\lambda})$ deve essere a

sinistra di $x_{-1} = X_{-1}(\lambda)$ e che il punto $\bar{x}_1 = X_1(\bar{\lambda})$ deve essere a destra

di $x_1 = X_1(\lambda)$, c. d. d..

Ciò premesso, ritorniamo a considerare in $(t_0, +\infty)$ l'integrale $x(t)$

definito dalle condizioni iniziali (11). Il punto di flesso iniziale sarà seguito

da un punto (t_1, x_1) di massimo (o minimo) e si avrà per la (13)

(14)

$$t_1 - t_0 = T_1(\lambda),$$

(14')

$$x_1 = X_1(\lambda);$$

questo punto (t_1, x_1) sarà seguito da un punto di flesso con $t = t'_0, x' = \lambda'$

e si avrà per le (12):

(15)

$$t'_0 - t_1 = T_{-1}(\lambda'),$$

(15')

$$x_1 = X_{-1}(\lambda');$$

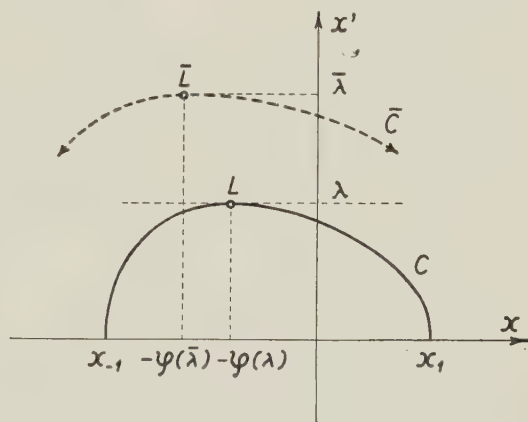


Fig. 2.

(8) Nelle figure è considerato il caso $\lambda > 0$; il ragionamento vale anche, con ovvie modificazioni, nel caso $\lambda < 0$.

dopo si avrà un punto (t_2, x_2) di minimo (o di massimo), risultando per le (13)

$$(16) \quad t_2 - t'_0 = T_I(\lambda'),$$

$$(16') \quad x_2 = X_I(\lambda');$$

e così di seguito:

(punto di flesso)

$$(17) \quad t''_0 - t_2 = T_{-I}(\lambda''),$$

$$(17') \quad x_3 = X_{-I}(\lambda'');$$

(punto di max o min)

$$(18) \quad t_3 - t''_0 = T_I(\lambda''),$$

$$(18') \quad x_3 = X_I(\lambda'');$$

.....

Le equazioni (14), (14'), ..., (18), (18'), ... danno immediatamente una costruzione grafica di tutte le grandezze incognite (t_1, x_1) , (t'_0, λ') ,

(t_2, x_2) , (t''_0, λ'') , (t_3, x_3) , ...

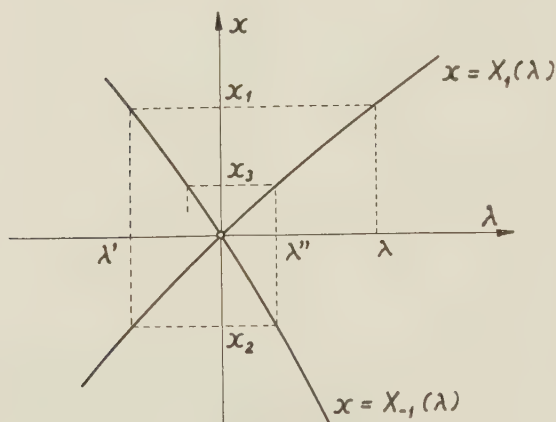


Fig. 3.

Basta tracciare in un piano, riferito a due assi coordinati λ e x , le curve $x = X_{-I}(\lambda)$, $x = X_I(\lambda)$ (vedi fig. 3)⁽⁹⁾ e, partendo dal punto $(\lambda, 0)$, effettuare la costruzione indicata che serve a determinare successivamente le grandezze $x_1, \lambda', x_2, \lambda'', x_3, \dots$ [come risulta ovviamente dalle (14'), ..., (18'), ... e dal teor. XII]. Si ottengono così le ordinate x_1, x_2, x_3, \dots dei successivi

punti di massimo o di minimo dell'integrale $x(t)$ e si possono anche calcolare quelle dei punti di flesso date da $-\varphi(\lambda)$, $-\varphi(\lambda')$, $-\varphi(\lambda'')$, ... Si può poi pensare sovrapposto all'asse x un asse t (con altra scala) e tracciate le curve $t = T_{-I}(\lambda)$, $t = T_I(\lambda)$. In base alle (14), (15), ..., (18), ... si leggeranno su di esse, in corrispondenza alle ascisse $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$ già determinate, i valori di $t_1 - t_0$, $t'_0 - t_1$, ..., $t_3 - t''_0$, ... dai quali, con semplici somme, si potranno dedurre le ascisse dei punti di massimo, di minimo e di flesso dell'integrale $x(t)$.

Si hanno così elementi sufficienti per tracciare le successive onde di $x(t)$ della fig. 1. Si osservi che è anche possibile tracciare le tangenti nei punti di flesso le quali hanno i coefficienti angolari $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$

(9) Per $\lambda = 0$ le (11) diventano $x(t_0) = x'(t_0) = 0$; si ha quindi $x(t) \equiv 0$, $X_{-I}(0) = X_I(0) = 0$.

Tutto dipende dalla determinazione delle funzioni (12) e (13). Ciò si può fare una volta per tutte con delle integrazioni numeriche della (1) accompagnata dalle condizioni iniziali (11) (ove si può supporre $t_0 = 0$), in corrispondenza ad un numero adeguato di valori di λ . Basta però effettuare l'integrazione numerica verso destra fino a raggiungere il primo punto di massimo (o di minimo) e verso sinistra fino al primo punto di minimo (o di massimo).

Il metodo serve a costruire l'integrale $x(t)$ a partire da un suo punto di flesso, cioè con condizioni iniziali del tipo (11); se le condizioni iniziali fossero diverse occorrerebbe, caso per caso, una preliminare integrazione numerica (verso destra o verso sinistra) fino a raggiungere il punto di flesso più vicino.

Nel caso particolare del problema dei pozzi piezometrici [equazione (2)] le condizioni iniziali sono

$$x(0) = -q_0^2, \quad x'(0) = q_0 - q, \quad (q_0 \geq 0, q_0 \neq q)^{(10)},$$

e sono precisamente del tipo (11) quando si ponga $\lambda = q_0 - q$. In tal caso il metodo dianzi descritto si può applicare senz'altro se $0 \leq q < 1$ (vedi teor. XI) e si ottiene così quanto ho già avuto occasione di esporre nella op. cit. in ⁽¹⁾. Saranno prossimamente eseguite le integrazioni numeriche occorrenti per permettere l'applicazione del metodo per tutti i $q < 1$.

Geometria algebrica. — *Sul calcolo effettivo della forma associata* $F(\mathbf{W}_{\alpha+\beta-n}^l)$ all'intersezione di due cicli effettivi puri $\mathbf{U}_\alpha^g, \mathbf{V}_\beta^l$ di S_n , in funzione delle $F(\mathbf{U}_\alpha^g), F(\mathbf{V}_\beta^l)$ relative ai cicli secanti ^(*). Nota I di FEDERICO GAETA, presentata ^(**) dal Socio F. SEVERI.

La soluzione completa del problema indicato nel titolo verrà esposta in una successiva Nota II. Nella presente Nota I si mostra come ci si possa ridurre al caso $l = 1$, sfruttando una geniale idea di B. Segre e Weil, qui richiamata in nota ⁽¹⁾.

(10) Vedi op. cit. in ⁽¹⁾, p. 13.

(*) Questa Nota fa seguito a quella dell'A. intitolata *Sull'equazione canonica di un complesso* \mathbf{C}_{n-d-1}^g di sottospazi S_d di S_n e uscita in questi « Rendiconti », fasc. 6, vol. XXIII, pp. 389 (1957); sarà indicata in seguito con E. c. Le notazioni saranno le stesse, nonché gran parte della bibliografia citata, benché, fuori dell'equivalenza grassmanniana e dell'equazione canonica del complesso associato all'intersezione di due cicli, non si farà uso del testo di E. c. nelle Note I, II.

(**) Nella seduta del 9 novembre 1957.

(1) L'idea è quella di ridurre lo studio dell'intersezione di U, V a quello del prodotto $U \times V$ costruito sul prodotto di due copie dell'ambiente affine con la « varietà diagonale » o « identità » (ved. WEIL, SAMUEL, loc. cit. in E. c. ⁽²⁾), ai quali però è sfuggito che l'idea medesima già trovavasi in B. SEGRE, *On limits of algebraic varieties, in particular of their intersections and tangential forms*, « Proc. of the London Math. Soc. » (2), 47, 351-403 (1942), n. 7. In seguito applicheremo l'idea alle varietà di un S_n proiettivo come appunto è stato fatto da B. SEGRE, loc. cit.

1. RAPPRESENTAZIONI RIGATE ENTRO IL MODELLO $R(S_n \times S_n)$ DEL PRODOTTO $S_n \times S_n$. - Il prodotto (ordinato) di due spazi proiettivi S_n si rappresenterà mediante l'insieme algebrico $\infty^{2n} \mathfrak{R}$ delle rette di S_{2n+1} appoggianti a due copie $S_n^{(0)}, S_n^{(\infty)}$ di S_n , tracciate in S_{2n+1} e sghembe fra loro, col riferimento proiettivo naturale ⁽²⁾.

Ogni insieme di punti I possiede una *copia puntuale* $I^{(\lambda)}$ nello spazio $S_n^{(\lambda)}$, luogo dei punti $(\vec{X}, \lambda \vec{X})$ per $(\vec{X}) \in I$. Per $\lambda = 0, \infty, 1$ si ottengono così rispettivamente la *prima copia* $I^{(0)}$, la *seconda copia* $I^{(\infty)}$ e la *copia diagonale* $I^{(1)}$.

Il prodotto astratto $A \times B$ di A, B si rappresenta mediante l'insieme rigato $R(A \times B) \subseteq \mathfrak{R}$, luogo delle rette congiungenti le prime copie dei punti di A , con le seconde copie dei punti di B . Se $C = A \cap B$ è l'interferenza ⁽³⁾ di A, B in S_n , si verifica subito che è $C^{(\lambda)} = R(A \times B) \cap S^{(\lambda)}$ per ogni $\lambda = 0, \infty$.

In particolare: *La copia diagonale dell'interferenza di due insiemi A, B è l'interferenza del modello rigato $R(A \times B)$ del loro prodotto con lo spazio diagonale.*

Se U_α, V_β sono varietà algebriche assolutamente irriducibili (questo attributo verrà in seguito abbreviato con a. i.) di dimensioni α, β (e ranghi

(2) Più precisamente, un punto qualsiasi di S_{2n+1} abbia le coordinate $(x^0, x^1, \dots, x^n; y^0, y^1, \dots, y^n) \equiv (\vec{X}; \vec{Y})$, con \vec{X}, \vec{Y} , vettori di due copie $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}$ dello spazio vettoriale $\mathfrak{U}_{n+1}(K)$ di dimensione $n+1$ sopra K , mediante il quale si costruisce S_n col solito processo di omogeneizzazione. S_{2n+1} si costruisce ugualmente, partendo dalla somma diretta $\mathfrak{U}^{(1)} + \mathfrak{U}^{(2)}$. Una retta dell'insieme algebrico citato \mathfrak{R} è individuata dalla coppia di punti $(\vec{X}, 0), (0, \vec{Y})$ degli spazi direttori $S^{(0)}, S^{(\infty)}$, i quali sono appunto le copie sghembe di S_n indicate; per ogni punto (\vec{X}, \vec{Y}) esterno ad $S^{(0)}, S^{(\infty)}$ ($\vec{X}, \vec{Y} \neq 0$) passa una ed una sola di queste rette. La rappresentazione qui adottata è classica e deve a C. SEGRE, « Math. Ann. », 40, 413-467 (1891), « Rend. Circ. Mat. Palermo », 5, 192-204 (1891).

Si riconosce subito la biunivocità della corrispondenza $(\vec{X}), (\vec{Y}) \longleftrightarrow (\vec{X}, \vec{Y})$ nonché l'identità essenziale fra gli insiemi di rette di \mathfrak{R} e quelli di punto degli *zweifach projektive Räume*, di VAN DER WAERDEN, *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin, 1939 ripresi anche da HODGE, II (loc. cit. E. c. (1)); questa interpretazione « rigata » può evitare inutili dimostrazioni per estendere a questi spazi proiettivi doppi (od in generale multipli) teoremi noti per gli « spazi proiettivi semplici ».

Le coppie di punti coincidenti $(\vec{X}), (\vec{X})$ di S_n si rappresentano biunivocamente senza eccezioni mediante le generatrici $\lambda(\vec{X}, 0) + \mu(0, \vec{X})$, congiungenti le copie $(\vec{X}, 0), (0, \vec{X})$ di ogni (\vec{X}) , del *modello rigato della diagonale*, brevemente *varietà diagonale* Σ_{n+1} , di equazioni $x^i y^j - x^j y^i = 0, i, j = 0, 1, \dots, n$, da non confondersi con lo *spazio lineare diagonale* Δ_n di equazioni $x^i - y^i = 0, i = 0, 1, \dots, n$, di punto generico (\vec{X}, \vec{X}) contenuto in Σ_{n+1} . La Σ_{n+1} è una varietà di Segre $S_1 \times S_n$, come luogo delle congiungenti le coppie di punti omologhi nell'omografia $(\vec{X}, 0) \longleftrightarrow (0, \vec{X})$ tra $S^{(0)}, S^{(\infty)}$; le varietà $P \times S_n$ sono gli spazi lineari $S_n^{(\lambda)}$ di equazioni $x^i - \lambda y^i = 0, i = 0, 1, \dots, n$ (con $(1, \lambda)$ coordinate di P in S_1). Per $\lambda = 0, \infty$, ed 1 così si ottengono rispettivamente $S^{(0)}, S^{(\infty)}$, ed $S^{(1)} = \Delta$ (ciò che giustifica le notazioni).

(3) Concetto della teoria degli insiemi (luogo dei punti comuni) da distinguersi, secondo Severi, dall'intersezione definita in geometria algebrica.

$\alpha' = n - \alpha$, $\beta' = n - \beta$) ⁽⁴⁾ il modello rigato $R(U \times V)$ è pure una varietà algebrica a. i. di dimensione $\alpha + \beta + 1$ di S_{2n+1} ⁽⁵⁾. Estenderemo la denominazione ai complessi (pure a. i.) *nucleati* ⁽⁶⁾, di *nuclei* $U, V, R(U \times V)$. Chiameremo complesso prodotto $\mathcal{C}(U) \times \mathcal{C}(V) = \mathcal{C}(R(U \times V))$ di $\mathcal{C}(U)$ per $\mathcal{C}(V)$ il complesso degli $S_{\alpha'+\beta'-1}$ di S_{2n+1} appoggiati ad $R(U \times V)$.

2. ESTENSIONE AI CICLI. — La nozione di prodotto rigato si estende formalmente ai cicli, assumendo per definizione:

$$R((\Sigma \lambda_i U^{(i)}) \times (\Sigma \mu_j V^{(j)})) = \Sigma \lambda_i \mu_j R(U^{(i)} \times V^{(j)}) \quad (\text{le } U, V \text{ a. i.}).$$

Analogamente, mediante $\mathcal{C}(\Sigma \lambda_i U^{(i)}) \times \mathcal{C}(\Sigma \mu_j V^{(j)}) = \Sigma \lambda_i \mu_j \mathcal{C}(U^{(i)} \times V^{(j)})$ si estendono la nozione e le notazioni $\mathbf{C}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ ecc. di *complesso nucleato prodotto*; vedremo poi che essa si può estendere altresì a complessi affatto arbitrari ⁽⁷⁾.

(4) L'opportunità d'introdurre il rango $d' = n - d$ di un ciclo risulta da ciò che il rango di una qualunque intersezione (regolare) è la somma dei ranghi dei cicli secanti.

(5) Come segue da ciò che $(\xi, t\eta)$ è punto generale di $R(U \times V)$ (allgemeine Punkt), se $(\xi), (\eta)$ sono punti generali di U, V, t essendo trascendente rispetto al corpo $K(\xi, \eta)$ che risulta dalla aggiunzione dei rapporti $\xi_i/\xi_j, \eta^r/\eta^s$, supposte $\xi^j \eta^s \neq 0$. Ved. HODGE-PEDOE, II, p. 146.

(6) Ved. E. c. nota ⁽³⁾.

(7) Per i complessi lineari nucleati $\mathbf{C}_\alpha^1(S_\alpha), \mathbf{C}_\beta^1(S_\beta)$ il prodotto è definito da $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{B} \\ \mathbf{U} & \mathbf{V} \end{vmatrix} = \mathbf{o}$

ove $\mathbf{A} = (a_j^i)$ è la matrice delle coordinate di α' iperpiani a_j^i segantisi in S_α , $\mathbf{B} = (b_j^i)$ quella analoga di β' iperpiani segantisi in S_β , quindi la matrice $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ rappresenta l' $S_{\alpha+\beta+1} = R(S_\alpha \times S_\beta)$ di S_{2n+1} definito dagli spazi che proiettano la prima copia degli a e quella seconda dei b dagli spazi opposti, mentre \mathbf{U}, \mathbf{V} simbolizza la $(\alpha + \beta + 2)$ -pla di iperpiani $\sum_{i=0}^n u_i x^i + \sum_{j=0}^n v_j x^j = \mathbf{o}$ segantisi sopra $R(S_\alpha \times S_\beta)$. Risulta immediatamente che tutte le coordinate grassmanniane di $S_{\alpha+\beta+1}$ in S_{2n+1} che non sono del tipo $s_I = a_1 b_J$ con

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} i_0 \\ i_1 \\ \vdots \\ i_{\alpha'} \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_0 \\ j_1 \\ \vdots \\ j_{\beta'} \end{pmatrix} \quad (\text{tabelle verticali di indici, ved. E. c.}), \text{ con } i_\lambda, j_\lambda = 0, 1, \dots, n$$

sono nulle. Per $\mathcal{C}_\alpha^1, \mathcal{C}_\beta^2$ affatto arbitrari la *definizione algebrica* di $\mathcal{C}_\alpha^1 \times \mathcal{C}_\beta^2$ data dalle equazioni precedenti ha carattere invariante.

La totalità dei complessi $\mathbf{C}_\alpha^1 \times \mathbf{C}_\beta^1$ di S_{2n+1} costituisce il sistema lineare minimo contenente tutti i complessi $\mathbf{C}(S_\alpha) \times \mathbf{C}(S_\beta)$ prodotto di complessi nucleati, e si chiamerà il *prodotto tensoriale* dei sistemi lineari $|\mathbf{C}_\alpha^1|, |\mathbf{C}_\beta^1|$: Ved. LICHNEROWICZ, loc. cit. E. c. ⁽⁷⁾.

Per g, l arbitrari sembra naturale definire $|\mathbf{C}_\alpha^g \times \mathbf{C}_\beta^l|$ mediante $\mathbf{C}_\alpha^g \times \mathbf{C}_\beta^l = \Sigma \mathbf{L}_\alpha^{(h)} \times \mathbf{L}_\beta^{(k)}$ nel caso che $\mathbf{C}_\alpha^g = \Sigma \mathbf{L}_\alpha^{(h)}, \mathbf{C}_\beta^l = \Sigma \mathbf{L}_\beta^{(k)}$ siano totalmente spezzati.

Siccome il complesso sezione ⁽⁸⁾ di un $\mathbf{C}(\mathbf{U}_\alpha^g)$ nucleato con un S_h ($h > n - 1 - \alpha = \alpha' - 1$) (non singolare ⁽⁹⁾ per \mathbf{C}) è pure nucleato, di nucleo l'intersezione $\mathbf{U} \cap S_h$, ne risultano le seguenti proprietà:

a) *Condizione caratteristica affinché l'interferenza $\mathbf{U}_\alpha^g \cap \mathbf{V}_\beta^l$ ($\alpha + \beta - n \geq 0$) sia irregolare (di dim. $> \alpha + \beta - n$) è che lo spazio diagonale sia singolare per il complesso prodotto.*

b) *Se $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$ è regolare, il complesso intersezione di $\mathbf{C}(\mathbf{U}) \times \mathbf{C}(\mathbf{V})$ con Δ_n è la copia diagonale del complesso di nucleo $\mathbf{U}_\alpha^g \cap \mathbf{V}_\beta^l$ di S_n .*

c) *Nel caso $\alpha + \beta = n - 1$ (ossia $\alpha' + \beta' = n + 1$), il complesso prodotto è d'ordine n , e si riconosce subito che l'appartenenza di Δ_n a questo complesso è condizione caratteristica affinché \mathbf{U} ed \mathbf{V} siano incidenti. Ne deriverà (ved. n. 5) che: la condizione d'incidenza di due cicli di dimensioni duali (ossia con $\alpha + \beta = n - 1$) si esprime mediante una sola equazione $I = 0$, dove I è una funzione intera ed omogenea rispetto ai coefficienti delle forme associate ⁽¹⁰⁾ ad $\mathbf{U}_\alpha^g, \mathbf{V}_\beta^l$.*

3. FORME ASSOCIATE AI CICLI $\mathbf{V}_d^g = \sum_{h=1}^g S_d^{(h)}$ SPEZZATI IN g SPAZI LINEARI DISTINTI. - Le due forme

$$F_i(S_d) = \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-d,0} & a_{n-d,1} & \cdots & a_{n-d,n} \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{d0} & u_{d1} & \cdots & u_{dn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \\ U \end{vmatrix}, \quad \begin{array}{l} (A, U \text{ matrici di tipo} \\ (n-d) \times (n+1) \\ (d+1) \times (n+1) \\ \text{rispettivamente)} \end{array}$$

$$F_p(S_d) = (A|X) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_n} \sum_d a_{i_1 i_2 \cdots i_{n-d}} x^{i_1 i_2 \cdots i_{n-d}}$$

(X matrice di tipo $(n-d) \times (n+1)$)

(8) La condizione di coniugio di $n - \alpha$ punti linearmente indipendenti dello spazio S_h in coordinate puntuali di S_n si trasforma, nel modo ben noto, in coordinate di punto in S_h qualora gli $n - \alpha$ punti suddetti si esprimano come combinazioni lineari di $h + 1$ punti linearmente indipendenti di S_h (con la scelta nel solito modo di un punto unità). La nuova condizione di coniugio del complesso sezione è invariante, e può anche essere identicamente soddisfatta. Se così accade, ogni $S_{n-\alpha-1}$ di S_h appartiene a \mathbf{C} e dicesi che S_h è *singolare* per \mathbf{C} .

(9) Ved. nota precedente.

(10) Le forme associate ad una varietà algebrica irriducibile V_d sono, come è ben noto, le condizioni di coniugio rispetto al complesso degli spazi di dimensione duale $n - d - 1$ appoggiati a V_d . La forma associata iperplanare (f. a. i.) s'indicherà con $F_i(V_d^g)$ (è la *zugeordnete Form* di VAN DER WAERDEN e CHOW, «Math. Annalen», 113, (1937)); la *forma associata puntuale* (così chiamata da SEVERI), (f. a. p. in seguito) s'indicherà con $F_p(V_d^g)$. Per i cicli si definisce ovviamente:

$$F_i(\mathbf{V}_d^g) = F_i(\Sigma \lambda_r \mathbf{I}_d^{g_r}) = \Pi [F_i(\mathbf{I}_d^{g_r})]^{\lambda_r} \quad \text{con} \quad \sum_r \lambda_r g_r = g$$

ed analogamente per le F_p .

sono rispettivamente la forma associata iperplanare $F_i(S_d)$ o puntuale $(F_p(S_d))^{(11)}$ dello spazio S_d intersezione degli $n-d$ iperpiani linearmente indipendenti $\sum_{j=0}^n a_{ij} x^j = 0, i = 1, 2, \dots, n-d$. Le $d+1$ serie di variabili covarianti u_i ad $n+1$ variabili $u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_n}$ rappresentano altrettanti iperpiani. Mediante lo sviluppo di Laplace per i minori delle $n-d$ prime righe risulta l'espressione di $F_i(S_d)$ mediante le coordinate $u_{j_0 j_1 \dots j_n}$ da cui si ricava immediatamente l'espressione $(A|X)$ di $F_p(S_d)$ in virtù delle note relazioni con le coordinate $x^{i_1 i_2 \dots i_{n-d}}$ ⁽¹²⁾.

L'intersezione $S_\gamma, \gamma = \alpha + \beta - n \geq 0$, di S_α con S_β (ranghi $\gamma' = n - \gamma, \alpha' = n - \alpha, \beta' = n - \beta; \gamma' = \alpha' + \beta'$) è rappresentata dalle forme:

$$F_i(S_\gamma) = \begin{vmatrix} A \\ B \\ W \end{vmatrix}, \quad F_p(S_\gamma) = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} | Z$$

se

$$F_i(S_\alpha) = \begin{vmatrix} A \\ U \end{vmatrix}, \quad F_p(S_\alpha) = (A|X), \quad F_i(S_\beta) = \begin{vmatrix} B \\ V \end{vmatrix}, \quad F_p(S_\beta) = (B|Y)$$

(ove U, V, X, Y sono matrici di tipo $(\alpha+1) \times (n+1), (\beta+1) \times (n+1), \alpha' \times (n+1), \beta' \times (n+1)$), in istretto rapporto con la formula $\chi = [\omega, \tau]$ che esprime la forma esterna χ associata ad S_γ come prodotto esterno di quelle analoghe ω, τ associate ad S_α ed S_β ⁽¹³⁾.

Consideriamo ora i cicli totalmente spezzati:

$$U_\alpha^g = \sum_{h=1}^g S_\alpha^{(h)}, (S_\alpha^{(h)} \neq S_\alpha^{(h')} \text{ per } h \neq h'); \quad V_\beta^l = \sum_{k=1}^l S_\beta^{(k)}, (S_\beta^{(k)} \neq S_\beta^{(k')} \text{ per } k \neq k').$$

Si verifica:

$$F_i(U_\alpha^g) = \prod_{h=1}^g F_i(S_\alpha^{(h)}) = \prod_{h=1}^g \begin{vmatrix} A^{(h)} \\ U \end{vmatrix}, \quad \left(F_i(S_\alpha^{(h)}) = \begin{vmatrix} A^{(h)} \\ U \end{vmatrix} \right),$$

ed analogamente per V_β^l :

$$F_i(V_\beta^l) = \prod_{k=1}^l F_i(S_\beta^{(k)}) = \prod_{k=1}^l \begin{vmatrix} B^{(k)} \\ V \end{vmatrix};$$

dualmente:

$$F_p(U_\alpha^g) = \prod_{h=1}^g (A^{(h)}|X), \quad F_p(V_\beta^l) = \prod_{k=1}^l (B^{(k)}|Y)$$

(X, Y matrici rispettivamente di tipo $\alpha' \times (n+1), \beta' \times (n+1)$) quindi, se l'interferenza dei radicali di U_α^g, V_β^l ha la dimensione regolare $\gamma = \alpha + \beta - n \geq 0$, (oppure $\gamma' = \alpha' + \beta' \leq n+1$):

$$(1) \quad F_p(S_\gamma) = \prod \begin{pmatrix} A^{(h)} \\ B^{(k)} \end{pmatrix} | Z, \quad F_i(S_\gamma) = \prod \begin{vmatrix} B^{(k)} \\ A^{(h)} \\ W \end{vmatrix}$$

(Z, W matrici di tipo $\gamma' \times (n+1), (\gamma+1) \times (n+1)$).

(11) Per le notazioni ved. nota ⁽¹⁰⁾.

(12) Ved. ad esempio HODGE-PEDOE, I, Cap. VII, p. 294.

(13) Ved. LICHNEROWICZ, loc. cit., oppure B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Ed. Docet, Roma 1951.

Lo scopo essenziale della presente ricerca è di *dimostrare che la formula (1) conserva la sua validità per $\mathbf{U}_\alpha^g, \mathbf{V}_\beta^l$ affatto arbitrari anziché spezzati (purché sia definito $\mathbf{W}_{\alpha+\beta-n}^{gl}$), qualora le a_i, b_j vengano interpretate come simboli che non hanno senso presi isolatamente, bensì quando vengano raggruppati (come insegna il calcolo simbolico ⁽¹⁴⁾ della teoria degli invarianti) in una certa maniera ben precisata. La dimostrazione sarà sviluppata nella Nota II. Qui mostreremo come ci si possa sempre ridurre al caso $l = 1$ applicando l'idea indicata nell'introduzione.*

4. CALCOLO DI $F_i(\mathbf{U}_\alpha^g \times \mathbf{V}_\beta^l)$. - L'intersezione del modello $R(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ a. i. con lo spazio $S_{\alpha'+\beta'+1} = R(S_{\alpha'} \times S_{\beta'})$ ($S_{\alpha'}, S_{\beta'}$ generali) si spezza nelle gl rette congiungenti le intersezioni $(\xi_h, 0), (0, \eta_k)$ considerate sulle copie rispettive di $S_{\alpha'}$ con U e di $S_{\beta'}$ con V , lungo le quali le due varietà rigate anzidette si segano semplicemente ⁽¹⁵⁾. Un iperpiano generico $\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{j=0}^n b_j x^j = 0$, sega queste rette nei punti $(\xi_h, t_{hk} \eta_k)$ con $t_{hk} = \frac{-\sum b_j \eta_k^j}{\sum_{i=0}^n a_i \xi_h^i}$, quindi la condizione perché un altro iperpiano generico $\sum_{i=0}^n c_i x^i + \sum_{j=0}^n d_j y^j = 0$ passi per uno di questi gl punti sarà:

$$\prod_{h=g, k=l} (\sum c_i \xi_h^i + t_{hk} \sum d_j \eta_k^j) = 0$$

oppure, eliminando le t_{hk} :

$$\prod_{h,k} \left| \begin{array}{cc} \sum a_i \xi_h^i & \sum b_j \eta_k^j \\ \sum c_i \xi_h^i & \sum d_j \eta_k^j \end{array} \right| = \prod_{h,k} (\sum \xi_h^i \eta_k^j (a_i d_j - b_j c_i))$$

dove supporremo sempre ordinati lessicograficamente i fattori h, k :

$$11, 12, \dots, 1l; 21, 22, \dots, 2l; \dots; g1, g2, \dots, gl.$$

Ma, siccome le funzioni simmetriche elementari ⁽¹⁶⁾

$$\{\xi_{i_1}^{i_1} \xi_{i_2}^{i_2} \dots \xi_{i_g}^{i_g}\}, \{\eta_{j_1}^{j_1} \eta_{j_2}^{j_2} \dots \eta_{j_l}^{j_l}\}, i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_g, j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_l$$

(14) Ved. ad esempio WEYL, loc. cit., E. c. nota (7), GRACE-YOUNG, *The algebra of invariants*, Cambridge Univ. Press, 1903, WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*, Noordhoff, Groningen, 1923, ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni*... Vol. I, libro I, Cap. I, Zanichelli, Bologna, 1915.

(15) Si può riconoscere la semplicità di ogni punto di $\lambda(\xi_h, 0) + \mu(0, \eta_k)$ come intersezione di $R(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ con $S_{\alpha'+\beta'+1}$, applicando il criterio jacobiano, tenuto conto del fatto che $(\xi_h), (\eta_k)$ sono semplici nelle rispettive intersezioni; ved. HODGE-PEDOE, II, p. 134.

(16) Nella nota decomposizione fattoriale di F_i possiamo normalizzare le ξ_h^0 in guisa tale che il coefficiente $A(u^1, u^2, \dots, u^d)$ (Ved. HODGE-PEDOE, II, p. 41) sia una forma nelle serie di variabili u^1, u^2, \dots, u^d . Paragonando i coefficienti omologhi risulta:

$$\{\xi_{i_1}^{i_1} \xi_{i_2}^{i_2} \dots \xi_{i_g}^{i_g}\} = \alpha^{i_1 i_2 \dots i_g} U'^1 I_1' I_2' \dots I_g'$$

dove abbiamo adoperato le notazioni tensoriali adatte alla scacchiera $\alpha' \times g$ (ved. E. c. nota (7)). L'apice esprime che va esclusa la riga delle variabili $u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0$.

dei $g(l)$ punti $(\xi_h); (\eta_k)$ (somme dei prodotti ottenuti permutando nelle $g!(l!)$ maniere possibili gli indici superiori) si esprimono mediante i coefficienti delle f. a. i. rispettive, ne risulta così la condizione di coniugio tra gli α iperpiani $u^i (u_j^i)$ segantisi in $S_{\alpha'}$ (di matrice \bar{U}), i β segantisi in $S_{\beta'}$ di matrice \bar{V} ed infine, i due iperpiani di equazioni $\sum a_i x^i + \sum b_j y^j = 0$, $\sum c_i x^i + \sum d_j y^j = 0$; e questa si può scrivere come « prodotto simbolico » dei determinanti $\bar{\Delta}^{hk}$ d'ordine $2n + 2$, con

$$\bar{\Delta}^{hk} = \begin{vmatrix} R^{hk} \\ \bar{U} & 0 \\ 0 & \bar{V} \end{vmatrix}$$

dove $R^{hk} = \begin{pmatrix} A^{(h)} & 0 \\ 0 & B^{(k)} \end{pmatrix}$, le $A^{(h)}, B^{(k)}$ essendo le matrici del n. 3 relative ad $\mathbf{U}_\alpha^g, \mathbf{V}_\beta^l$ (per $h = 1, 2, \dots, g; k = 1, 2, \dots, l$) e purché si sostituisca « simbolicamente » $\xi_h^i \rightarrow U_h^i, \eta_k^j \rightarrow V_k^j$ (U_h^i, V_k^j complementi algebrici di a_i, b_j nei determinanti d'ordine $n + 1$: $\begin{vmatrix} A^h \\ \bar{U} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B^k \\ \bar{V} \end{vmatrix}$, tenuto conto delle espressioni razionali citate per $\{\xi\}, \{\eta\}$).

Si riconosce subito che gli sviluppi di $\prod_{h,k} \bar{\Delta}^{hk}$ e $\prod_{h,k} \Delta^{hk}$ con $\Delta^{hk} = \begin{vmatrix} A^h & 0 \\ 0 & B^k \\ U & V \end{vmatrix}$, ed U, V matrici entrambe di tipo $(\alpha + \beta + 2) \times (n + 1)$ a termini indeterminati algebricamente indipendenti aggiunti a K , hanno i medesimi coefficienti (rispetto alle coordinate grassmanniane di $S_{\alpha' + \beta' + 1}$), cioè la specializzazione

$$(UV) \rightarrow \begin{vmatrix} \bar{U} & 0 \\ 0 & \bar{V} \\ a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} (a &= (a_0 a_1 \dots a_n), b = (b_0 b_1 \dots b_n), \\ c &= (c_0 c_1 \dots c_n), d = (d_0 d_1 \dots d_n) \end{aligned}$$

non fa sparire nessun termine. Pertanto:

La $F_i(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ è rappresentata simbolicamente da

$$\prod_{h=1, k=1}^{h=g, k=l} \begin{vmatrix} P^h & 0 \\ 0 & Q^k \\ U & V \end{vmatrix}.$$

5. CONDIZIONE D'INCIDENZA E CALCOLO DI $F_i(\mathbf{U}_\alpha^g \cap \mathbf{V}_\beta^l)$. — Se E è la matrice unità d'ordine $n + 1$, la condizione di appoggio dello spazio diagonale Δ_n in $R(\mathbf{U} \times \mathbf{V})$ nel caso $\alpha + \beta = n - 1$ si esprime simbolicamente così:

$$\prod_{h,k=1}^{h=g, k=l} \begin{vmatrix} P^h & 0 \\ 0 & Q^k \\ -E & E \end{vmatrix} = \prod \begin{vmatrix} P^h & 0 \\ Q^k & Q^k \\ 0 & E \end{vmatrix} = \prod_{h=1, k=1}^{h=g, k=l} \begin{vmatrix} P^h \\ Q^k \end{vmatrix}$$

ove l'ultimo prodotto può venir esteso a determinanti d'ordine $n + 1$, anziché $2n + 2$, come risulta da facili trasformazioni con le colonne.

Risulta così l'espressione simbolica annunciata dell'invariante I , che chiameremo in seguito l'intersecante di \mathbf{U} ed \mathbf{V} .

L'estensione a più cicli, $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \dots, \mathbf{U}^{(s)}$, di ranghi complementari, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ con $\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_s = n + 1$ è facile:

I ammette sempre la rappresentazione simbolica:

$$I = \prod_{h_1, h_2, \dots, h_s} \begin{vmatrix} P^{(h_1)} \\ P^{(h_2)} \\ \dots \\ P^{(h_s)} \end{vmatrix}$$

per $h_i = 1, 2, \dots, g_i$ (g_i ordine del ciclo i -esimo). Cioè:

La condizione d'incidenza di un numero s arbitrario (purché sia $2 \leq s \leq n + 1$) di cicli di ranghi complementari si esprime sempre mediante una sola equazione $I = 0$, ove I è l'intersecante di $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \dots, \mathbf{U}^{(s)}$.

In particolare, nel caso $h = n + 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_s = 1$ si ritrova l'espressione simbolica del risultante tensoriale.

Infine, per $\gamma = \alpha + \beta - n \geq 0$ ed $(U, V) \rightarrow \begin{pmatrix} -E & E \\ W & 0 \end{pmatrix}$, risulta

$$F_i(U \cap V) = \prod_{h=1, k=1}^{h=g, k=l} \begin{vmatrix} P^h \\ Q^k \\ W \end{vmatrix}$$

la quale uguagliata a zero fornisce l'espressione simbolica di coniugio della $(\gamma + 1)$ -pla di iperpiani, rappresentata da W (di tipo $(\gamma + 1)(n + 1)$ rispetto ad $\mathbf{U}_\alpha^g \cap \mathbf{V}_\beta^l$).

Geometria algebrica. — *Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geq 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7$. Nota I di POL BURNIAT, presentata (*) dal Socio S. SEGRE.*

I. Per le superficie algebriche col sistema canonico $|k_0|$ irriducibile e il genere geometrico $p_g \geq 3$, sono note la disuguaglianza di Noether

$$p^{(1)} \geq 2p_g - 3$$

e, quando inoltre il sistema $|k_0|$ risulti semplice, la disuguaglianza di Castelnuovo ⁽¹⁾

$$p^{(1)} \geq 3p_g - 6.$$

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) Osservazioni intorno alla geometria sopra una superficie, « Rend. Ist. Lombardo », ser. II, vol. XXIV (1891).

Confini superiori di $p^{(1)}$ sono poi stati dati da Rosenblatt ⁽²⁾ e Severi ⁽³⁾. Recentemente, Zappa ⁽⁴⁾ ha proposto come probabile la relazione

$$p^{(1)} \leq 8 p_a + 10.$$

In una Nota in corso di stampa, Marchionna ⁽⁵⁾, per le superficie irregolari di genere aritmetico $p_a \geq 0$, ha dato la relazione

$$p^{(1)} \leq 11 p_a + 17.$$

Non si conosceva finora pressoché nulla sui valori effettivamente raggiunti da $p^{(1)}$ per p_g dato. Nel caso $p_g = 4$, tuttavia, alcuni modelli di genere $p^{(1)} \leq 33$ erano stati costruiti ⁽⁶⁾.

Ora ci proponiamo di stabilire alcuni risultati che permettono, fra l'altro, di affermare che:

Per $p_g \geq 4$ qualunque, esistono superficie algebriche regolari per tutti i valori $p^{(1)} = 2 p_g - 3, 2 p_g - 2, \dots, 8 p_g + 7$ del genere lineare. Questa proprietà cade forse in difetto per $p^{(1)} = 8 p_g + 2$ quando p_g prende certi valori pari.

Nella presente Nota, stabiliremo questa proposizione per i valori $p^{(1)} = 2 p_g - 3, \dots, 4 p_g - 3$; i valori restanti verranno considerati in una Nota successiva.

2. I modelli che ci proponiamo di costruire sono piani quadrupli abeliani. Richiamiamo alcune proprietà di queste superficie ⁽⁷⁾.

Un piano quadruplo abeliano $F^0 = 4 F$ di sostegno F viene caratterizzato da tre curve algebriche di diramazione E_1, E_2, E_3 . Il piano $4F$ porta una involuzione I d'ordine 4, composta con tre involuzioni I_r d'ordine due a due a due permutabili. Il piano F ed il piano doppio $2F$, provvisto della curva di diramazione $E_s + E_t$, sono superficie F^0/I e F^0/I_r , $r \neq s \neq t = 1, 2, 3$.

Ad un ente geometrico X di F corrisponde sopra $4F$ un ente, composto con I , che conveniamo di designare con X^0 . La curva U_r dei punti uniti di I_r viene data dalla relazione

$$2 U_r = E_r^0, \quad \text{ossia} \quad U_r = \frac{1}{2} E_r^0.$$

(2) *Sur quelques inégalités dans la théorie des surfaces algébriques*, «C. R. Ac. des Sc.», Paris, p. 1494 (1912).

(3) *Osservazioni a proposito di una Nota di E. Kähler*, «Rend. Circ. mat. di Palermo», p. 79 (1932).

(4) *Sopra una probabile disegualianza fra i caratteri invariantivi di una superficie algebrica*, «Rend. di Matem.», serie V, vol. XIV, fasc. 1-2 (1955).

(5) *Sopra una relazione fra i generi di una superficie algebrica irregolare*, «Rend. dei Lincei», Roma, dicembre 1957.

(6) Per $p^{(1)} = 6, \dots, 9$, cfr. F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli ed. 1949, pp. 268-284. Per $p^{(1)} = 10$, L. GODEAUX, *Construction d'une surface canonique du neuvième ordre*, «Bull. Acad. royale de Belgique», pp. 202-212 (1945). Per $p^{(1)} = 11, \dots, 33$, POL BURNIAT, *Sur quelques théorèmes d'existence à propos des surfaces algébriques*, «Bull. Acad. royale de Belgique», pp. 101-106 (1958).

(7) Per particolari, ved. per esempio, P. BURNIAT, *Superficie algebriche ottuple canoniche di genere geometrico qualunque*, «Rend. dei Lincei», Marzo 1954, pp. 326-331.

È noto che la curva di diramazione di un pianto doppio ammette curve che ne sono metà lineari. Scriviamo dunque $2e_r \equiv E_s + E_t$, $r \neq s \neq t = 1, 2, 3$. Si trova agevolmente che: $e_r^\circ = U_s + U_t$.

Tra i sistemi canonici impuri $|k_0|$ e $|k|$ di $4F$ intercede la relazione di Enriques-Castelnuovo $k_0 \equiv k^\circ + U_1 + U_2 + U_3 = k^\circ + U$, $U = U_1 + U_2 + U_3$. Ciò premesso, facciamo alcune osservazioni.

1° Da ciò che precede si deduce senza difficoltà che: il sistema $|k_0|$ risulta combinazione lineare di quelli fra i sistemi lineari di curve $(1/2)E_r^\circ + |e_r'|_0$ che sono effettivi. Sia q_r la dimensione del sistema (completo) $|e_r'|$. Il genere p_g di $4F$ viene dato dalla formola $p_g = q_1 + q_2 + q_3 + 3$, sotto la condizione di attribuire dimensione -1 a un sistema non effettivo di curve.

Il grado virtuale di una $k_0 \equiv (1/2)E_r^\circ + (e_r')^\circ$ di $4F$ uguaglia quello delle curve

$$E_r + 2e_r' \equiv E_r + E_s' + E_t' \equiv E'', \quad E = E_1 + E_2 + E_3$$

del piano F (si dimostrerebbe facilmente che $(E'')^\circ$ risulta una curva bicanonica). Se ne trae $p^{(1)} = E'' \cdot E'' + 1$.

2° Il sistema $|k_0|$ risulta certamente irriducibile, e quindi puro, quando sono effettivi, senza parte comune e non composti con le curve di uno stesso fascio almeno due sistemi $(1/2)E_r + |e_r'|^\circ$.

3° Le tre curve $U_r = (1/2)E_r^\circ$ non sono composte con una stessa involuzione I_s . Da ciò si ricava (in generale) la semplicità del sistema $|k_0|$ quando sono effettivi i tre sistemi $(1/2)E_r^\circ + |e_r'|^\circ$.

4° Un punto P , triplo per la curva E e semplice per le curve E_r , non ha influenza sui sistemi $|e_r'|$, ma impone un punto base semplice al sistema $|E''|$. L'acquisizione di un tal punto non cambia p_g , ma diminuisce $p^{(1)}$ di una unità.

5° Dal punto di vista invariante, un punto A che sia a_r -plo per la curva E_r , $r = 1, 2, 3$, cremonicamente considerato, deve essere preso come componente di E_r quando gli interi $a_r + a_s$, $a_r + a_t$ sono dispari.

Designeremo col simbolo $C_n(\Sigma A_i^{a_i})$ una curva del piano F che sia di ordine n ed abbia i punti a_i -pli assegnati A_i , con $A-B$ il grado virtuale d'intersezione di due curve A, B .

3. *Esistono superficie regolari col sistema canonico irriducibile, aventi il genere lineare.*

$$p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 3p_g - 6^{(8)}$$

per tutti i valori di $p_g \geq 4$.

Poniamo

$$r = 2 + 2t + e, \quad e = 0, 1, \quad t \geq s \geq 0.$$

(8) Castelnuovo ha determinato l'intera famiglia delle superficie per le quali $p_a = p_g$, $p^{(1)} = 3p_g - 6$; cfr. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, cit., p. 298.

Consideriamo un piano quadruplo $4F$ provvisto delle curve di diramazione

$$E_1 = C_{2r+2-2s}(X^{2r-1-2s}) \quad , \quad E_2 = C_{2s+2}(X^{2s+1}) \quad , \quad E_3 = C_{2s+2}(X^{2s+1}).$$

Queste danno (n. 2):

$$(I) \quad e'_1 \equiv C_{2s-1}(X^{2s}) \quad , \quad e'_2 \equiv e'_3 \equiv C_{r-1}(X^{r-1}) \quad , \quad E'' \equiv C_{2r+2s}(X^{2r+2s-1})$$

e quindi (n. 2, 1°):

$$q_1 = -1 \quad , \quad q_2 = q_3 = r-1 \quad , \quad p_g = \sum q_i + 3 = 2r,$$

$$p^{(1)} = E'' \cdot E'' + 1 = 4r + 4s = 2p_g + 4s.$$

Prendendo $s = 0, 1, \dots, t$, si ottengono i valori

$$p^{(1)} = 2p_g, p^{(1)} = 2p_g + 4, \dots, p^{(1)} = 2p_g + 4t,$$

cioè, poiché

$$4t = 2r - 4 - 2e = p_g - 4 - 2e,$$

certamente i valori

$$p^{(1)} = 2p_g, 2p_g + 4, \dots, 3p_g - 6.$$

Ora si ha $|E_1| \supseteq |C_4(X)|$, $E_2 \cdot E_3 = 4s + 3 \geq 3$, e il sistema $|C_4(X)|$ risulta ∞^{13} . Si può dunque scegliere una curva E_1 che passi per $n = 1, 2, 3$ dei punti doppi della curva $E_2 + E_3$, cioè dare n punti tripli alla curva E corrispondente. Otteniamo così (n. 2, 4°) piani quadrupli $4F$ che possiedono i generi

$$p_g = 2r \geq 4 \quad , \quad p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 3p_g - 6.$$

Il sistema canonico $|k_0|$ di $4F$ è la combinazione lineare dei sistemi di curve $(1/2)E_2^\circ + |e'_2|^\circ$, $(1/2)E_3^\circ + |e'_3|^\circ$ (n. 2, 1°). Sulla base del n. 2, 3° si verifica senza difficoltà l'irriducibilità di $|k_0|$. I generi sopra dati risultano quindi puri.

Sia a una retta generica del piano F . Si ha $a \cdot E = a \cdot (E_1 + E_2 + E_3) = 2r + 2s + 6$, e la curva a° del piano quadruplo $4F$ possiede il genere

$$w = 4(0 - 1) + 2r + 2s + 6 + 1 = 2r + 2s + 3.$$

Dalla struttura del sistema canonico di $4F$ si ricava agevolmente che il sistema delle curve aggiunte di a° risulta combinazione lineare di quelli fra i sistemi $(1/2)E_r^\circ + |(a + e_r)'|^\circ$ che sono effettivi. Attualmente, le parti variabili di questi sistemi sono $|C_{2s}(X^{2s})|$, $|C_r(X^{r-1})|^\circ$, $|C_r(X^{r-1})|^\circ$, posseggono le dimensioni $2s, 2r, 2r$. Il sistema di quelle aggiunte risulta ∞^n con $n = 2s + 4r + 2$, e taglia sopra a° una serie lineare di dimensione $n - p_g = w - 1$, cioè la serie canonica completa. Viene così stabilita la regolarità delle superficie $4F$ considerate (teorema di Picard).

Occupiamoci ora di $p_g \geq 4$ impari. La dimostrazione si svolge in modo analogo.

Partiamo dalle curve di diramazione

$$E_1 = C_{2r+2-2s}(X^{2r-1-2s}) \quad , \quad E_2 = X_{2s+2}(X^{2s+1}) \quad , \quad E_3 = C_{2s+4}(X^{2s+3}) ,$$

le quali danno

$$e'_1 \equiv C_{2s}(X^{2s+1}) \quad , \quad e'_2 \equiv C_r(X^r) \quad , \quad e'_3 \equiv C_{r-1}(X^{r-1}) \quad , \quad E'' \equiv C_{2r+2s+2}(X^{2r+2s+1}) ,$$

$$q_1 = -1 \quad , \quad q_2 = r \quad , \quad q_3 = r-1 \quad , \quad p_g = \sum q_i + 3 = 2r + 1 ,$$

$$p^{(1)} = E'' \cdot E'' + 1 = 2p_g + 2 + 4s .$$

Facciamo ancora $s = 0, 1, \dots, t$ e ragioniamo come sopra. Otterremo superficie col genere lineare

$$p^{(1)} = 2p_g + 2, 2p_g + 6, \dots, 3p_g - 2 .$$

Ora si ha $E_2 \cdot E_3 \geq C_2(X) \cdot C_4(X^3) \geq 5$ e $|E_1| \supset |C_3|$. Il sistema lineare $|E_1|$ risulta almeno ∞^9 , e si può quindi prendere in esso una curva E_1 che passi per $n = 1, 2, \dots, 5$ fra i punti doppi della curva $E_2 + E_3$ (e che non contenga E_2). Si vede subito che abbiamo così piani quadrupli, 4 F, possedenti il genere lineare

$$p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 3p_g - 6 .$$

La irriducibilità del sistema canonico e la regolarità delle superficie 4 F considerate si stabiliscono come sopra (n. 3), e con ciò la nostra proposizione risulta dimostrata.

4. *Esistono superficie regolari col sistema canonico irriducibile e semplice, aventi il genere lineare*

$$p^{(1)} = 3p_g - 6, 3p_g - 5, \dots, 4p_g - 3 ,$$

per tutti i valori del genere geometrico $p_g \geq 4$.

Distingueremo ancora i due casi $p_g = 2r$ e $p_g = 2r + 1, r \geq 3$.

Posto $r = 2s + e, e = 0, 1, s \geq 1$, consideriamo il triplo delle curve di diramazione

$$(I) \quad E_1 = C_{2r-2s}(X^{2r-2s-2}) \quad , \quad E_2 = C_{2s+2}(X^{2s}) \quad , \quad E_3 = C_4(X^2) ;$$

queste forniscono

$$e'_1 \equiv C_s(X^s) \quad , \quad e'_2 \equiv C_{r-s-1}(X^{s-r-1}) \quad , \quad e'_3 \equiv C_{r-2}(X^{r-2}) ,$$

$$q_1 = s \quad , \quad q_2 = r - s - 1 \quad , \quad q_3 = r - 2 \quad , \quad p_g = \sum q_i + 3 = 2r ,$$

$$E'' \equiv C_{2r}(X^{2r-2}) \quad , \quad p^{(1)} = E \cdot E'' + 1 = 8r - 4 + 1 = 4p_g - 3 .$$

L'irriducibilità e la semplicità dei sistemi canonici delle superficie 4 F corrispondenti, nonché la regolarità di queste ultime, si verificano come sopra.

I sistemi lineari completi $|E_2|$ e $|E_2| - E_3$ sono rispettivamente ∞^{6s+5} ed ∞^{2s-2} . C'è quindi un sistema lineare, $|E_2^*|$, ∞^{4s+6} di curve E_2 , nessuna delle quali contiene la curva E_3 (1). Poiché $E_2 \cdot E_3 = 4s + 8$, così $|E_2^*|$ taglia sopra E_3 una serie lineare g_{5s+8}^{4s+6} che risulta completa (E_3 è di genere 2).

Prendiamo $r = 2s$ ($e = 0$). Si ha $p_g + 3 = 4s + 3$, $E_1 = C_{2s}(X^{2s-2})$. Il sistema $|E_2^*| - E_1 = |C_2(X^2)|$ possiede la dimensione 2. Esiste quindi un sistema, $|E_2^{**}|$, ∞^{4s+3} di curve E_2^* , nessuna delle quali contiene E_1 . D'altra parte, $E_1 \cdot E_2 = 4s + 4$. Si può dunque trovare una curva E_2 passante per esattamente $n = 1, 2, \dots, 4s + 3$ dei $4s + 8$ punti della curva $E_1 + E_3$ (altrimenti le curve E_2^* , che passassero per uno ulteriore di questi punti, taglierebbero sopra E una serie g_{4s+7-n}^{4s+6-n} , il che è assurdo).

Possiamo pertanto scegliere una curva E_2 in guisa che la curva E corrispondente venga ad avere n punti tripli. Questo implica per $e = 0$ l'esistenza di superficie $4F$ dei generi $p_g = 2r$, $p^{(1)} = 4p_g - 3, 4p_g - 4, \dots, 3p_g - 6$.

Per $e = 1$, abbiamo $r = 2s + 1$, $p_g + 3 = 4s + 5$, $E_1 = C_{2s+2}(X^{2s}) \equiv E_2$. Il sistema $|E_2^{**}|$ di curve E_2 nessuna delle quali contiene E_1 od E_3 risulta ora ∞^{4s+5} , e la curva $E_1 + E_3$ viene ad acquistare $4s + 8$ punti doppi. La curva E può conseguentemente possedere $4s + 5$ punti tripli e la proposizione viene così dimostrata per $p_g = 2r$, $e = 0, 1$.

Prendiamo infine le curve di diramazione

$$E_1 = C_{2r-2s+1}(X^{2r-2s-1}) \quad , \quad E_2 = C_{2s+3}(X^{2s+1}) \quad , \quad E_3 = C_3(X).$$

Queste dànno

$$e'_1 \equiv C_s(X^s) \quad , \quad e'_2 \equiv C_{r-s-1}(X^{r-s-1}) \quad , \quad e'_3 \equiv C_{r-1}(X^{r-1}),$$

$$q_1 = s \quad , \quad q_2 = r - s - 1 \quad , \quad q_3 = r - 1 \quad , \quad p_g = \sum q_i + 3 = 2r + 1.$$

$$E'' = C_{2r+1}(X^{2r-1}) \quad , \quad p^{(1)} = E'' \cdot E'' + 1 = 8r + 1 = 4p_g - 3.$$

Le superficie corrispondenti sono ancora regolari, ed i loro sistemi canonici risultano irriducibili e semplici, il che si verifica senza difficoltà come sopra.

Attualmente, i sistemi $|E_2|$ e $|E_2| - E_3 = |C_{2s}(X^{2s})|$ sono ∞^{6s+8} e ∞^{2s} . Il sistema $|E_2^*|$ di curve E_2 nessuna delle quali contiene E_3 risulta ∞^{4s+7} e taglia sopra E_3 una serie lineare completa: si ha $E_2 \cdot E_3 = 4s + 8$, onde E_3 è una curva ellittica.

Sia anzitutto $r = 2s$ ($e = 0$). Abbiamo $p_g + 3 = 2r + 4 = 4s + 4$, $E_1 = C_{2s+1}(X^{2s+1})$. Il sistema $|E_2^*| - E_1 = |C_2(X^2)|$ possiede la dimensione 2. V'è dunque un sistema lineare $|E_2^{**}|$ ∞^{4s+4} di curve E_2 nessuna delle quali contiene E_1 . Da ciò si ricava l'esistenza di almeno una curva E_2 passante per esattamente $n = 1, 2, \dots, 4s + 4$ dei $4s + 8$ punti doppi della curva $E_1 + E_3$. Alle curve di diramazione così ottenute corrispondono superficie $4F$ rispettivamente di genere lineare $p^{(1)} = 4p_g - 3, 4p_g - 4, \dots, 3p_g - 6$.

Questa conclusione si mantiene quando si assuma $r = 2s + 1$ ($e = 1$). In questo caso si ha $p_g + 3 = 2r + 4 = 4s + 6$, $E_1 = C_{2s+3}(X^{2s+3}) \equiv E_2$. Il sistema $|E_2^{**}|$ risulta ∞^{4s+6} , e si può scegliere una curva E_2 passante per esattamente $n = 1, 2, \dots, 4s + 6$ dei $4s + 8$ punti doppi della curva $E_1 + E_3$.

La proposizione enunciata in principio del numero risulta così completamente stabilita.

Dinamica dei fluidi. — *Applicazione al flusso supersonico del problema di Cauchy per un'equazione ellittica.* Nota (*) di PAUL R. GARABEDIAN, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Consideriamo un'onda d'urto staccata S la quale alteri una corrente supersonica uniforme e la trasformi in un flusso di gas stabile, rotazionale e possibilmente subsonico. Limitiamoci a considerare il problema in due sole dimensioni, talché il flusso debba essere piano oppure dotato di simmetria assiale. Il flusso può allora essere rappresentato da una funzione ψ che dipende da due coordinate x ed y soddisfacente ad un'equazione differenziale quasi lineare alle derivate parziali del secondo ordine:

$$(1) \quad a\psi_{xx} + 2b\psi_{xy} + c\psi_{yy} + d = 0.$$

Vogliamo considerare il problema della determinazione del flusso dietro l'onda d'urto S , nel caso in cui quest'ultima sia prescritta. Le condizioni di urto lungo S forniscono ivi i dati di Cauchy per ψ , sotto la forma di certe espressioni elementari nelle coordinate x ed y e nella derivata dy/dx . Dobbiamo così studiare, in effetti, un problema di Cauchy, il quale sarà posto impropriamente, nel senso classico, ove il flusso sia subsonico e $ac - b^2 > 0$. Il nostro scopo è di mostrare come possa essere trattato analiticamente e numericamente un problema di Cauchy di questo tipo per una equazione differenziale ellittica alle derivate parziali in due variabili indipendenti.

Nel secondo volume di Courant-Hilbert è descritto un procedimento per esprimere un'equazione differenziale quasi-lineare alle derivate parziali del secondo ordine in coordinate caratteristiche. Nel caso ellittico questo procedimento può essere utilizzato per trasformare la (1) in un sistema di cinque equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine in cinque incognite e tali che le derivate di ordine massimo vi appaiono esclusivamente in taluni Laplaciani. Per quanto riguarda quindi la comprensione del nostro metodo di trattazione del problema di Cauchy relativo ad una equazione ellittica, non perderemo in generalità considerando invece della (1) l'equazione più semplice

$$(2) \quad \Delta\psi = \psi^2.$$

Potremo così presentare tutte le difficoltà e le idee essenziali in una esposizione scevra delle ingombranti formule che si impiegano nella dinamica dei gas.

(*) Da una conferenza tenuta il 5 febbraio 1958 all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

Consideriamo, dapprima, i dati di Cauchy per la (2) lungo l'asse delle y :

$$(3) \quad \psi(0, y) = f(y) \quad , \quad \psi_x(0, y) = g(y).$$

Sappiamo che il problema ha una soluzione valida per valori di x opportunamente limitati, purché le funzioni date f e g siano analitiche.

La soluzione ψ è allora anche essa analitica, dal che consegue che essa avrà significato sia per valori complessi $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$ degli argomenti, che per valori reali. La continuazione analitica di ψ che può essere introdotta in tal modo deve ancora soddisfare le condizioni iniziali (3) in una regione del piano complesso y , poiché tali condizioni sono in effetti identità valide per $x = 0$. Il campo delle validità delle (3) nel piano y è precisamente la intersezione dei campi di regolarità della due funzioni analitiche date $f(y)$ e $g(y)$.

Consideriamo ora di nuovo l'equazione differenziale ellittica alle derivate parziali (2) soddisfatta da ψ , la quale è parimenti una identità valida per valori complessi di x ed y . Limitiamo la nostra attenzione al caso in cui x sia reale ed $y = y_1 + iy_2$ sia complesso con y_1 fissato. Ci mettiamo dunque in uno spazio tridimensionale con le coordinate cartesiane reali x, y_1, y_2 . Avendo fissato y_1 potremo scrivere la derivata parziale $\partial^2 \psi / \partial y^2$, che si presenta nella (2), nella forma $-\partial^2 \psi / \partial y_2^2$, poiché ψ deve obbedire alle equazioni di Cauchy-Riemann, quale funzione analitica di $y = y_1 + iy_2$. Ne segue che ψ soddisfa alla equazione differenziale iperbolica alle derivate parziali rispetto alle due variabili reali indipendenti x ed y_2

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2} = \psi^2.$$

Bisogna ricordare, ora, che la soluzione ψ assume in generale valori complessi per $y_2 \neq 0$.

Vediamo, dunque, che nella estensione analitica ora descritta, per ogni fissato valore del parametro y_1 la funzione ψ soddisfa la equazione iperbolica (4) e, se $x = 0$, le condizioni iniziali (3). A tale situazione si possono applicare le costruzioni usuali della soluzione del problema di Cauchy nel caso iperbolico. In particolare se per un dato valore di y_1 le continuazioni analitiche delle funzioni prescritte $f(y)$ e $g(y)$ sono definite in un intervallo $-h < y_2 < h$, allora la soluzione della (4) esiste, per il valore fissato di y_1 , nel triangolo del piano (x, y_2) delimitato dal segmento iniziale e dalle linee

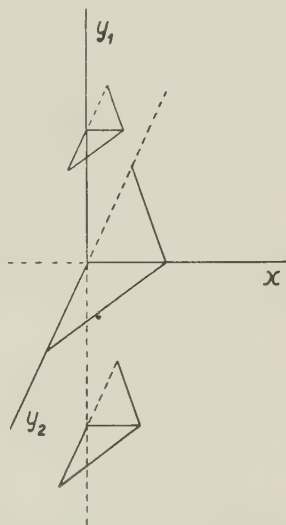


Fig. 1.

caratteristiche $x \pm y_2 = h$, a parte le difficoltà che possono sorgere dalla non-linearità del termine al secondo membro della (4).

Da tale costruzione possiamo concludere che, a parte le ovvie restrizioni imposte dalla non-linearità del problema, il comportamento analitico nel piano reale (x, y_1) della soluzione ψ del problema di Cauchy per la equazione ellittica (2) è identico a quello della continuazione dei dati $f(y)$ e $g(y)$ nel piano complesso y . E precisamente, le singolarità della soluzione si trasformano in quelle dei dati per mezzo della corrispondenza $x \longleftrightarrow y_2, y_1 \longleftrightarrow y_1$, e le singolarità così messe in relazione sono di natura simile. In particolare, la condizione di esistenza in grande della soluzione del problema di Cauchy per una equazione ellittica è che i dati iniziali possano essere continuati in grande nel campo complesso, e, una volta che tale continuazione è stata effettuata, la soluzione può essere ottenuta per mezzo della integrazione di equazioni iperboliche, ad esempio col metodo delle differenze finite.

Consideriamo, ora, il caso in cui la curva S portante i dati iniziali sia data da una equazione analitica più generale

$$(5) \quad F(x, y) = 0,$$

ma in cui i dati di Cauchy lungo la S coinvolgono solo certe espressioni elementari nelle coordinate x ed y . Consideriamo dapprima il caso

$$(6) \quad F(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

nel quale S è una iperbole equilatera. Se supponiamo che x sia reale e poniamo $y_1 = 0$, tale curva diviene il cerchio di raggio unitario $x^2 + y_2^2 = 1$ nel piano (x, y_2) . Così le caratteristiche della (4) sono tangenti alla curva iniziale nei punti $\pm y_2 = x = 2^{-1/2}$. Ne segue che, oltre questi punti, la soluzione del nostro problema di Cauchy non è univocamente determinata ed ha, in effetti, due valori. Le due caratteristiche, tangenti alla curva iniziale nel piano (x, y_2) si intersecano nel piano reale (x, y_1) nel punto $x = 2^{1/2}, y = 0$. Questo è precisamente il fuoco dell'iperbole (6) ed ivi la soluzione deve presentare una diramazione.

L'esempio precedente mostra come si possano determinare la natura e la posizione delle singolarità del nostro problema ellittico di Cauchy nel caso di una curva iniziale (5) definita generalmente in modo analitico. In effetti risulta già dalla analisi finora illustrata che la natura e la posizione delle singolarità di ψ dipendono solo dai dati iniziali e dalle caratteristiche e non dalla forma del secondo membro della equazione differenziale (2). Basterà, quindi, studiare l'equazione di Laplace. Nel caso presente, però, risulta che la soluzione del nostro problema di Cauchy può essere determinata esplicitamente in termini finiti, com'è ben noto.

Per corroborare quest'ultima affermazione, poniamo $z = x + iy$, e $z^* = x - iy$, eseguiamo questa sostituzione di variabili nella (5) e risolviamo

rispetto a z^* , esprimendola in funzione di z : otterremo così l'equazione della curva iniziale S nella forma

$$z^* = G(z).$$

È possibile, ora, scrivere le condizioni iniziali a mezzo di date espressioni elementari in z ed in $G(z)$, poiché queste condizioni coinvolgevano solo espressioni elementari in x ed y e, quindi, in z e z^* . In particolare, $\partial\psi/\partial z = (1/2)(\partial\psi/\partial x - i\partial\psi/\partial y)$ sarà una certa funzione elementare

$$(8) \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = E(z, G(z)),$$

di z e di $G(z)$ lungo la S . Ma poiché la nostra equazione differenziale alle derivate parziali relativa a ψ è ora semplicemente l'equazione di Laplace, la funzione $\partial\psi/\partial z$ è una funzione analitica di z . In conseguenza secondo i principi della continuazione analitica le due funzioni analitiche $\partial\psi/\partial z$ ed E , che coincidono lungo la curva S secondo la (8), devono essere identiche per qualunque valore di $z = x + iy$. Ne segue immediatamente che la soluzione ψ del nostro problema di Cauchy è data esplicitamente dall'espressione

$$(9) \quad \psi = 2 \operatorname{Re} \left\{ \int E(z, G(z)) dz \right\},$$

la quale è regolare ovunque, eccetto che in corrispondenza delle singolarità di $G(z)$.

È istruttivo studiare il caso particolare (6) dell'iperbole equilatera impiegando il nostro nuovo metodo basato sulla introduzione della funzione analitica $G(z)$. Poiché $x^2 - y^2 = (z^2 + z^{*2})/2$, l'equazione (6) implica l'altro $z^2 + z^{*2} = 2$, per cui la (7) assume la forma

$$(10) \quad z^* = (2 - z^2)^{1/2},$$

con $G(z) = (2 - z^2)^{1/2}$. G presenta quindi ramificazioni in corrispondenza dei fuochi $z = \pm 2^{1/2}$ dell'iperbole (10) e questi fuochi sono, in effetti ramificazioni della soluzione (9) del nostro problema di Cauchy.

Abbiamo dunque dimostrato che per l'equazione di Laplace le singolarità della soluzione del nostro problema di Cauchy coincidono sia per la natura che per la posizione con quelle della funzione $G(z)$, che definisce la curva S . Dalla teoria della equazione ellittica generale sopra delineata possiamo dedurre la conseguenza che lo stesso risultato è corretto per qualsiasi equazione lineare o sistema di equazioni lineari in cui le derivate di ordine massimo appaiono solo in Laplaciani. Per la equazione differenziale alle derivate parziali (1) della dinamica dei gas la conclusione non è completamente valida, poiché le caratteristiche, che sono sicuramente complesse per un flusso subsonico, dipendono dalla soluzione. Tuttavia quanto precede fornisce un eccellente quadro approssimato di ciò che avviene nelle regioni prossime al ristagno, poiché i coefficienti a , b e c , che determinano le carat-

teristiche, sono in tali regioni rispettivamente quasi uguali a 1, 0 e 1. Per quanto riguarda il flusso in regime trasonico, naturalmente, la nostra discussione ha un valore puramente qualitativo.

Possiamo ora indicare brevemente come dovrebbe essere scelta una onda d'urto S , onde fornisca, secondo il nostro metodo inverso, una buona approssimazione del flusso nell'intorno di un dato ostacolo. La frontiera dell'ostacolo che genera il flusso supersonico attraverso l'onda d'urto S si ricava, naturalmente, come la curva di livello $\psi = 0$ della soluzione ψ del problema di Cauchy per l'equazione (1) della dinamica dei gas che ci ha condotti nella presente discussione. Normalmente la considerazione di un dato ostacolo in regime di flusso subsonico mostrerà, attraverso il metodo delle immagini, che la funzione di corrente ψ è affetta da singolarità in certi punti. Presso il vertice di un naso conico, ad esempio, ψ dipenderà da una certa potenza frazionaria della distanza dal vertice, mentre per il flusso nei pressi di una sfera ogni singolarità di ψ si troverà all'interno dell'ostacolo. Dovremmo così tentare di ottenere i flussi in corrispondenza di dati ostacoli scegliendo l'onda d'urto S in modo tale che le singolarità di ψ si trovino approssimativamente in determinati campi. Ciò si può fare, in base alla nostra analisi, scegliendo l'equazione (7) dell'onda d'urto in modo tale che la funzione analitica $G(z)$ abbia le singolarità desiderate.

In generale la tecnica che abbiamo descritto non è abbastanza specifica da risultare del tutto soddisfacente. In pratica si dovrà scegliere un'onda d'urto che abbia le caratteristiche generali corrette, ma che dipenda da un numero di parametri ausiliari sufficiente ad alimentare la speranza di raggiungere l'approssimazione richiesta per mezzo di ulteriore sperimentazione. Ciò è stato già fatto per una certa varietà di numeri di Mach e di forme di ostacoli ed una selezione dei risultati numerici ottenuti sarà pubblicata prossimamente nel testo di un articolo compilato in collaborazione dallo scrivente e da H. M. Lieberstein, che apparirà nel « Journal of the Aeronautical Sciences ». Questi dati furono ottenuti utilizzando un programma per la calcolatrice elettronica ERA 1103A presso la Ramo-Wooldridge Corporation a Los Angeles. Un programma simile è attualmente in funzione sulla calcolatrice NORC a Dahlgren, Virginia. Tali programmi dimostrano che le idee qui brevemente delineate possono essere organizzate in uno schema pratico e veloce per una soluzione numerica molto accurata del problema dell'onda d'urto staccata.

È necessario, infine, sottolineare la circostanza che esistono difficoltà essenziali alla generalizzazione del metodo discusso qui, onde dominare anche il caso di tre variabili indipendenti. La causa di ciò è che ci siamo giovati in modo essenziale di nozioni prese a prestito dalla teoria delle rappresentazioni conformi e dalla teoria di Lewy delle coordinate caratteristiche. Così i problemi di flusso supersonico in corrispondenza di ostacoli, che non siano dotati da simmetria assiale, non potranno essere trattati.

Idrodinamica. — *Sopra la potenza erogata in moto vario da correnti liquide entro tubi elastici.* Nota di GIUSEPPE EVANGELISTI, presentata (*) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. Si abbia, come nella fig. 1, una condotta idraulica in pressione, nelle schematizzazioni strutturali e funzionali della teoria classica del colpo di ariete: la condotta è percorsa da una corrente liquida priva di attriti, con efflusso libero nell'atmosfera attraverso un ugello terminale munito di intercettatore mobile.

È stato riconosciuto da tempo che all'atto in cui la corrente entra in moto vario per effetto di una manovra dell'intercettatore la portata uscente

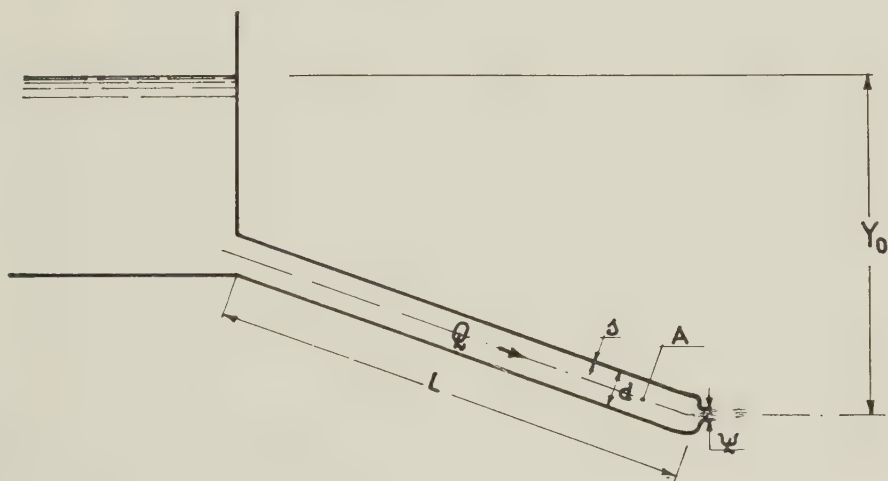


Fig. 1.

varia sempre in verso concorde alla manovra, e la pressione subito a monte dell'ugello in verso opposto. La potenza erogata, che negli impianti d'energia è la grandezza dominante, può variare in verso concorde o discorde in dipendenza del regime permanente di partenza; e la seconda possibilità fu accolta con meraviglia, e ritenuta paradossale, dagli Autori — come L. Allievi e R. Löwy — che la riscontrarono per primi.

Un'indagine più rigorosa e specifica di quanto siano le usuali impostazioni tecniche mette in luce l'intimo meccanismo del fenomeno (che non ha niente di paradossale) e ne individua i parametri influenti in certi rapporti energetici che caratterizzano le correnti in pressione nei tubi elastici.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

2. Le caratteristiche di struttura di un tubo contenente un liquido sono la lunghezza L , la sezione trasversale A , la celerità delle onde elastiche a : quest'ultima è fornita, se il tubo è circolare, dall'espressione:

$$(1) \quad a = \frac{a_0}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E} \frac{d}{s}}}$$

dove è a_0 la velocità del suono nel liquido, ε il modulo di comprimibilità cubica del liquido, E, d, s , rispettivamente il modulo di Young, il diametro e lo spessore delle pareti (supposte sottili).

Il regime stazionario sotto indagine è caratterizzato dalla portata allo sbocco Q_0 e dal valore Y_0 del carico piezometrico Y sulla sezione di sbocco (intesa, questa, come sezione della condotta immediatamente a monte dell'ugello d'efflusso); quindi, da una sezione Ψ' dell'ugello uguale a $Q_0 / \sqrt{2gY_0}$ (g accelerazione di gravità) se Ψ' è sufficientemente piccola rispetto ad A . La potenza P erogata vale, ovviamente, $\gamma Q_0 Y_0$, se γ è il peso specifico del liquido.

Per erogare la potenza P in moto stazionario la condotta deve avere immagazzinato energia sotto forma cinetica e potenziale elastica. Ciascun elemento di condotta contribuisce secondo quella che può chiamarsi la propria «energia specifica», cioè l'energia accumulata per unità di lunghezza di tubo e per unità di potenza erogata. Un calcolo più che ovvio porta a definire le due energie specifiche, cinetica e_c , ed elastica e_p , a mezzo delle formule

$$(2) \quad \begin{cases} e_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{Q}{Y} \\ e_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{a^2} A \frac{Y}{Q} \end{cases}$$

Le due energie specifiche si distribuiscono lungo la condotta con una legge dipendente dalla costituzione del tubo (attraverso i parametri A e a) ed anche dalla variazione del carico Y (in relazione al profilo di posa): l'una e l'altra sono distribuite uniformemente se il tubo è uniforme ed orizzontale. È anche il caso di sottolineare che vale la relazione semplicissima

$$(3) \quad a = \frac{1}{2 \sqrt{e_c e_p}}$$

fra il parametro fondamentale dei fatti propagatori, la celerità, e le energie specifiche.

3. In un generico istante, assunto come origine dei tempi, la condotta entri in moto vario per effetto di una piccola variazione $\Delta\Psi'$ della luce di efflusso, la quale si svolga nell'intervallo di tempo Δt (piccolo dello stesso ordine di $\Delta\Psi'$). Se le variazioni di Q_0, Y_0, P nella sezione di sbocco sono $\Delta Q_0, \Delta Y_0$ e ΔP , vale, con errore piccolo di ordine superiore, la relazione

$$\Delta P = \gamma \{ Q_0 \Delta Y_0 + Y_0 \Delta Q_0 \}$$

che diventa

$$(4) \quad \Delta P = P (\Delta q + \Delta y)$$

se si pone, adimensionalmente,

$$\Delta q = \frac{\Delta Q_0}{Q_0} \quad \Delta y = \frac{\Delta Y_0}{Y_0} \quad \Delta \psi = \frac{\Delta \Psi}{\Psi}.$$

Durante Δt la lunghezza del tronco di tubo interessato, dalla perturbazione aumenta da 0 ad $a \cdot \Delta t$; per tale tronco la potenza entrante resta costantemente eguale alla potenza di regime P , mentre quella uscente varia da P nell'istante 0 fino a $P + \Delta P$ nell'istante Δt . L'energia derivante dallo squilibrio di potenza si accumula nell'elemento: e poiché le attitudini di questo ad accumulare energia sono appunto definite dalle energie specifiche, riesce facile prevedere che la ΔP deve essere interamente dominata dai valori di e_c ed e_p .

La dimostrazione che il fatto sussiste, e le relative determinazioni quantitative, non presentano difficoltà. Basta esprimere nella (4) Δq e Δy in funzione di $\Delta \psi$. Allo scopo, si dispone delle due relazioni

$$\Delta q = \Delta \psi + \frac{1}{2} \Delta y$$

$$\Delta q = -\frac{g}{a} A \frac{Y_0}{Q_0} \Delta y = -\sqrt{\frac{e_p}{e_c}} \Delta y,$$

che sono ovvie conseguenze del teorema di Bernoulli (scritto, in forma linearizzata, per l'ugello di efflusso) e del teorema della quantità di moto.

Si ottiene

$$\Delta q = \frac{1}{1 + a e_c} \Delta \psi$$

$$\Delta y = \frac{-2}{1 + 4 a e_p} \Delta \psi$$

così che la (4) diventa

$$(5) \quad \Delta P = P \frac{\sqrt{\frac{e_p}{e_c}} - 1}{\sqrt{\frac{e_p}{e_c}} + \frac{1}{2}}.$$

Dunque, il rapporto fra le due energie specifiche è l'elemento decisivo della variazione iniziale di potenza, allo stesso modo che il loro prodotto determina, secondo la (3), il valore della celerità. In particolare, la (5) afferma che la potenza varia in verso concorde a quello della manovra se la componente elastica prevale su quella cinetica, nel verso opposto nel caso contrario.

4. Interessa considerare, nel riguardo delle energie specifiche, le diverse situazioni di regime permanente. Dato che Y resta, per ipotesi, costante, e la potenza erogata P varia proporzionalmente a Q , le (2) rivelano che il

termine cinetico varia proporzionalmente, e quello potenziale elastico in modo inversamente proporzionale, alla potenza P . Gli andamenti delle energie specifiche in funzione della potenza erogata risultano perciò quelli indicati nella fig. 2. Esiste un regime in cui l'energia specifica totale è in grado di minimo, e ciò si verifica quando il termine elastico eguaglia quello cinetico: quando, cioè, si presenta la stessa situazione che divide i due tipi di risposta in sede di moto vario.

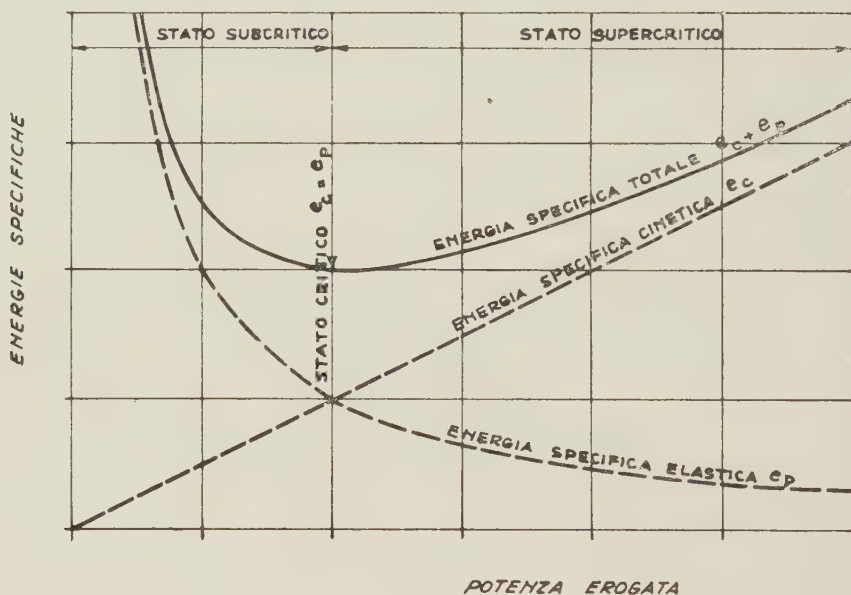


Fig. 2.

Il fenomeno studiato presenta analogia formale con un altro comportamento energetico, relativo alle correnti a superficie libera. Anche per queste correnti, infatti, si definisce un'energia specifica associata al deflusso, somma di un termine cinetico e di un termine potenziale, e si presenta uno « stato critico » quando questa energia passa per un minimo. Procedendo sulla scorta di tale analogia, una condotta forzata elastica per erogazione di potenza potrà dirsi in regime « subcritico » o « supercritico » secondo che, nell'energia specifica totale, prevale il termine potenziale o quello cinetico. Nel primo caso il passaggio da un regime permanente ad altro regime permanente di potenza più elevata implica una diminuzione di energia specifica, nel secondo caso avviene il contrario. A questa diversità di variazioni energetiche connesse con i cambiamenti di regime fanno riscontro i due diversi modi con cui, all'insorgere del moto vario, la potenza erogata risponde alle variazioni di luce d'efflusso.

Cinematica. — *Sull'uso dei quaternioni duali nella cinematica.*

Nota di WILHELM BLASCHKE, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Useremo nel seguito quaternioni con $e_0 = 1$

$$(1) \quad \mathbf{Q} = e_0 q_0 + e_1 q_1 + e_2 q_2 + e_3 q_3$$

colla legge di moltiplicazione

$$(2) \quad e_j e_j = -1; \quad e_j e_k = -e_k e_j = e_l; \quad j, k, l = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2$$

e col « coniugio »

$$(3) \quad \tilde{\mathbf{Q}} = e_0 q_0 - e_1 q_1 - e_2 q_2 - e_3 q_3.$$

Mediante questi quaternioni, secondo Eulero (1776), una rotazione, cioè una sostituzione ternaria ortogonale $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$, può essere rappresentata colla formula

$$(4) \quad \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{x}' \mathbf{Q}$$

con

$$(5) \quad \mathbf{x} = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3, \quad \mathbf{x}' = e_1 x'_1 + e_2 x'_2 + e_3 x'_3$$

e con

$$(6) \quad \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{Q} \mathbf{Q} \rangle = q^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Se $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ dipende dal tempo t , la (4) definisce un « movimento continuo » sferico ad un parametro:

$$(7) \quad \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{x}' \mathbf{Q}(t).$$

Normalizzando i quattro quaternioni $\mathbf{Q}_j(t)$ nella maniera seguente

$$(8) \quad \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}, \quad \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{Q}}_k + \mathbf{Q}_k \tilde{\mathbf{Q}}_j) = \langle \mathbf{Q}_j \mathbf{Q}_k \rangle = \delta_{jk}; \quad j, k = 0, 1, 2, 3$$

col determinante

$$(9) \quad [\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3] = +1,$$

s'ottengono le formule seguenti per i differenziali

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\mathbf{Q}_0 = * + \mathbf{Q}_1 \rho \quad * \quad * \\ d\mathbf{Q}_1 = -\mathbf{Q}_0 \rho \quad * + \mathbf{Q}_2 \sigma \quad * \\ d\mathbf{Q}_2 = * - \mathbf{Q}_1 \sigma \quad * + \mathbf{Q}_3 \tau \\ d\mathbf{Q}_3 = * \quad * - \mathbf{Q}_2 \tau \quad * \end{array} \right.$$

(*) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

Introducendo gli assi canonici

$$(11) \quad \mathbf{p}_j = \tilde{\mathbf{Q}}_0 \mathbf{Q}_j, \quad \mathbf{p}'_j = \mathbf{Q}_j \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{Q}}_0, \quad j = 1, 2, 3$$

con

$$(12) \quad \mathbf{p}_j + \tilde{\mathbf{p}}_j = 0, \quad \langle \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \rangle = \delta_{jk}, \quad [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3] = +1$$

otteniamo le relazioni

$$(13) \quad \begin{cases} d\mathbf{p}_1 = * + \mathbf{p}_2 \lambda * & , & d\mathbf{p}'_1 = * + \mathbf{p}'_2 \lambda' * \\ d\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1 \lambda * + \mathbf{p}_3 \mu * & , & d\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}_1 \lambda' * + \mathbf{p}_3 \mu' * \\ d\mathbf{p}_3 = * - \mathbf{p}_2 \mu * & , & d\mathbf{p}'_3 = * - \mathbf{p}'_2 \mu' * \end{cases}$$

con

$$(14) \quad \lambda = \lambda' = \sigma, \quad \mu = \tau - \rho, \quad \mu' = \tau + \rho.$$

Un punto

$$(15) \quad \mathbf{x} = \mathbf{p}_1 x_1 + \mathbf{p}_2 x_2 + \mathbf{p}_3 x_3$$

è fissato al corpo mobile nel caso delle relazioni

$$(16) \quad \begin{cases} dx_1 = * + \lambda x_2 * \\ dx_2 = -\lambda x_1 * + \mu' x_3 * \\ dx_3 = * - \mu' x_2 * \end{cases}$$

ed il punto

$$(17) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{p}'_1 x'_1 + \mathbf{p}'_2 x'_2 + \mathbf{p}'_3 x'_3$$

è immobile, se

$$(18) \quad \begin{cases} dx'_1 = * + \lambda x'_2 * \\ dx'_2 = -\lambda x'_1 * + \mu x'_3 * \\ dx'_3 = * - \mu' x'_2 * \end{cases}$$

Ne derivano semplicemente le formule della cinematica sferica.

Per il passaggio alla cinematica spaziale conviene l'uso dei numeri « duali »

$$(19) \quad \underline{a} = a + \varepsilon \bar{a}, \quad \varepsilon^2 = 0.$$

Se una retta \underline{r} è definita mediante un suo punto \mathbf{x} ed il vettore unitario della sua direzione \mathbf{r} e se $\bar{\mathbf{r}}$ significa il prodotto vettoriale

$$(20) \quad \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{x} \times \mathbf{r},$$

la retta è caratterizzata dal vettore unitario duale

$$(21) \quad \mathbf{r} + \varepsilon \bar{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}; \quad \langle \underline{\mathbf{r}} \underline{\mathbf{r}} \rangle = 1.$$

Coll'uso di tali vettori l'influsso d'un movimento spaziale sulle rette si può rappresentare mediante un quaternioni duale:

$$(22) \quad \underline{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} + \varepsilon \bar{\mathbf{Q}}, \quad \langle \underline{\mathbf{Q}} \underline{\mathbf{Q}} \rangle = 1$$

con

$$(23) \quad \underline{r} = \tilde{\underline{Q}} \underline{r} \underline{Q}.$$

Mediante questo passaggio dai quaternioni della (4) ai quaternioni duali della (22) le formule della cinematica sferica si trasformano nelle formule corrispondenti della cinematica spaziale coll'uso delle rette come elementi. Per passare dalle rette ai punti e piani basta osservare le relazioni seguenti. Ad un punto si associa un quaternioni duale

$$(24) \quad \underline{X} = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{x}$$

ed ad un piano coll'equazione

$$(25) \quad u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad , \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \mathbf{I}$$

il quaternione

$$(26) \quad \underline{U} = e_1 u_1 + e_2 u_2 + e_3 u_3 + \varepsilon u_0.$$

Allora il movimento (23) cogli elementi punti e piani si scrive così

$$(27) \quad \underline{X} = \tilde{\underline{Q}} \underline{X}' \underline{Q}_\varepsilon \quad , \quad \underline{U} = \tilde{\underline{Q}}_\varepsilon \underline{U}' \underline{Q}$$

ove l'indice ε significa il cambiamento del segno di ε , mentre il circonflesso indica il cambiamento simultaneo del segno di e_1, e_2, e_3 .

Introducendo ora gli assi canonici $\underline{p}_j, \underline{p}'_j$ con le rispettive origini $\underline{k}, \underline{k}'$, e rappresentando un punto \mathbf{x} colle coordinate canoniche

$$(28) \quad \mathbf{x} = \underline{k} + \underline{p}_1 x_1 + \underline{p}_2 x_2 + \underline{p}_3 x_3$$

ossia

$$(29) \quad \mathbf{x}' = \underline{k}' + \underline{p}'_1 x'_1 + \underline{p}'_2 x'_2 + \underline{p}'_3 x'_3$$

il punto x è fissato al corpo mobile, se valgono le condizioni

$$(30) \quad \begin{cases} dx_1 = -\bar{\mu}' & * & + x_2 \lambda & * & , \\ dx_2 = & * & - x_1 \lambda & * & + x_3 \mu' , \\ dx_3 = -\bar{\lambda} & * & - x_2 \mu' & * & . \end{cases}$$

D'altra parte l'immobilità è caratterizzata dalle equazioni

$$(31) \quad \begin{cases} dx'_1 = -\bar{\mu} & * & + x'_2 \lambda & * & , \\ dx'_2 = & * & - x'_1 \lambda & * & + x'_3 \mu , \\ dx'_3 = -\bar{\lambda} & * & - x'_2 \mu & * & . \end{cases}$$

con

$$(32) \quad \underline{\lambda} = \lambda + \varepsilon \bar{\lambda} \quad , \quad \underline{\mu} = \mu + \varepsilon \bar{\mu} \quad , \quad \underline{\mu}' = \mu' + \varepsilon \bar{\mu}'.$$

Dalle (30), (31) seguono in modo semplice i teoremi della cinematica spaziale. Maggiori particolarità si troveranno nelle Note dell'autore in corso di stampa nei rendiconti dell'Università di Buenos Aires, dell'Accademia di Finlandia e del Seminario matematico di Amburgo.

Astronomia. — *Sur la loi linéaire de E. P. Hubble concernant la récession des nébuleuses extragalactiques* (*). Nota di VICTOR VĂLCOVICI, presentata (**) dal Corrisp. B. FINZI.

La loi linéaire de *E. P. Hubble* fixant la dépendance entre le redshift et la distance d'une nébuleuse quelconque a été interprétée de deux manières différentes:

1) en faisant l'hypothèse de l'immobilité des nébuleuses, le redshift étant dû à une cause inconnue;

2) en faisant l'hypothèse de la *récession* générale des nébuleuses extragalactiques, c'est-à-dire, en admettant que chaque nébuleuse possède une vitesse radiale d'éloignement relativement à la Terre, le redshift étant dû dans ce cas à l'effet Doppler.

Le titulaire de cette loi a été enclin dès le commencement à admettre l'explication récessionnelle du redshift. Toutefois dans ses travaux ultérieurs [3], [4], [5] il n'exclue pas la possibilité d'une explication du phénomène dans l'hypothèse de l'immobilité des nébuleuses extragalactiques, et met en discussion comparative les deux hypothèses, sans aboutir, il est vrai, à une conclusion catégorique.

L'intervention de R. C. Tolman [7] et de H. P. Robertson [6] dans la discussion a mis l'accent sur une base relativiste: on cherche un modèle d'univers qui soit compatible avec l'hypothèse de la récession. Un mémoire fondamental dans ce sens, contenant surtout de précieuses données d'observation, est le travail de M. L. Humason et de ses deux collaborateurs [13]. Les auteurs reconnaissent pourtant l'impossibilité de se prononcer pour un des modèles considérés.

En examinant la linéarité de sa loi, à la lumière des données d'observation, *E. P. Hubble* [5] croit y voir une indication en faveur de l'hypothèse de l'immobilité des nébuleuses extragalactiques. C'est, à notre connaissance, l'unique essai scientifique d'arriver à une conclusion catégorique, par suite d'une comparaison entre les résultats de l'observation astronomique et ceux de la théorie.

Dans le présent travail nous sommes arrivé à une conclusion favorable à l'hypothèse de la récession, en nous servant des mêmes données d'observation que *Hubble* dans son travail cité plus haut [5]; seulement nous avons pris comme fondement des calculs l'espace à quatre dimensions de Minkowski. Cette hypothèse ne saurait être trop éloignée de la réalité, étant donné que la valeur que l'on attribue d'habitude à la densité moyenne de la matière est très réduite, donc très voisine de zéro. En outre, cet espace remplit la

(*) Lavoro eseguito nell'Istitut de mathématiques de l'Académie roumaine.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

condition imposée par le « principe cosmologique » – c'est le principe en vertu duquel l'aspect de l'univers serait le même pour deux observateurs A et A' qui seraient liés à deux galaxies quelconques – principe ayant pour but d'éviter un manque d'homogénéité que l'on considère presque inadmissible au point de vue scientifique.

Les calculs, qui d'ailleurs ne sont pas compliqués, conduisent à des résultats numériques en concordance satisfaisante avec les chiffres tirés des observations. Nous avons pris comme base de nos calculs la Relativité spéciale (restreinte).

1. *La loi de Hubble dans les deux cinématiques (newtonienne et relativiste).* – Rapportons la position P d'une nébuleuse extragalactique considérée comme un point matériel, à un système d'axes ayant comme origine le centre O de la Terre. Soit $v(r)$ la vitesse radiale de la nébuleuse P par rapport à ce système d'axes, fonction (définie, continue et dérivable) de la distance r ,

$$r = \text{dist. OP};$$

donc tous les points P situés à la même distance du centre O auront la même vitesse de récession.

Soit P' une autre nébuleuse située sur le même rayon OP, à la distance $OP' = r + dr$ du centre O. En désignant par du la vitesse radiale de P' relativement à P on pourra exprimer la loi de Hubble par la formule

$$(1) \quad du = H dr,$$

H étant la constante de Hubble (paramètre de récession),

$$(2) \quad H = \frac{180 \text{ Km/s}}{10^6 pc}.$$

Cette valeur de H a été dernièrement admise par quelques astronomes, comme étant plus exacte que celles admises antérieurement; Hubble a utilisé dans ses calculs une autre valeur,

$$(2') \quad H = \frac{526 \text{ Km/s}}{10^6 pc}.$$

Ayant à comparer les résultats de nos calculs avec les données numériques de Hubble, nous serons obligés pour l'occurrence à choisir dans les applications numériques cette dernière valeur de H, (2'), lorsqu'il s'agira de les comparer aux résultats obtenus par Hubble.

On déduit de (1) dans l'hypothèse de la cinématique de Newton, la forme intégrale

$$(3) \quad v = Hr', \quad r' = r - a,$$

a étant la distance correspondant à la valeur $v = 0$; c'est une quantité que l'on néglige d'habitude dans les applications en la considérant englobée dans la « correction locale ». On aura donc

$$(4) \quad v = Hr,$$

la forme linéaire connue qui régit le phénomène de récession. Nous la mettrons aussi sous la forme

$$(5) \quad \beta = r/r_0,$$

avec les notations

$$(6) \quad \beta = v/c, \quad r_0 = c/H,$$

c représentant, comme d'habitude, la vitesse de la lumière dans le vide. La quantité r_0 représente la distance à laquelle devrait se trouver une nébuleuse pour avoir, conformément à la formule (5), une vitesse de récession égale à c . E. P. Hubble accorde une importance spéciale à cette grandeur ([5], p. 41). D'après ses calculs on aurait

$$r_0 = 1,86 \times 10^9 \text{ a.l.}$$

ce qui correspondrait à la valeur (2') de H .

Afin de déterminer la forme intégrale relativiste de la loi de Hubble il faudrait considérer la métrique générale.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

de l'espace de Riemann à quatre dimensions, qui serait imposée par la distribution actuelle de la matière. C'est ce que l'on tend à faire d'habitude⁽¹⁾; mais les formules qui en résultent ne sont pas très convenables aux applications numériques. Aussi paraît-il préférable de les simplifier, en négligeant la courbure de l'espace et en opérant, comme nous avons annoncé ci-dessus, dans l'univers de Minkowski; c'est d'ailleurs l'univers dont la cosmologie se rapproche le plus de la cosmologie newtonienne ([6], p. 83).

La vitesse $v + dv$ du point matériel P' sera donnée par la formule relativiste de composition des vitesses

$$v + dv = \frac{v + du}{1 + \frac{v}{c^2} du}.$$

On en tire

$$(7) \quad \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = du,$$

si l'on néglige les quantités infinitésimales du second ordre, ou bien, avec (1),

$$\frac{dv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = H dr.$$

On obtiendra donc par suite d'une intégration

$$(8) \quad r = \frac{1}{2} r_0 \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta}, \quad \beta = v/c, \quad r_0 = c/H.$$

(1) Voir la plupart des travaux cités à la fin.

Il s'ensuit pour b , donc pour v , la formule relativiste

$$(9) \quad \beta = \operatorname{tgh} \frac{r}{r_0} \quad , \quad r_0 = \frac{c}{H} .$$

La formule (8) devrait être substituée à la loi linéaire (4) pour le calcul des distances en fonction de la vitesse v . En première approximation la formule (8) coïncide d'ailleurs avec (4), car on tire de (8) par un développement en série

$$r = r_0 \beta + O(\beta^3) .$$

Cela veut dire que les valeurs de r fournies par les deux formules (4) et (8), ne diffèrent pas trop l'une de l'autre si la vitesse v reste bien inférieure à la vitesse c de la lumière. Mais la différence peut devenir importante si v tend vers c . Ainsi, pour $\beta = 0,2$, ce qui correspond à la plus grande vitesse radiale observée jusqu'à présent, on obtient les valeurs numériques $r = 333$ mpc par la formule (4) et $r = 336$ mpc avec la formule (8); la différence est moindre que 1 %. Mais pour $\beta = 0,99$ on aurait $r = 1650$ mpc avec la formule (4) et $r = 4411$ mpc avec la formule (8), donc une augmentation de 167 %.

A titre d'exemple nous donnons quelques valeurs numériques calculées avec ces deux formules (4) et (8), dans le tableau ci-dessous.

Tableau de valeurs numériques ⁽²⁾.

$\beta = v/c$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,9	0,95	0,99
r (mpc) formule (4)	167	333	667	1000	1500	1583	1650
r (mpc) formule (8)	167	336	705	1155	2454	3053	4411

La formule relativiste (8) constitue une première correction de la formule linéaire (4) de Hubble; elle a l'avantage évident sur celle-ci d'éviter pour v les valeurs dépassant la vitesse de la lumière. Une seconde correction sera donnée dans une prochaine Note.

2. *Le déplacement des lignes spectrales (redshift).* – Proprement dit c'est le déplacement des lignes (redshift) dans le spectre de la nébuleuse que l'on observe directement en Astronomie; on en déduit ensuite la vitesse radiale de récession comme conséquence de l'effet Doppler et, partant, la distance r , au moyen de la formule (4) ou (8). Il faudrait donc substituer à ces formules d'autres contenant la mesure du déplacement des lignes spectrales comme variable indépendante.

(2) Dans ces calculs on a pris pour H la valeur (2).

Si l'on désigne par λ_0 la longueur d'onde propre de la source et par λ la longueur d'onde telle qu'elle arrive à l'observateur terrestre, on considère en spectroscopie le rapport

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \quad , \quad \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

comme mesurant le « déplacement » (redshift) dû à la récession de la nébuleuse. L'effet Doppler en cinématique newtonienne est donné par la formule

$$(10) \quad z = \beta$$

de sorte que la loi linéaire de Hubble conduirait avec (5) à la relation

$$(11) \quad z = \frac{r}{r_0} .$$

En cinématique relativiste l'effet Doppler s'exprime par la relation ⁽³⁾

$$(12) \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad , \quad \beta = v/c$$

entre les longueurs d'ondes, ce qui donne

$$(13) \quad z (= \Delta\lambda/\lambda_0) = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta} \right)^{1/2} - 1 .$$

En substituant à β l'expression (9) on aura

$$(14) \quad z = e^{r/r_0} - 1 .$$

Le premier terme du développement en série d'après les puissances de r/r_0 , reproduit la loi linéaire (11); la fonction z en diffère par une fonction positive de r .

Edwin Hubble avait trouvé une loi empirique [5] p. 41

$$(15) \quad z = kr + lr^2 + mr^3 + \dots$$

qui présentait le même caractère: déviation positive par rapport à la loi linéaire.

Le développement qui résulte de (14),

$$(16) \quad z = \frac{r}{r_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{r}{r_0} \right)^3 + \dots$$

contient seulement des coefficients positifs. Leurs valeurs numériques, en partant de la valeur

$$r_0 = 1,86 \times 10^9 \text{ a.l.}$$

adoptée par Hubble, seront

$$\begin{aligned} 1/r_0 &= 0,54 \times 10^{-9} (\text{a.l.})^{-1} \quad ; \quad 1/(2r_0^2) = 1,45 \times 10^{-19} (\text{a.l.})^{-2}; \\ 1/(6r_0^3) &= 2,6 \times 10^{-29} (\text{a.l.})^{-3}; \dots \end{aligned}$$

(3) Voir pour exemple V. NOVACU [12], II, p. 257.

Les coefficients du développement empirique (15) de Hubble n'ont pas été déterminés – à l'exception de k et de l . Il est évident que la valeur numérique du premier coefficient, k , doit coïncider avec la valeur du premier coefficient du développement (16), étant donné que ces deux coefficients doivent représenter la même loi linéaire basée sur la même valeur de H . Le second coefficient du développement (16) qui est, comme on l'a vu, égal à

$$1,45 \times 10^{-19} \text{ (a.l.)}^{-2},$$

diffère de la valeur donnée par Hubble au coefficient du second terme du développement (15) ([5], p. 43)

$$2,5 \times 10^{-19} \text{ (a.l.)}^{-2},$$

de 40 % approximativement en moins.

Il faut pourtant reconnaître que l'on ne pouvait pas s'attendre à une concordance parfaite de ces valeurs, vu l'incertitude des valeurs adoptées: d'abord, on rencontre de grandes difficultés dans la détermination du paramètre H de l'expansion ⁽⁴⁾ ensuite, le calcul du coefficient numérique l implique une technique très délicate des observations astronomiques. Aussi Edwin Hubble lui-même indique-t-il dans son exposé une certaine tolérance quant à la valeur numérique de cette constante, en disant: «The chief significance of the term for cosmological theory lies in the positive sign». D'ailleurs le signe des termes dans le développement (16) reste positif pour n'importe quelle valeur de r , donc de H .

CONCLUSION.

Remarque finale. – La loi linéaire de Hubble concernant la récession des nébuleuses extragalactiques a donné naissance à bien des travaux importants essayant un placement convenable de cette loi dans un univers relativiste. Pourtant on n'a pas réussi jusqu'à présent à trouver un univers satisfaisant les conditions numériques imposées par l'observation astronomique. Moyennant la confrontation entre les valeurs fournies par la loi linéaire, d'un côté, et les données numériques obtenues par des observations astronomiques entreprises sur 100.000 nébuleuses, d'un autre, Hubble a établi que la différence, qui est sûrement positive, pourrait s'exprimer à l'aide d'une série de puissances de la forme

$$z = kr + lr^2 + mr^3 + \dots$$

Dans le présent travail nous avons substitué à la loi linéaire de Hubble, celle qui en résulte, si l'on impose aux vitesses la loi relativiste de composition. On arrive ainsi à la formule

$$z = e^r/r_0 - 1$$

(4) Voir M. L. HUMASON et al. [13], p. 159.

qui doit remplacer la loi linéaire de Hubble. Cette formule est en concordance numérique avec les résultats des observations astronomiques qui ont conduit à la différence exprimée par la série de puissances donnée ci-dessus.

On serait tenté de conclure, par suite de ce résultat, que la différence trouvée par Hubble entre sa loi linéaire et les observations astronomiques disparaîtrait si l'on remplaçait la forme newtonienne de la loi par sa forme relativiste et que, par conséquent, la loi de Hubble serait susceptible d'être étendue à l'univers tout entier, à condition de la soumettre à la forme relativiste dans un espace de Minkovski.

On pourrait pourtant se demander si l'on n'exagère pas la portée d'une loi empirique - loi de Hubble - en lui attribuant le rôle d'une loi universelle, qui puisse décider de la structure même du monde entier.

Ne serait-il pas plus naturel de considérer cette loi comme étant l'expression approximative d'une loi bien plus générale, dans le cas où son champ d'application serait un domaine très restreint de l'espace-temps ?

En tout cas, en adoptant cette dernière manière de voir on serait exempté de toute préoccupation quant à l'homogénéité de la distribution des nébuleuses et même quant au principe cosmologique cité ci-dessus; car une déviation par rapport à la distribution homogène ou au principe cosmologique ne serait plus l'indication d'une position de faveur de notre galaxie dans le monde.

La détermination de cette loi générale comprenant la loi de Hubble comme une approximation linéaire, exige des données d'observation bien plus nombreuses et plus étendues que celles dont on dispose à présent.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. P. HUBBLE, « Proc. Nat. Acad. », 15, 168 (1929).
- [2] E. P. HUBBLE and M. L. HUMASON, « Astrophys. J. », 74, 43 (1931).
- [3] E. P. HUBBLE and R. C. TOLMAN, « Astrophys. J. », 82, 302 (1935).
- [4] E. P. HUBBLE, *The realm of the nebulae*, Yale Univ. Press, 1936.
- [5] E. P. HUBBLE, *The observational approach to Cosmology*, Oxford, 1937.
- [6] H. P. ROBERTSON, « Rev. of mod. Phys. », 5, 62 (1933).
- [7] R. C. TOLMAN, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, 1934.
- [8] E. A. MILNE, *Kinematic Relativity*, Oxford, 1948.
- [9] P. P. PARENAGO, *Cours d'astronomie stellaire* (en russe), Moscou, 1954.
- [10] V. A. FOK, *Théorie de l'espace, du temps et de la gravitation* (en russe), Moscou, 1955.
- [11] FRED HOYLE, *Frontiers of Astronomy* (trad. française), 1955.
- [12] V. NOVACU, *Introd. Electrodinamica* (en roumain), Bucarest, 1956.
- [13] M. L. HUMASON, N. U. MAYAL, A. R. SANDAGE, « Astron. J. », 61, 97-162 (1956).
- [14] J. M. J. KOOP, « J. of the Brit. Interplan. Soc. », 15, 248-259 (1956).
- [15] A. EINSTEIN, *Teor. Relat.* (en roumain), Bucarest, 1957.

Astrofisica. — *Un modello della struttura interna di Algol A.*

Nota I di SERGIO SEGRE, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Il sistema Algol è formato da almeno tre corpi. Nella presente Nota I e in una successiva Nota II, si vuole esaminare la possibilità di costruire un modello teorico della struttura interna del più luminoso e più pesante di essi, Algol A (β Persei), prendendo dall'esperienza i valori del raggio totale, R , della luminosità totale, L , e della massa M .

I risultati qui ottenuti (un'idea sommaria dei quali è data dai titoli dei singoli paragrafi delle due Note) hanno prevalentemente importanza teorica; quelli di carattere numerico riflettono l'incertezza attuale dei dati sperimentali. Tuttavia conclusioni più solide potrebbero trarsi con i metodi qui esposti qualora le tecniche sperimentali venissero sensibilmente raffinate.

2. IPOTESI. — Per ragioni di semplicità faremo le seguenti ipotesi:

1° Simmetria sferica: le grandezze fisiche (pressione, temperatura, densità) dipendano solo dalla distanza r dal centro della stella. Si trascura la dipendenza da argomenti angolari dovuta tanto agli effetti di rotazione della stella e di eventuali campi magnetici interni quanto agli effetti di marea prodotti dalla stella prossima, Algol B.

2° Si assume che la stella sia in condizioni stazionarie di equilibrio. Si esclude quindi una dipendenza delle variabili dal tempo.

3° La regione esterna sia in equilibrio radiativo, come è ragionevole supporre dato che Algol A appartiene alla serie principale, tra i primi tipi spettrali.

4° Si trascura la pressione di radiazione, che, come si può verificare a posteriori, risulta effettivamente assai piccola rispetto alla pressione gassosa.

5° Il gas stellare sia completamente ionizzato, per cui con ottima approssimazione, il peso molecolare medio μ è dato da $1/\mu = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$, dove X e Y denotano rispettivamente le abbondanze in peso di idrogeno e di elio, ed inoltre $X + Y + Z = 1$ (cfr. Chandrasekhar, 1939).

6° In accordo con i lavori recenti sull'abbondanza degli elementi si assume $Z = 0,02$.

7° Si assume che μ sia costante, senza escludere che il valore di tale costante possa essere diverso per l'involucro radiativo e per il nucleo.

8° Validità in tutta la stella dell'equazione di stato dei gas perfetti.

9° L'opacità, κ , per le temperature, T , e le densità, ρ , che ci interessano, sia esprimibile con la legge $\kappa = \kappa_0 \rho^\alpha T^{-3,5}$ (ove α , κ_0 denotano costanti).

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

10° Il tasso ϵ di generazione di energia sia esprimibile con la legge $\epsilon = \epsilon_{co} \rho X T^n + \epsilon_{po} \rho X^2 T^m$, con ϵ_{co} , ϵ_{po} , n , m costanti.

11° L'energia sia esclusivamente prodotta dal ciclo carbonio-azoto e dalla reazione protone-protone. A questi due processi corrispondono i due termini nell'espressione di ϵ data nel precedente capoverso.

Dalle ipotesi 5^a e 6^a segue che $1/\mu = 1,25 X + 0,745$; inoltre la composizione dipende solamente da X (essendo $Y = 0,98 - X$).

3 INVOLUCRO RADIATIVO. - Per la regione esterna (involucro), supposta in equilibrio radiativo, valgono notoriamente le seguenti equazioni:

$$(1) \quad P = \frac{k}{H\mu} \rho T, \quad (3) \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho r^2,$$

$$(2) \quad \frac{dP}{dr} = - \frac{GM(r)}{r^2} \rho, \quad (4) \quad \frac{dL(r)}{dr} = 4\pi\rho\epsilon r^2,$$

$$(5) \quad \frac{d(aT^4)}{3 dr} = - \frac{\kappa\rho}{c} \frac{L(r)}{4\pi r^2},$$

ove: k è la costante di Boltzmann; H , la massa dell'atomo di idrogeno; G , costante di gravitazione; $M(r)$, massa contenuta nella sfera di raggio r ; a , costante di Stefan-Boltzmann; c , velocità della luce; $L(r)$, luminosità relativa alla sfera di raggio r . Queste equazioni esprimono, rispettivamente, lo stato di un gas perfetto, la condizione di equilibrio idrostatico, la continuità della massa e quella della luminosità, la condizione di equilibrio radiativo.

Se si elimina ρ tra la (1) e le rimanenti, inserendo per κ ed ϵ le espressioni indicate, si ottiene un sistema di quattro equazioni differenziali, che va integrato con le seguenti condizioni iniziali per le variabili $M(r)$, P , T , $L(r)$:

$$(6) \quad M(R) = M \quad ; \quad P(R) = 0 \quad ; \quad T(R) = 0 \quad ; \quad L(R) = L.$$

A tali condizioni conviene sostituire quelle relative ad un valore di r prossimo ad R , ma diverso da R , allo scopo di ottenere valori iniziali non nulli per le suddette variabili, il che offre il vantaggio di non introdurre singolarità se si passa a variabili logaritmiche. A questo scopo, si osservi che per $r \simeq R$, nell'atmosfera stellare, è $M(r) \simeq M$, $L(r) \simeq L$. Le equazioni differenziali si riducono così immediatamente da quattro a due, nelle variabili P e T ; esse si integrano subito (con le condizioni (6)), e danno:

$$(7) \quad \begin{cases} T(r) = GM \frac{H\mu}{k} \frac{1+\alpha}{7,5+\alpha} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \\ [P(r)]^{(1+\alpha)} = \frac{16\pi ac GM}{4L\kappa_0} \left(\frac{k}{H\mu} \right)^\alpha \frac{1+\alpha}{7,5+\alpha} [T(r)]^{(7,5+\alpha)} \end{cases} \quad (\text{per } r \simeq R).$$

Se si esegue la trasformazione:

$$(8) \quad \begin{cases} \log \frac{r}{R} = y \quad , \quad \log \frac{M(r)}{M} = \psi \quad , \quad \log \frac{L(r)}{L} = \varphi, \\ \log \left[P(r) \frac{4\pi R^4}{GM^2} \right] = \lambda \quad , \quad \log \left[T(r) \frac{k}{\mu H} \frac{R}{GM} \right] = \tau, \end{cases}$$

il sistema completo da integrare diventa

$$(9) \quad \begin{cases} \log \left(\frac{d\psi}{dy} \right) = 3y + \lambda - \tau - \psi \\ \log \left(-\frac{d\lambda}{dy} \right) = \psi - y - \tau \\ \log \left(-\frac{d\tau}{dy} \right) = (\alpha + 1)\lambda - y + \varphi - (8,5 + \alpha)\tau + \log C \\ \log \left(\frac{d\Phi}{dy} \right) = 3y + 2\lambda + (n-2)\tau - \varphi + \log [1 + B 10^{(m-n)\tau}] + \log D, \end{cases}$$

dove B, C, D sono costanti date da:

$$(10) \quad \begin{cases} B = \frac{\varepsilon_{po}}{\varepsilon_{co}} X \left\{ \frac{\mu H}{k} \frac{GM}{R} \right\}^{(m-n)} \\ C = \frac{3\kappa_0}{4ac} \frac{L}{(4\pi)^{(\alpha+2)}} \left(\frac{\mu HG}{k} \right)^{-7,5} \frac{R^{(3,5-3\alpha)}}{M^{(6,5-\alpha)}} \\ D = \frac{\varepsilon_{co}}{4\pi L} X \left(\frac{GH\mu}{k} \right)^n \frac{M^{(n+2)}}{R^{(n+3)}}. \end{cases}$$

Le condizioni iniziali ora sono $\varphi = 0$, $\psi = 0$, e le corrispondenti per τ, λ si ottengono dalla trasformata di (7), cioè:

$$(11) \quad \begin{cases} \tau = \log \frac{1+\alpha}{7,5+\alpha} + \log (10^{-y} - 1) \\ \lambda = \frac{7,5+\alpha}{1+\alpha} \tau - \frac{1}{1+\alpha} \log \left[C \frac{7,5+\alpha}{1+\alpha} \right]. \end{cases}$$

Chandrasekhar (1939) ha mostrato che la condizione $M(r) \simeq M$, $L(r) \simeq L$, usata per ottenere le (11), vale con buona approssimazione fino circa a $y = \log r/R = -0,20$. Il sistema (9) si può integrare numericamente partendo da $y = -0,20$ e proseguendo verso valori inferiori di y . Tale integrazione va arrestata nel primo punto dove accade una delle seguenti circostanze: che non sia più soddisfatta la condizione di stabilità dell'equilibrio radiativo, o che $L(r)$ si sia ridotta a zero. Esaminiamo ora il primo di questi casi, riservandoci di considerare il secondo nella Nota II.

4. NUCLEO CONVETTIVO. — La condizione di stabilità dell'equilibrio radiativo è, per un gas perfetto,

$$(12) \quad \frac{d \log P}{d \log T} \equiv \frac{d\lambda}{d\tau} > 2,5 \quad (\text{cfr. Chandrasekhar, 1939}).$$

Cowling (1934) ha dimostrato che, dove il gradiente radiativo è instabile, se la pressione di radiazione è trascurabile, il gradiente termico che si stabilisce differisce di molto poco da un gradiente adiabatico, per cui è

$$(13) \quad P = K \rho^\gamma \quad (\text{con } K \text{ costante}),$$

e il trasporto dell'energia avviene per mezzo di correnti convettive. In tali condizioni valgono ancora le (1), (2), (3), (4), ma non la (5): al posto di questa occorre sostituire la (13).

Posto:

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} \quad , \quad \rho_c = \rho(0) \quad , \quad P_c = P(0) \quad , \quad T_c = T(0) \quad ,$$

$$(14) \quad \rho = \rho_c \vartheta^n, \quad (15) \quad r = a \xi,$$

$$(16) \quad a = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{(1/n-1)} \right]^{1/2} = \left[\frac{4\pi G}{n+1} \left(\frac{\mu H}{k} \right)^2 \frac{P_c}{T_c} \right]^{-1/2},$$

e tenuto conto delle (2), (3), (13), (14), (15), (16), ne risulta l'equazione di Lane-Emden di indice n :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) = -\vartheta^n.$$

L'integrazione di essa per $\gamma = 5/3$ (gas perfetto), cioè per $n = 1,5$, ci permette di ottenere le variabili fisiche nel modo seguente. Dalle (1), (13), (14) si ricava:

$$(17) \quad T = \vartheta T_c,$$

$$\rho = \vartheta^n \rho_c,$$

$$(18) \quad P = \vartheta^{(n+1)} P_c,$$

e, integrando direttamente la (3) e la (4) espresse nelle nuove variabili ξ e ϑ , si ottiene

$$(19) \quad M(\xi) = 4\pi a^3 \frac{P_c}{T_c} \mu \frac{H}{k} \left(-\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \right),$$

$$(20) \quad L(\xi) = 4\pi a^3 \epsilon_{co} X \rho_c^2 T_c^n I_n(\xi) \left\{ 1 + \frac{\epsilon_{po} X}{\epsilon_{co}} T_c^{(m-n)} \frac{I_m(\xi)}{I_n(\xi)} \right\},$$

$$\text{dove } I_p(\xi) = \int_0^\xi \xi'^2 \vartheta^{(p+3)} d\xi'.$$

[Si noti che, nella (20), n denota l'esponente che figura nell'espressione di ϵ , non l'indice politropico]. La soluzione dell'equazione di Lane-Emden che a noi interessa, è quella che soddisfa alle condizioni iniziali:

$$\vartheta = 1 \quad , \quad \frac{d\vartheta}{d\xi} = 0 \quad \text{per } \xi = 0 \quad (\text{cfr. (14) e (2), (17)}).$$

Tale soluzione è stata calcolata numericamente e pubblicata da Comrie (1932), e poi ripubblicata da Aller (1954). Inoltre, tavole delle funzioni $I_p(\xi)$ (per valori interi di p) sono state calcolate e pubblicate da Naur (1954).

Le funzioni rappresentanti le nostre variabili fisiche, dipendono apparentemente da cinque costanti K , a , ρ_c , P_c , T_c . In realtà, solo due di esse risultano indipendenti, in quanto valgono la (16) e le (1), (13) calcolate per $r = 0$. Assumeremo come parametri, che determinano la soluzione nel nucleo,

P_e, T_e . Essi verranno determinati dalla condizione che $M(r)$, P , T , $L(r)$ siano continue attraverso la frontiera tra nucleo ed involucro.

Se si denotano con l'indice « f » le grandezze calcolate alla frontiera e con « e » ed « i » rispettivamente le grandezze che si riferiscono all'involucro e al nucleo, dovrà essere

$$(21) \quad P_e(r_f) = P_i(r_f), T_e(r_f) = T_i(r_f), M_e(r_f) = M_i(r_f), L_e(r_f) = L_i(r_f).$$

Dalle prime due delle (21), da (16), e da (15), (17) e (18) calcolate alla frontiera, segue (eliminando P_e e T_e):

$$(22) \quad \log Q_f = 2y_f + \lambda_f - 2\tau_f + \log 2/5 - 2 \log \mu_e/\mu_i,$$

dove, per abbreviare, si è posto $Q(\xi) = \xi^2 \vartheta^{1/2}$. Similmente dalla terza e dalla quarta delle (21), ricordando le (19), (20), seguono rispettivamente le

$$(23) \quad \psi_f = \log \left(-\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)_f - \frac{3}{2} \log \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \lambda_f + 2\tau_f - \frac{3}{4} \log \vartheta_f + 2 \log \frac{\mu_e}{\mu_i},$$

$$(24) \quad \varphi_f = \log I_{nf} + \log D - \frac{3}{2} \log \frac{2}{5} - (n + 2,25) \log \vartheta_f + \\ + \frac{1}{2} \lambda_f + (n + 1) \tau_f + \log (1 + \Lambda) + \log \frac{\mu_e}{\mu_i},$$

dove $\log \Lambda = \log B - (n - m) \tau_f + (n - m) \log \vartheta_f + \log I_{mf} - \log I_{nf} + \log \frac{X_i}{X_e}$ e $I_{nf} \equiv I_n(\xi_f)$.

Una volta eseguita l'integrazione numerica per l'involucro per un ben determinato valore di X_e , ne risultano i valori di $\lambda_f, \tau_f, \psi_f, \varphi_f, y_f$. Per vedere se sia possibile costruire un modello valido in corrispondenza al valore scelto per X_e , si deve esaminare se vi siano valori di μ_i (o, equivalentemente, di X_i) e di ξ_f (noto il quale si hanno le ϑ_f, Q_f, I_{nf}) che rendano soddisfatte le (22), (23), (24).

Poniamo

$$S = 2y_f + \lambda_f - 2\tau_f + \log \frac{2}{5},$$

$$F = 2y_f + \frac{1}{2} \lambda_f - \psi_f - \frac{1}{2} \log \frac{2}{5},$$

$$J = \varphi_f - \log D + \frac{3}{2} \log \frac{2}{5} - 21 \tau_f - \frac{1}{2} \lambda_f,$$

$$\Gamma(\xi_f) = \log Q_f - \log \left(-\xi^2 \frac{d\vartheta}{d\xi} \right)_f + \frac{3}{4} \log \vartheta_f,$$

dove S, F e J sono delle costanti, determinate una volta che si sia eseguita l'integrazione esterna e che si conoscano le $y_f, \lambda_f, \tau_f, \varphi_f, \psi_f$. Sommando le (22), (23) si ha

$$(25) \quad \Gamma(\xi_f) = F,$$

e le (22), (24) si possono esprimere rispettivamente nel modo seguente:

$$(26) \quad -2 \log \mu_e/\mu_i = \log Q_f - S,$$

$$(27) \quad \log I_{nf} = (n + 2,25) \log \vartheta_f - \log \mu_e/\mu_i - \log (1 + \Lambda) + J.$$

Si può ora risolvere graficamente la (25) e determinare così ξ_f . Basta calcolare, dalle tavole Comrie, l'andamento della funzione $\Gamma(\xi)$. Noto quindi ξ_f , si può calcolare Q_f e ottenere μ_i dalla (26). Usando i valori trovati di ξ_f e μ_i , si deve poi verificare se è soddisfatta la (27). Si dovrà ripetere tutto il procedimento per diversi valori di X_e al fine di trovare quelli che permettono di soddisfare a quest'ultima condizione alla frontiera. (Naturalmente occorrerà scartare i modelli che dessero $X_i > X_e$, cioè $\mu_i < \mu_e$. Essi potrebbero essere matematicamente corretti, ma sarebbero fisicamente assurdi in quanto nelle regioni centrali, dove c'è consumo di idrogeno per la generazione di energia, il valore di X deve essere inferiore a quello nelle regioni esterne).

Tratteremo nella Nota II il caso che, nel corso dell'integrazione esterna, $L(r)$ si riduca a zero. Ivi daremo i risultati del calcolo e la bibliografia.

Fisica matematica. — *Propagazione di onde elettromagnetiche piane in un conduttore unidirezionale con direzione di conduttività, variabile.* Nota di CARLO BANFI, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

§ 1. — In questi ultimi anni sono stati spesso considerati schermi unidirezionali ⁽¹⁾, cioè con conduttività infinita in una direzione, nulla in direzione perpendicolare. In questa Nota mi propongo di studiare la propagazione di un'onda attraverso una successione di schermi unidirezionali ruotati l'uno rispetto all'altro dello stesso angolo.

Per poter trattare analiticamente in modo semplice il problema, considererò un mezzo particolare di costante dielettrica ϵ e permeabilità μ , cioè isotropo rispetto a queste grandezze, ma anisotropo rispetto alla conduttività. Più precisamente, scelto un sistema di coordinate O, x, y, z , supporrò la conduttività γ del mezzo diversa da zero solo per una direzione parallela al piano xy (mentre la conduttività sarà nulla in qualunque direzione ad essa normale), e l'angolo θ che questa direzione forma con l'asse y variabile linearmente al variare di z ; quindi scriverò $\theta = mz$ con m costante. Studierò la propagazione parallela all'asse z di modi TEM, ammetterò dapprima $\gamma \neq 0$, e dopo aver risolto completamente il problema in questo caso passerò al limite facendo tendere γ all'infinito, il che permetterà di introdurre notevoli semplificazioni nell'espressione del campo dell'onda.

Riassumo i risultati che mi sembrano più interessanti. Nel caso $\gamma = \infty$ esiste un solo modo di propagazione TEM, col campo elettrico sempre nor-

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) Cfr. per esempio G. TORALDO DI FRANCIA, *Equazioni integro-differenziali e principio di Babinet per gli schermi a conduttività unidirezionale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 476 (1956); IDEM, *Il metodo variazionale di Levine e Schwinger, applicato agli schermi a conduttività unidirezionale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 1, 86 (1956).

male alla direzione di massima conduttività, come del resto è intuitivo, sicché l'onda attraversando il mezzo subisce una rotazione del piano di polarizzazione. La velocità di fase dell'onda risulta:

$$V = \frac{v\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4p^2}}},$$

dove p è il cosiddetto passo del mezzo uguale a π/m pari alla distanza fra i due piani più vicini che hanno conduttività massime parallele, v è la frequenza dell'onda, λ la corrispondente lunghezza d'onda se il mezzo non avesse conduttività.

Se $\lambda < 2p$, V è reale e si ha propagazione, se $\lambda > 2p$, V è immaginario e non si ha propagazione, anzi l'energia media che entra nel mezzo è nulla. Si ha cioè, come nelle guide d'onda, una lunghezza di onda critica, uguale al doppio del passo, e la velocità di fase varia, per λ inferiore alla lunghezza critica, con la stessa legge con cui varia la velocità di fase nelle guide d'onda.

§ 2. - Sia \mathbf{E} , \mathbf{H} un campo elettromagnetico sinoidale, di pulsazione ω , dipendente solo da z , e normale a z sicché risulta:

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad (2) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Inoltre, detta \mathbf{U} la densità di corrente, j l'unità immaginaria

$$(3) \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E} + \mathbf{U} \quad (4) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H};$$

eseguendo il rotazionale della (4) tenendo presente la (1) e la (3) si ha:

$$(5) \quad \Delta \mathbf{E} = -\omega^2\epsilon\mu \mathbf{E} + j\omega\mu \mathbf{U}.$$

Per risolvere la (5) conviene riferire i punti di ogni piano z uguale a costante a un sistema di assi x_1, x_2 , con origine sull'asse z e tale che x_1 formi coll'asse x l'angolo θ uguale a mz , sicché x_1 coincida con la direzione di conduttività nulla.

Avremo perciò, per ogni punto di coordinate x, y, z

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \theta + y \sin \theta & x = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_2 = -x \sin \theta + y \cos \theta & y = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta. \end{cases}$$

Fissato z , i versori \mathbf{i}_1 e \mathbf{i}_2 paralleli a x_1 e x_2 sono:

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{i}_1 = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \\ \mathbf{i}_2 = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}. \end{cases}$$

Si ha poi derivando e ricordando $\theta = mz$

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{i}_1}{\partial z} = m \mathbf{i}_2 \quad \frac{\partial \mathbf{i}_2}{\partial z} = -m \mathbf{i}_1.$$

Allora, dette $E_1(z)$ ed $E_2(z)$ le componenti di \mathbf{E} sugli assi x_1 e x_2 , avremo:

$$(9) \quad \begin{aligned} U &= \gamma E_2 \\ \Delta \mathbf{E} &= \frac{d^2}{dz^2} [E_1 \mathbf{i}_1 + E_2 \mathbf{i}_2] = \\ &= \frac{d^2 E_1}{dz^2} \mathbf{i}_1 + 2m \frac{dE_1}{dz} \mathbf{i}_2 - m^2 E_1 \mathbf{i}_1 + \frac{d^2 E_2}{dz^2} \mathbf{i}_2 - 2m \frac{dE_2}{dz} \mathbf{i}_1 - m^2 E_2 \mathbf{i}_2. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (5) e uguagliando i coefficienti di \mathbf{i}_1 e \mathbf{i}_2 si ha:

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 E_1}{dz^2} - 2m \frac{dE_2}{dz} + (\omega^2 \mu \varepsilon - m^2) E_1 = 0 \\ \frac{d^2 E_2}{dz^2} + 2m \frac{dE_1}{dz} + (\omega^2 \mu \varepsilon - m^2 - j\omega \mu \gamma) E_2 = 0. \end{cases}$$

§ 3. - Per risolvere le (10) si ponga:

$$(11) \quad E_1 = A \exp [-j\beta z] \quad E_2 = B \exp [-j\beta z]$$

dove β , A , B , sono costanti da determinarsi.

Sostituendo si ha:

$$(12) \quad \begin{cases} A(\omega^2 \mu \varepsilon - m^2 - \beta^2) + B j 2 \beta m = 0 \\ -A j 2 \beta m + B(\omega^2 \mu \varepsilon - m^2 - j\omega \mu \gamma - \beta^2) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema lineare omogeneo in A e in B è possibile solo se è nullo il determinante dei coefficienti, cioè se:

$$(13) \quad (\omega^2 \mu \varepsilon - m^2 - \beta^2)(\omega^2 \mu \varepsilon - m^2 - j\omega \mu \gamma - \beta^2) - 4\beta^2 m^2 = 0.$$

Si determina così il valore di β^2 :

$$(14) \quad \begin{cases} \beta^4 - \beta^2(2\omega^2 \mu \varepsilon + 2m^2 - j\omega \mu \gamma) + (\omega^2 \mu \varepsilon - m^2 - j\omega \mu \gamma)(\omega^2 \mu \varepsilon - m^2) = 0 \\ \beta^2 = \frac{1}{2} [2\omega^2 \mu \varepsilon + 2m^2 - j\omega \mu \gamma \pm \\ \pm \sqrt{(2\omega^2 \mu \varepsilon + 2m^2 - j\omega \mu \gamma)^2 - 4(\omega^2 \mu \varepsilon - m^2)(\omega^2 \mu \varepsilon - m^2 - j\omega \mu \gamma)}] = \\ = \frac{1}{2} [2\omega^2 \mu \varepsilon + 2m^2 - j\omega \mu \gamma \pm \\ \pm \sqrt{16\omega^2 \mu \varepsilon m^2 - \omega^2 \mu^2 \gamma^2 - j8\omega \mu \gamma m^2}]. \end{cases}$$

Cerchiamo ora di dare all'espressione di β^2 una forma più semplice supponendo γ molto grande. Si ha infatti:

$$\sqrt{-(\omega^2 \mu^2 \gamma^2 - 16\omega^2 \mu \varepsilon m^2 + j8\omega \mu \gamma m^2)} = j\omega \mu \gamma \sqrt{1 - 16 \frac{\varepsilon m^2}{\mu \gamma^2} + j \frac{8m^2}{\omega \mu \gamma}}$$

ammettendo il termine $\frac{8m^2}{\omega \mu \gamma}$ abbastanza piccolo rispetto all'unità (si tenga presente γ grande) possiamo trascurare le potenze superiori alla seconda. Si ha poi il termine $\frac{16 \varepsilon m^2}{\mu \gamma^2}$, uguale al termine precedente moltiplicato per $\frac{2 \varepsilon \omega}{\gamma}$ che è di regola molto piccolo; quindi potremo trascurare sempre il

quadrato di questo termine, le potenze superiori e i suoi prodotti con $\frac{8m^2}{\omega\mu\gamma}$.
Si ha così:

$$(15) \quad j\omega\mu\gamma \sqrt{1 - \frac{16\varepsilon m^2}{\mu\gamma^2} + j\frac{8m^2}{\omega\mu\gamma}} = j\omega\mu\gamma \left[1 - 8\frac{\varepsilon m^2}{\mu\gamma^2} + j\frac{4m^2}{\omega\mu\gamma} + 8\left(\frac{m^2}{\omega\mu\gamma}\right)^2 + \dots \right] \simeq \\ \simeq j\omega\mu\gamma - j\frac{8m^2}{\omega\mu\gamma}(\omega^2\mu\varepsilon - m^2) - 4m^4.$$

Quindi, con le stesse approssimazioni β^2 si riduce a:

$$(16) \quad \beta^2 = \frac{1}{2} \left[2\omega^2\mu\varepsilon + 2m^2 - j\omega\mu\gamma \pm \left[j\omega\mu\gamma - j\frac{8m^2}{\omega\mu\gamma}(\omega^2\mu\varepsilon - m^2) - 4m^4 \right] \right] = \\ = \begin{cases} (\omega^2\mu\varepsilon - m^2) \left(1 - j\frac{4m^2}{\omega\mu\gamma} \right) \\ \omega^2\mu\varepsilon + 3m^2 - j \left[\omega\mu\gamma - \frac{4m^2}{\omega\mu\gamma}(\omega^2\mu\varepsilon - m^2) \right] \simeq \omega^2\mu\varepsilon + 3m^2 - j\omega\mu\gamma. \end{cases}$$

Considerando solo la propagazione nel verso positivo di z , si ha:

$$(17) \quad \begin{cases} \beta_1 = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - m^2} \left(1 - j\frac{2m^2}{\omega\mu\gamma} \right) \\ \beta_2 = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon + 3m^2 - j\omega\mu\gamma}. \end{cases}$$

In corrispondenza a queste due determinazioni di β posso ora ottenere il rapporto $\xi = (B/A)$:

$$(18) \quad \begin{cases} \xi_1 = -\frac{2m}{\omega\mu\gamma} \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - m^2} \left(1 + j\frac{2m}{\omega\mu\gamma} \right) \\ \xi_2 = -j\frac{1}{2m} \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon + 3m^2 - j\omega\mu\gamma}. \end{cases}$$

§ 4. - Passiamo ora a considerare il campo \mathbf{H} dato dalla formula:

$$(19) \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{j\omega\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

L'espressione di $\operatorname{rot} \mathbf{E}$, tenendo presente che $E_z = 0$ e che le derivate rispetto a x_1 e x_2 sono nulle, vale:

$$(20) \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{d}{dz} (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = -\frac{d}{dz} (E_2 \mathbf{i}_1) + \frac{d}{dz} (E_1 \mathbf{i}_2) = \\ = -\mathbf{i}_1 \frac{dE_2}{dz} - m \mathbf{i}_2 E_2 + \mathbf{i}_2 \frac{dE_1}{dz} - m \mathbf{i}_1 E_1.$$

Quindi per \mathbf{H} si hanno le espressioni:

$$(21) \quad \begin{cases} H_1 = \frac{1}{j\omega\mu} \left[\frac{dE_2}{dz} + mE_1 \right] & H_2 = \frac{1}{j\omega\mu} \left[-\frac{dE_1}{dz} + mE_2 \right] \\ H_1 = -\frac{\beta}{\omega\mu} B \exp[-j\beta z] + \frac{m}{j\omega\mu} A \exp[-j\beta z] \\ H_2 = \frac{\beta}{\omega\mu} A \exp[-j\beta z] + \frac{m}{j\omega\mu} B \exp[-j\beta z]. \end{cases}$$

§ 5. - Facciamo ora tendere γ all'infinito. Il modo per cui β vale β_2 non si propaga, dato che la parte immaginaria di β_2 tende all'infinito. Del resto per questo modo si avrebbe $1/\xi = 0$ cioè $A = 0$, inoltre non può essere $B \neq 0$ perché ne risulterebbe il campo \mathbf{E} parallelo alla direzione di conduttività infinita, il che è impossibile. Resta unicamente l'altro modo. In questo caso si ha che la parte immaginaria di β tende a 0. Tenendo presente $\omega^2 \mu \varepsilon = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}$ e $m = \pi/p$ si ha:

$$(22) \quad \beta = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - m^2} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2}{\omega^2 \mu \varepsilon}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4p^2}}$$

da cui, essendo $V = \omega/\beta$, si ha per V il valore accennato nell'introduzione.

Inoltre conforme la (11) si ha:

$\xi = 0$, cioè $B = 0$, quindi il campo risulta:

$$(23) \quad \begin{cases} E_x = A \exp[-j\beta z] & E_z = 0 \\ H_x = \frac{m}{j\omega\mu} A \exp[-j\beta z] & H_z = \frac{\beta}{\omega\mu} A \exp[-j\beta z]. \end{cases}$$

Il campo elettrico si mantiene normale alla direzione di massima conduttività. È interessante notare come, per effetto della corrente il campo magnetico non risulta normale al campo elettrico.

La corrente U nel conduttore si ottiene come limite del caso generico $U = \gamma E_z = \gamma \xi E_x$ e risulta:

$$(24) \quad U = -\frac{2m\beta}{\omega\mu} E_x.$$

β è reale solo se $\lambda < 2p$, invece se $\lambda > 2p$, β è immaginario e non si ha propagazione. Del resto la potenza media propagata è data dalla parte reale di $(1/2) \mathbf{E}^* \wedge \mathbf{H} \times \mathbf{K}$ e nel secondo caso risulta senz'altro nulla.

Fisica matematica. — *Sulla riflessione e rifrazione in magneto-idrodinamica.* Nota di CARMELO TOTARO, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Nella vasta letteratura, concernente la magneto-idrodinamica, vari Autori⁽¹⁾ si sono occupati della riflessione e rifrazione di onde idromagnetiche su una superficie di separazione di due fluidi differenti. Questi fenomeni sono di notevole interesse nella teoria di Alfvén delle macchie solari. La questione è stata pure affrontata da V. C. A. Ferraro⁽²⁾ nel caso di due

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) C. WALÉN «Ark. f. Mat., Astr. o. Fys.», vol. 30 A, No. 15 (1944); vol. 33 A, No. 18 (1946); H. ALFVÉN, *Cosmical Electrodynamics* (Oxford: Clarendon Press, 1950); S. LUNDQUIST, «Ark. f. Fys.», 5, 297 (1952).

(2) V. C. A. FERRARO, *On the reflection and refraction of Alfvén waves*, «Astrophysics J.», vol. 119, pp. 393-404 (1954).

fluidi di conducibilità infinita, impostando il problema sulla base del sistema di Eulero-Maxwell e considerando onde piane propagantisi nella direzione del campo magnetico esterno.

In questo lavoro mi propongo di considerare lo stesso problema nel caso di fluidi di conducibilità finita. Inoltre, seguendo un indirizzo segnalato in più recenti lavori ⁽³⁾, fonderò la ricerca sul sistema di Eulero-Minkowski e considererò onde idromagnetiche propagantisi in una direzione diversa da quella del campo magnetico esterno ⁽⁴⁾.

Il sistema di Eulero-Minkowski è

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{c} \mathbf{I} \wedge \mathbf{B} - \text{grad } p \right) \\ \dot{\mathbf{B}} = -c \text{ rot } \mathbf{E} \\ \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{I} = c \text{ rot } \mathbf{H} \\ \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \frac{\lambda}{\varepsilon \mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} + \frac{\lambda}{\varepsilon \mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{D} \\ \mathbf{I} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) \end{array} \right. \quad \left(\lambda = \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \right) \quad \begin{array}{l} \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ \text{div } \mathbf{D} = 0 \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{array}$$

ove \mathbf{v} è la velocità della generica particella, c la velocità della luce nel vuoto, \mathbf{F} la forza non elettromagnetica agente sull'unità di massa del fluido, ρ la densità del fluido, σ la conducibilità, ε la costante dielettrica, μ la permeabilità, \mathbf{E} l'intensità elettrica del campo, \mathbf{D} lo spostamento elettrico, \mathbf{H} l'intensità magnetica, \mathbf{B} l'induzione magnetica ed \mathbf{I} la densità di corrente elettrica.

Poiché mi limiterò a considerare piccole vibrazioni conviene partire dal seguente sistema di Eulero-Minkowski linearizzato

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} (I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{c} \mathbf{I} \wedge \mathbf{B}_0 - \text{grad } p \right) \\ (2) \quad \dot{\mathbf{B}} = -c \text{ rot } \mathbf{E} \\ (3) \quad \mathbf{I} = c \text{ rot } \mathbf{H} \end{array} \right. \quad \left(\lambda = \frac{\varepsilon \mu - 1}{c} \right) \\ (II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (4) \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \frac{\lambda}{\varepsilon \mu} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 \\ (5) \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \\ (6) \quad \mathbf{I} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 \right) \end{array} \right. \quad (III) \quad \left\{ \begin{array}{l} (7) \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \\ (8) \quad \text{div } \mathbf{D} = 0 \\ (9) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

(3) G. CARINI, *Sulle equazioni della magneto-idrodinamica*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XXI, fasc. VI (1956); *Sulle soluzioni stazionarie delle equazioni della magneto-idrodinamica*, « Rend. Lincei », ser. VIII, vol. XXII, fasc. I (1957).

(4) G. CRUPI, *Sulle onde piane magneto-idrodinamiche propagantisi in una generica direzione*, « Boll. U.M.I. », vol. 12, pp. 604-609 (1957).

che si ottiene dal sistema (A) trascurando, oltre $\dot{\mathbf{D}}$ ed \mathbf{F} , i prodotti delle grandezze indotte associate al fenomeno idromagnetico.

Farò vedere che, partendo dal sistema (B), si perviene ad una equazione nella sola \mathbf{B} che è quella stessa ottenuta da G. Crupi nel lavoro citato. Ma nei due casi (A) e (B) non tutte le altre grandezze associate al fenomeno idromagnetico si esprimono alla stessa maniera. Dopo avere calcolato le grandezze della detta onda piana idromagnetica, considererò due fluidi diversi occupanti due semispazi adiacenti col piano di separazione normale all'induzione magnetica esterna \mathbf{B}_0 . L'applicazione delle condizioni al contorno dell'elettrodinamica di Minkowski, scritte in forma linearizzata ⁽⁵⁾

$$(10) \quad (\mathbf{E} + \beta \wedge \mathbf{B}_0)_s^{(2)} - (\mathbf{E} + \beta \wedge \mathbf{B}_0)_s^{(1)} = 0, \quad H_s^{(2)} - H_s^{(1)} = 0 \quad (\beta = \mathbf{v}/c)$$

permetterà la completa caratterizzazione dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa generate da un'onda incidente conosciuta. Troverò, fra l'altro, che la componente normale di \mathbf{v} è discontinua attraverso la superficie di separazione dei due fluidi.

2. Si scelga un riferimento cartesiano $Oxyz$ con l'asse Oz nella direzione orientata dell'induzione magnetica \mathbf{B}_0 . Supponiamo che le grandezze siano funzioni di

$$(11) \quad \zeta = \mathbf{K} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - \omega t,$$

essendo $\mathbf{u} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ un versore costante, $\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{O}$, K ed ω due costanti scalari. Si pone pure

$$(12) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}.$$

Tenendo conto di (11) e (12) si ha che le equazioni (III) si possono soddisfare con

$$(13) \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Combinando le (I) con le (II) e ponendo, in particolare, in (1), al posto di \mathbf{I} , $c/\mu \operatorname{rot} \mathbf{B}$, si ottiene

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho \mu} (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}_0 - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \\ \dot{\mathbf{B}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} \\ \sigma \mathbf{E} + \frac{\sigma}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 = \frac{c}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{cases}$$

Dalle ultime due, eliminando \mathbf{E} , si ha

$$(15) \quad \frac{c^2}{\mu \sigma} \Delta \mathbf{B} + \mathbf{B}_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} - \dot{\mathbf{B}} = 0.$$

(5) Nelle (10) gli indici in alto servono a distinguere due mezzi contigui 2 e 1, mentre l'indice in basso s indica una qualunque direzione superficiale.

Osserviamo ora che

$$(16) \quad \text{grad } p = K \mathbf{u} \frac{dp}{d\zeta}$$

$$(17) \quad (\text{rot } \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B}_0 = B_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} - K \mathbf{u} \frac{d}{d\zeta} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}).$$

Dopo ciò la prima delle (14) diviene

$$(18) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{\rho \mu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} - \frac{K}{\rho \mu} \mathbf{u} \frac{d}{d\zeta} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}) - \frac{K}{\rho} \mathbf{u} \frac{dp}{d\zeta}$$

da cui, moltiplicando ambo i membri scalarmente per \mathbf{u} , si ha

$$(19) \quad \frac{dp}{d\zeta} = -\frac{1}{\mu} \frac{d}{d\zeta} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}).$$

In conseguenza di questa, la (18) diviene

$$(20) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{\rho \mu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}.$$

Infine, eliminando con (20) la \mathbf{v} dalla (15), si ha

$$(21) \quad m \frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{B} + V^2 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0$$

ove si è posto $m = c^2/\mu\sigma$, $V^2 = B_0^2/\rho\mu$.

Se tentiamo di soddisfare la (21) con

$$(22) \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \exp [i (K \mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

si trova

$$(23) \quad K^2 = \frac{\omega^2}{V^2 a_3^2 - i m \omega} \quad \text{cioè} \quad (24) \quad K = \pm \left(\frac{\omega}{w} + i \alpha \right)$$

ove

$$(25) \quad w = \frac{\sqrt{2N}}{\sqrt{\sqrt{N} + V^2 a_3^2}}$$

è la velocità di fase e

$$(26) \quad \alpha = \frac{\omega \sqrt{\sqrt{N} - V^2 a_3^2}}{\sqrt{2N}}$$

è il coefficiente di smorzamento. Nella (23) vale il segno $+$ o $-$ secondoché l'onda è progressiva o retrograda.

Dopo ciò possiamo passare al calcolo delle altre grandezze, esprimendole per mezzo di \mathbf{b} . Per la (12) dalla (20) si ha

$$(27) \quad \mathbf{v} = -\frac{K}{\omega} \frac{B_0 a_3}{\rho \mu} \mathbf{b}.$$

Tenendo conto che $\text{rot } \mathbf{B} = i K \mathbf{u} \wedge \mathbf{b}$, dalla terza delle (14) si trova

$$(28) \quad \mathbf{E} = -\frac{K}{\mu} \left[\frac{B_0 a_3}{c \rho \omega} \mathbf{B}_0 - i \frac{c}{\sigma} \mathbf{u} \right] \wedge \mathbf{b}.$$

Usando quest'ultima espressione, da (4) si ha

$$(29) \quad \mathbf{D} = -\frac{K}{\mu} \left[\frac{B_0 a_3}{c \rho \mu \omega} \mathbf{B}_0 - i \frac{\varepsilon c}{\sigma} \mathbf{u} \right] \wedge \mathbf{b}.$$

Infine, per la (5), da (3) si ottiene

$$(30) \quad \mathbf{I} = i \frac{Kc}{\mu} \mathbf{u} \wedge \mathbf{b}.$$

Poiché \mathbf{H} , \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{v} ed \mathbf{I} si esprimono linearmente per mezzo di \mathbf{b} , possiamo affermare che anche queste grandezze soddisfano all'equazione (21).

Tenendo conto della (22) e della (29), la seconda e la terza delle (13) danno

$$(31) \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{b}_0) = 0 \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}_0 = 0.$$

Quindi \mathbf{b}_0 dev'essere complanare con \mathbf{B}_0 e \mathbf{u} ed ortogonale ad \mathbf{u} .

Sono cioè possibili onde piane idromagnetiche in una direzione \mathbf{u} diversa da quella del campo magnetico esterno polarizzate nel piano di \mathbf{u} e \mathbf{B} . Ma la condizione $\text{div } \mathbf{D} = 0$ si può soddisfare anche con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{D} = \text{cost.}$

In tal caso le onde idromagnetiche non sono polarizzate nel piano di \mathbf{u} e \mathbf{B} .

3. Siccome mi propongo di trattare un problema di riflessione e rifrazione, suppongo l'intero spazio sede di due fluidi indefiniti occupanti due semispazi adiacenti con il piano di separazione (coincidente con Oxy) normale all'induzione magnetica esterna ($\mathbf{B}_0 \parallel Oz$). Supporrò che il semispazio S ($z > 0$) è sede dell'onda incidente data e dell'onda riflessa e il semispazio S' ($z < 0$) è sede dell'onda trasmessa. Caratterizzerò le grandezze dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa con gli stessi simboli usati per l'onda incidente, facendo la distinzione con un indice r e t rispettivamente; distinguerò le costanti del semispazio S' da quelle del semispazio S con un apice.

Se l'onda incidente è polarizzata nel piano Oyz si vedrà che è possibile soddisfare le (10) con un'onda riflessa e una trasmessa polarizzate nello stesso piano.

Nel semispazio S , sede del campo incidente e del campo riflesso, si ha

$$(32) \quad \begin{cases} \mathbf{E} + \beta \wedge \mathbf{B}_0 = \frac{iKc}{\mu\sigma} \mathbf{u} \wedge \mathbf{b}_0 \exp [i(K\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + \frac{iK_r c}{\mu\sigma} \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{b}_{0r} \exp [i(K_r \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu} + \frac{\mathbf{b}_0}{\mu} \exp [i(K\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + \frac{\mathbf{b}_{0r}}{\mu} \exp [i(K_r \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \end{cases}$$

Nel semispazio S' , sede del campo trasmesso, si ha

$$(33) \quad \begin{cases} \mathbf{E} + \beta \wedge \mathbf{B}_0 = \frac{iK_t c}{\mu' \sigma'} \mathbf{u}_t \wedge \mathbf{b}_{0t} \exp [i(K_t \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \\ \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu'} + \frac{\mathbf{b}_{0t}}{\mu'} \exp [i(K_t \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \end{cases}$$

Poiché le tre onde si pensano polizzate nel piano yz segue

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{b}_o \equiv (0, -a_3 b_o, a_2 b_o) & \mathbf{u} \wedge \mathbf{b}_o \equiv (b_o, 0, 0) \\ \mathbf{b}_{or} \equiv (0, -a_{3r} b_{or}, a_{2r} b_{or}) & \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{b}_{or} \equiv (b_{or}, 0, 0) \\ \mathbf{b}_{ot} \equiv (0, -a_{3t} b_{ot}, a_{2t} b_{ot}) & \mathbf{u}_t \wedge \mathbf{b}_{ot} \equiv (b_{ot}, 0, 0). \end{array} \right.$$

Applicando le (10), per $z = 0$, si ha

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{K}{\mu\sigma} b_o \exp[i(Ka_2 y - \omega t)] + \frac{K_r}{\mu\sigma} b_{or} \exp[i(K_r a_{2r} y - \omega t)] = \\ \quad = \frac{K_t}{\mu' \sigma'} b_{ot} \exp[i(K_t a_{2t} y - \omega t)] \\ \frac{a_3 b_o}{\mu} \exp[i(Ka_2 y - \omega t)] + \frac{a_{3r} b_{or}}{\mu} \exp[i(K_r a_{2r} y - \omega t)] = \\ \quad = \frac{a_{3t} b_{ot}}{\mu'} \exp[i(K_t a_{2t} y - \omega t)]. \end{array} \right.$$

Poiché le (35) si devono verificare in qualunque punto del piano $z = 0$ segue l'uguaglianza degli esponenziali e quindi

$$(36) \quad K_r a_{2r} = Ka_2 \quad K_t a_{2t} = Ka_r.$$

Dalle (36), tenendo presente la (23), si trova

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{2r} = a_2 & a_{2t} = \frac{\sqrt{\mu\sigma}}{\sqrt{\mu' \sigma'}} a_2 \\ a_{3r} = -a_3 & a_{3t} = \frac{\sqrt{\rho' \sigma}}{\sqrt{\rho \sigma'}} a_3. \end{array} \right.$$

Possiamo anche scrivere

$$(38) \quad \theta_r = \theta \quad \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{\sigma \rho'}{\sigma' \rho}}$$

ove con θ , θ_r , θ_t si sono indicati gli angoli che il raggio incidente, il raggio riflesso e il raggio rifratto formano con l'asse y .

Dalle (35), tenendo presente che gli esponenziali sono uguali ed eliminando K , K_r , K_t per mezzo delle (36) e i coseni direttori per mezzo delle (37), si ha

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\mu\sigma} b_{ot} - \sqrt{\mu' \sigma'} b_{or} = \sqrt{\mu' \sigma'} b_o \\ \mu \sqrt{\rho' \sigma} b_{ot} + \mu' \sqrt{\rho \sigma'} b_{or} = \mu' \sqrt{\rho \sigma'} b_o. \end{array} \right.$$

Dalle (39) si ottiene

$$(40) \quad b_{or} = \frac{\sqrt{\mu' \rho} - \sqrt{\mu \rho'}}{\sqrt{\mu' \rho} + \sqrt{\mu \rho'}} b_o, \quad b_{ot} = \frac{2 \mu' \sqrt{\rho \sigma'}}{\sqrt{\mu\sigma} (\sqrt{\mu' \rho} + \sqrt{\mu \rho'})} b_o.$$

Sostituendo in (25) e (26) i parametri che caratterizzano l'onda riflessa, si trova che la velocità di fase e il coefficiente di smorzamento dell'onda riflessa sono uguali a quelli dell'onda incidente.

Invece per l'onda trasmessa si ha

$$(41) \quad w_t = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{\sigma'\mu'}} w, \quad \alpha_t = \sqrt{\frac{\sigma'\mu'}{\sigma\mu}} \alpha.$$

Con le formule che caratterizzano l'onda riflessa e quella trasmessa si può verificare che sono soddisfatte le condizioni di continuità ⁽⁶⁾ delle componenti normali di **B** e **D**. Invece non è continua attraverso il piano $z = 0$ la componente normale della velocità della generica particella, perché si trova

$$(42) \quad \Delta v_n = v_z - v'_z = \frac{K}{\omega} \frac{2(\rho - \rho') B_0 b_0 a_2 a_3}{\rho \sqrt{\rho'\mu} (\sqrt{\mu'\rho} + \sqrt{\mu\rho'})} \exp[i(Ka_2 y - \omega t)].$$

La superficie di separazione dei due fluidi non è un confine rigido ed il fenomeno idromagnetico perturba questa superficie di separazione.

La discontinuità di **v** è legata essenzialmente alla circostanza che i due fluidi hanno diversa densità, perché per $\rho' = \rho$ si ha $\Delta v_n = 0$. Si ha pure $\Delta v_n = 0$ nel caso di una incidenza normale ($a_2 = 0$).

Chimica. — *Fenomeni di coniugazione studiati con spettrofotometria I. R. ed U. V. su una serie di pirroli α e β -sostituiti* ^(*). Nota di MARISA SCROCCO e LUCIANO CAGLIOTI, presentata ^(**) dal Socio V. CAGLIOTI.

In precedenti lavori su alcuni esteri pirrolici ^(1,2), è stato osservato da uno di noi che la coniugazione del gruppo C=O dell'estere con l'anello pirrolico è maggiore quando il sostituito occupa una posizione α che non quando occupa una posizione β .

Introducendo un gruppo metile nell'anello dei due monoesteri sono state osservate, inoltre, delle perturbazioni nell'assetto elettronico del sistema imputabili alla presenza del $-\text{CH}_3$ e che variano in funzione della posizione che esso occupa.

In questo lavoro vengono esaminati in primo luogo gli effetti del gruppo metilico rispetto all'anello pirrolico ed in secondo luogo viene esteso lo studio degli effetti di coniugazione del C=O con il sistema pirrolico ad altri sostituenti del tipo $-\text{CO}-\text{R}$ ($\text{R} = -\text{H}$, $-\text{CH}_3$, $-\text{OCH}_3$), sia con osservazioni nell'U. V. che con misure nell'I. R. sulla vibrazione di « stretching » dell' NH imminico.

I valori trovati sono riportati nelle Tabelle I e II.

(6) C. TOTARO, *Una osservazione sulle condizioni al contorno della elettrodinamica dei corpi in moto*, « Boll. U.M.I. », vol. 12, pp. 609-611 (1957).

(*) Lavoro eseguito presso gli Istituti di Chimica Generale ed Inorganica e di Chimica Organica dell'Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) M. SCROCCO e R. NICOLAUS, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XXII, 311 (1957).

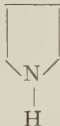
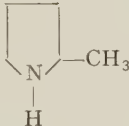
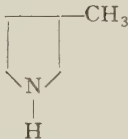
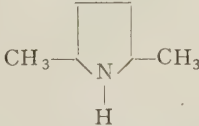
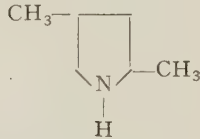
(2) M. SCROCCO e R. NICOLAUS, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XXII, 500 (1957).

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Abbiamo accennato che l'introduzione di gruppi metilici negli esteri α e β pirrolici danno origine a delle sensibili modificazioni nella distribuzione elettronica dei monoesteri pirrolici e tali fenomeni non appaiono sempre spiegabili con effetti di carattere iperconiugativo.

In questo lavoro viene presa in esame una serie di pirroli metil sostituiti e vengono osservati gli effetti che l'introduzione di uno o due metili, nelle diverse posizioni disponibili, ha sulla $\Delta\nu$ della frequenza di stretching dell'NH.

TABELLA I.

Sostanza . .					
$\nu_{\text{N-H}}$. . .	3502 3426	3496 3405	3457 3431 3422 3414 3410 3407	3484 3400	3496 3408
$\Delta\nu$	76	91	~ 87	84	88

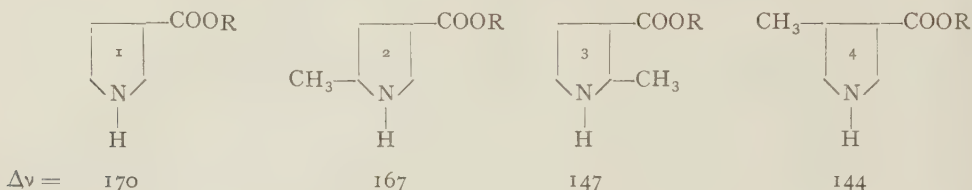
Nella Tabella I è possibile vedere come l'introduzione di uno o due metili (quando nell'anello non siano presenti altri sostituenti in coniugazione) non perturbano molto l'equilibrio elettronico dell'anello stesso, risultando il valore della $\Delta\nu$ molto prossimo a quello del pirrolo semplice.

È comunque osservabile sull'NH un debole effetto di segno contrario a quello che ci si aspetterebbe da un effetto iperconiugativo diretto. La $\Delta\nu$ nei composti metilati è, infatti, sempre un poco maggiore di quella del pirrolo.

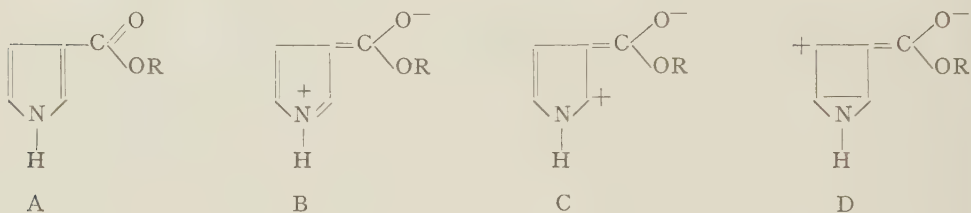
Con buona probabilità in questi sistemi le delocalizzazioni di carica delle forme di risonanza polari del pirrolo sono sufficientemente stabili da non essere sensibilmente turbate dal debole contributo iperconiugativo dovuto all'introduzione di un metile.

Quando il campo di coniugazione diventa più esteso per l'introduzione, per esempio di un carbossile, l'effetto sulla $\Delta\nu$ può apparire invertito.

Riprendiamo in esame l'effetto che l'introduzione di un metile nell'estere β pirrol-carbonico ha sulla $\Delta\nu$ di stretching dell'NH:



e le forme di risonanza proposte per l'estere β pirrol-carbonico:



Nel composto 2 l'introduzione di un $-\text{CH}_3$ in posizione 5 non provoca perturbazione in nessuno degli schemi di risonanza proposti. Nei composti 3 e 4, invece, l'introduzione del metile nelle posizioni 2 e 4 stabilizza rispettivamente le forme C e D.

Tali stabilizzazioni diminuiscono il contributo alla risonanza della forma B che è quella con l'azoto protonizzato: da cui l'abbassamento del valore della $\Delta\nu$.

Quanto ai sostituenti del tipo $\text{CO}-\text{R}$, da un riesame della frequenza del $\text{C}=\text{O}$ nei due esteri monocarbossilici osservata in soluzione di CCl_4 ed a più forte risoluzione si è visto che le bande singole che erano state da noi precedentemente trovate usando soluzioni in diossano, rispettivamente a 1700 cm^{-1} per l'acido β pirrol-carbonico e a 1677 cm^{-1} per l'acido α pirrol-carbonico, risultano sdoppiate e con dei valori di 1712 (f) e $1698\text{ (mf)}\text{ cm}^{-1}$ per il primo e di 1715 (mf) e $1697\text{ (f)}\text{ cm}^{-1}$ per il secondo.

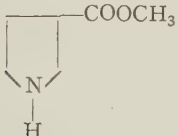
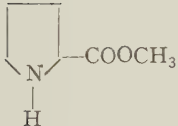
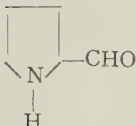
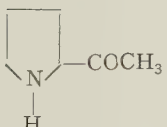
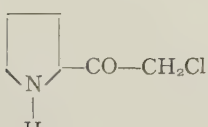
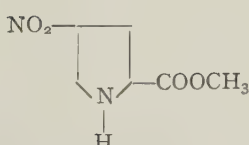
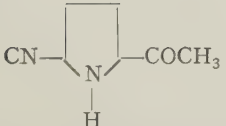
La posizione delle bande nei due composti è quindi la medesima, la differenza essendo solo nelle loro intensità relative. Questo spiega perché da misure con minore potere risolutivo risultasse all'osservazione solo la banda di intensità maggiore.

Ritenendo che tali due bande siano rispettivamente attribuibili l'una ad una vibrazione libera e l'altra ad una vibrazione chelata del $\text{C}=\text{O}$ ⁽³⁾, si deve supporre che la chelazione è più stabile nel composto α sostituito che non nel β sostituito.

Nella Tabella II sono stati riportati i dati infrarossi ed ultravioletti per una serie di pirroli con un gruppo carbonilico di diversa natura sostituito in posizione α .

(3) P. CHIORBOLI, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XII, 588 (1952).

TABELLA II.

Sostanza	I. R.			U. V.	
	$\nu_{\text{N-H}}$ sol. CCl_4	$\Delta\nu$	$\nu_{\text{C=O}}$ sol. CCl_4	λ_{max}	log. ϵ
	3490 <i>f</i> 3320 <i>mf</i>	170	1712 <i>f</i> 1698 <i>mf</i>	240	3,82
	3472 <i>mf</i> 3326 <i>f</i>	146	1715 <i>mf</i> 1697 <i>f</i>	234,5 261	3,82 4,22
	3468 <i>dd</i> 3284 <i>f</i>	184	1666 1650	246 279	3,73 4,27
	3466 <i>dd</i> 3294 <i>f</i>	172	1662 1640	(239) 247 276,5	(3,59) 3,61 4,21
	ins.	—	1663 1639	246 288,5	3,6 4,3
	ins.	—	ins.	229 285	4,26 3,75
	ins.	—	ins.	248 265	3,85 3,80

I dati U. V. sono stati ottenuti da soluzioni in esano spettroscopicamente puro.

Per questi composti, come si osserva dalla Tabella, sono stati registrati sempre due massimi, tranne che per l'estere β pirrol-carbonico nel quale compare una sola banda.

Il primo dei due massimi è di dubbia assegnazione, ma il secondo è stato attribuito ⁽⁴⁾ ad una transizione di tipo $N \rightarrow V$ nella quale entrano in gioco gli elettroni π del $C=O$ in coniugazione con l'anello.

Dai valori trovati si può osservare che la coniugazione del carbonile aumenta nell'ordine $CHO > COCH_3 > COOCH_3$.

Questa sequenza è confermata dai valori decrescenti, in numeri d'onda, della vibrazione *libera* dell' NH .

È da notare a questo proposito che non solo varia la posizione dell'assorbimento a frequenza più alta, ma varia anche in maniera notevolissima l'intensità relativa delle due bande *associata* e *libera*.

Negli esteri pirrolici tali bande, in soluzioni sufficientemente diluite, sono circa dello stesso ordine di grandezza mentre nel chetone e nell'aldeide la differenza tra le due intensità è rimarchevolissima essendo sempre, la banda a frequenza più alta, molto debole. La scarsa influenza che la diluizione ha sull'intensità della banda *libera* dell' NH , fa pensare che in questi ultimi composti la chelazione intramolecolare abbia un ruolo importante.

Inoltre il progressivo aumento della coniugazione nella serie, per ovvie ragioni di delocalizzazioni di carica, deve favorire la formazione di chelazioni sia inter che intramolecolari e questo trova conferma sia negli alti valori della $\Delta\nu$ sia, come abbiamo detto, nei decrescenti valori dell'intensità di assorbimento della ν libera dell' NH .

PARTE SPERIMENTALE.

Misure spettrofotometriche. - Le misure I. R. sono state eseguite su soluzioni in CCl_4 con un apparecchio Perkin-Elmer 112 doppio passo e le misure U. V. con un apparecchio Beckmann D. U. su soluzioni in esano normale accuratamente purificato.

Preparazione delle sostanze.

Pirrol-aldeide. - Questo prodotto è stato ottenuto con l'80 % di resa per formilazione diretta del pirrolo con dimetil formammide e ossicloruro di fosforo (ved. «Org. Synthesis», vol. 36, p. 74).

2-acetil-pirrolo. - Si è ottenuto per azione del cloruro di acetile sul magnesiacio del pirrolo. (Fischer, «Orth». vol. I, p. 184).

(4) G. B. BONINO e A. M. MARINANGELI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», XIX, 222 (1955).

2-carbometossi-4-nitropirrolo. — Si è ottenuto per condensazione della sodio-nitro-malon-dialdeide con cloridrato dell'estere etilico della glicocollo per successive esterificazioni con diazometano. (W. Hale, M. Honan, « J.A.C.S. », 37, 2539, 2845 (1915)).

2-cian-5-acetil-pirrolo. — Si è preparato per riscaldamento di un'ora della pirrol 2-aldossima con anidride acetica aggiunta di acetato sodico. (Fischer, « Orth Ann. », 502, 264 (1933)).

2-cloro-acetil-pirrolo. — Si è ottenuto per azione del cloruro di cloro-acetil-pirrolo sul magnesiaco del pirrolo. (Fischer, « Orth », vol. I, p. 184).

2-metil-pirrolo. — Si è ottenuto per distillazione su KOH in corrente di azoto del semicarbazone della pirrol-aldeide (« J. Org. Chem. », 21, n. 8, 918).

2-5-dimetil-pirrolo. — Si è preparato mediante ciclizzazione dell'acetone con un eccesso di NH_3 alcoolica sotto pressione (« Paal-B. », 18, 2251 (1885)).

3-metil-pirrolo. — Si è ottenuto dal 3-metil 2,4-dicarbetoossi-pirrolo-5-aldeide per riscaldamento con un eccesso di calce sodata. (Fischer, « Orth », vol. I, p. 41).

2-4-dimetil-pirrolo. — Si è preparato dal 2,4-dimetil-3,4-dicarbetoossi-pirrolo per riscaldamento con KOH (Fischer, « Orth », vol. I, p. 42).

Tutti i composti studiati sono risultati cromatograficamente puri.

Biochimica. — *Sull'Elastina. — Prime osservazioni sui prodotti della sua parziale idrolisi alcalina* (*). Nota di LORENZO GOTTE e VITTORIO MORET, presentata (**) dal Corrisp. A. RONCATO.

In una Nota precedente [1] ci siamo interessati dell'estrazione dell'elastina e abbiamo riferito che dopo aver sottoposto il ligamento nucale bovino per 60 minuti al trattamento alcalino, il residuo insolubile, rimasto libero dal collagene, si presentava all'osservazione istologica e col microscopio elettronico come elastina pura.

Questa era particolarmente resistente all'azione alcalina in quanto rimaneva insolubile e praticamente costante in peso per circa due ore.

Soltanto dopo circa due ore di trattamento alcalino, la fibra elastinica cominciava a solubilizzarsi in modo evidente e la solubilizzazione diventava completa in circa 8 ore dando origine ad una soluzione colloidale (elastolisato).

In questa Nota le nostre osservazioni si sono ampliate nel tentativo di contribuire alla conoscenza della complessa struttura dell'elastina. Su questo argomento le ricerche sono piuttosto scarse, a causa, secondo noi, soprat-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Istologia ed Embriologia e Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

tutto della insolubilità della elastina in solventi blandi. È noto che per lo studio di queste proteine fibrose insolubili il metodo più comunemente usato consiste nell'esame dei prodotti ottenuti nella solubilizzazione della proteina stessa per incompleta e graduale idrolisi.

Adair [2], Partridge e Davis [3], Bendall [4] hanno studiato la solubilizzazione della elastina in ambiente acido (ossalico ed acetico M/4 per 6 ore a 100 °C) ed hanno osservato che per un processo di idrolisi acida incompleta questa proteina dà origine a due frazioni non dializzabili (aventi peso molecolare di circa 84.000 e rispettivamente 6000) e una frazione dializzabile costituita da piccoli peptidi a basso peso molecolare e da acido aspartico e glutammico come soli amminoacidi liberi.

Mancano invece in letteratura notizie circa i prodotti ottenibili per idrolisi incompleta in ambiente alcalino. Per questo abbiamo ritenuto degno di interesse rivolgere la nostra attenzione alla soluzione colloidale che abbiamo ottenuto dalla solubilizzazione dell'elastina in NaOH 0,1 N, perché era logico pensare che tale soluzione, essendo colloidale, contenesse i prodotti della idrolisi incompleta dell'elastina stessa (polipeptidi più o meno complessi ed eventuali amminoacidi liberi).

PARTE SPERIMENTALE E RISULTATI.

L'elastolisato alcalino è stato esaminato col microscopio elettronico per osservare quali modificazioni submicroscopiche si accompagnassero a questa degradazione idrolitica delle fibre elastiche.

A tale scopo 10 ml di elastolisato alcalino (corrispondente a circa 100 mg di elastina di partenza) sono stati desalificati e successivamente diluiti con H₂O bidistillata in modo da avere una concentrazione finale di soluto pari a 1 : 10.000.

L'elastolisato alcalino, al microscopio elettronico si presenta come un sistema polidisperso. Infatti, come si può vedere nella fig. 1, la struttura fibrosa dell'elastina è completamente scomparsa, mentre appaiono delle formazioni globulari di diversa dimensione, della grandezza media di 500 Å. Per poter stabilire quale stadio di idrolisi fosse stato raggiunto nella solubilizzazione dell'elastina, abbiamo ritenuto opportuno sottoporre l'elastolisato alla precipitazione frazionata con concentrazioni crescenti di acido tricloroacetico. Questo, come è noto, a seconda della concentrazione, permette di separare le frazioni a diverso peso molecolare, prodotte da una idrolisi incompleta delle proteine, in quanto ad una concentrazione del 5 % esso precipita le frazioni a peso molecolare elevato, a concentrazione compresa fra il 5 ed il 20 % i polipeptidi a P. M. intermedio, mentre i piccoli peptidi ed eventuali amminoacidi rimangono in soluzione (Boulanger e Biserre [5]). I risultati sono esposti nel grafico seguente (fig. 2).

La quota che precipita al 5 % di tricloroacetico è circa il 23 % rispetto al peso iniziale di elastina, mentre quella che precipita dal 5 al 20 % è circa il 4 % circa. Il 73 % del peso iniziale non è precipitabile.

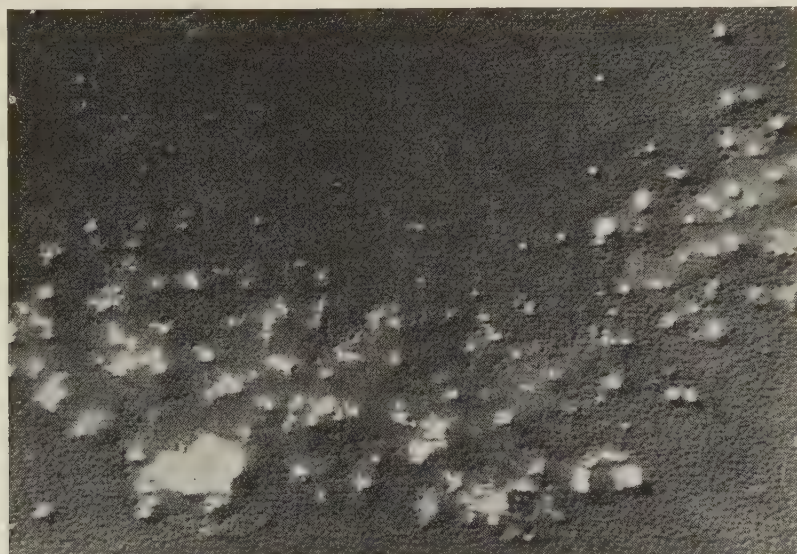


Fig. 1. - Elastolisato alcalino (desalficato).

Diluizione 1:10.000 in H_2O bidistillata. - Ombreggiatura oro-manganina - (17.500 \times).

Abbiamo anzitutto rivolto la nostra attenzione a questa frazione non precipitabile, lasciando da parte per il momento l'esame delle altre due frazioni, il quale sarebbe stato lungo ed indaginoso, essendo costituito da miscele di polipeptidi complessi.

Per vedere se la frazione non precipitabile, oltre che peptidi a basso peso molecolare, contenesse anche amminoacidi liberi, l'abbiamo dializzata contro acqua distillata ed il dializzato, concentrato sotto vuoto fino a secchezza mediante liofilizzazione, è stato sottoposto ad esame cromatografico su carta integrato da prove elettroforetiche⁽¹⁾.

Questo esame cromatografico ha messo in evidenza che nel dializzato dello elastolisato alcalino non sono presenti amminoacidi liberi ma soltanto peptidi. Queste fra-

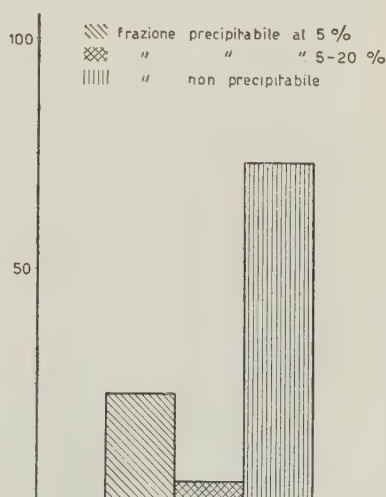


Fig. 2. - Frazioni ottenute dall'elastolisato alcalino per precipitazione frazionata con acido tricloroacetico.

(1) Tali frazioni sono state separate cromatograficamente usando come solvente fenolo/HCN e butanolo/acido acetico. Esse non si sono ulteriormente risolte sottoponendole ad una corsa elettroforetica (perpendicolare alla corsa cromatografica) in acido acetico M/5 per 3 ore a 450 Volts ed in Acetato-Na M/10 pH 5 per 3 ore a 190 Volts. Per stabilire se tali frazioni, colorabili con la ninidrina, fossero amminoacidi o peptidi, le abbiamo separatamente eluite, liofilizzate, idrolizzate con HCl 6N per 48 ore, liofilizzate di nuovo e ricromatografate.

zioni peptidiche separatamente eluite ed idrolizzate si sono dimostrate costituite dai seguenti amminoacidi.

Frazione 1 ^a	Frazione 2 ^a	Frazione 3 ^a	Frazione 4 ^a	Frazione 5 ^a
Ac. Glutammico	Ac. Glutammico	Ac. Glutammico	—	—
Ac. Aspartico	Ac. Aspartico	Ac. Aspartico	—	—
Glicina	Glicina	Glicina	Glicina	Glicina
Alanina	Alanina	Alanina	Alanina	Alanina
Valina	—	Valina	Valina	Valina
Leucina	Leucina	Leucina	Leucina	Leucina
Lisina	—	—	—	—
—	Prolina	Prolina	Prolina	Prolina

Queste frazioni peptidiche diversificano dunque fra di loro per la loro diversa composizione in amminoacidi qualitativa e quantitativa, come si può dedurre dalla tabella ed anche dal confronto delle intensità delle macchie nei cromatogrammi di fig. 3, relativi a due delle cinque frazioni.

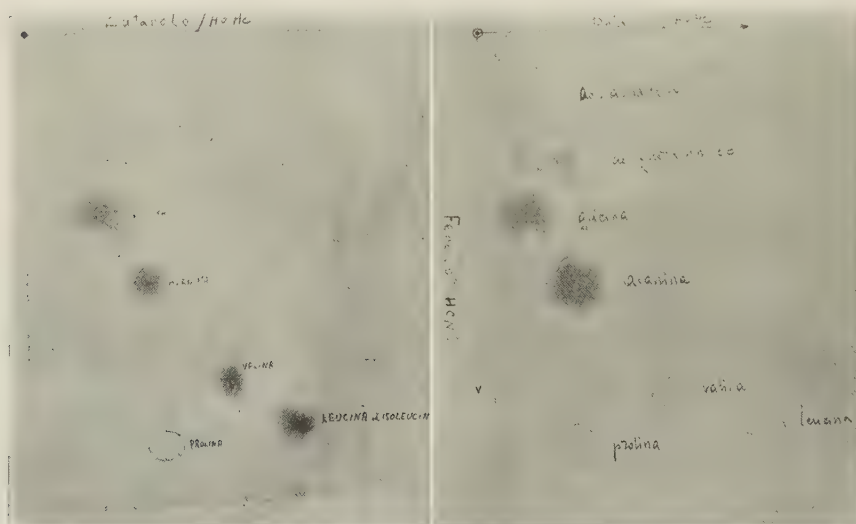


Fig. 3. - Composizione in amminoacidi di due delle frazioni separate cromatograficamente su carta.

In tutte queste frazioni sono presenti glicina, alanina, valina, leucina ma in rapporto quantitativo diverso a seconda della frazione; inoltre, mentre in alcune frazioni è presente la prolina e sono assenti acido aspartico e glutammico, in altra avviene l'opposto. La seconda frazione si differenzia dalle

altre per una grande prevalenza di glicina sugli altri amminoacidi. In tutti questi peptidi a basso peso molecolare mancano molti amminoacidi (in particolare quelli aromatici e gli ossiamminoacidi) presenti nell'elastina.

In base a questi dati ci sembra di poter concludere che la solubilizzazione della elastina in ambiente alcalino avviene senza mettere in libertà singoli amminoacidi, a differenza di quella in ambiente acido che mette in libertà prima acido aspartico e poi acido glutammico (Adair e coll., loc. cit. [3]).

Non possiamo dire se nella solubilizzazione alcalina l'attacco idrolitico nella struttura dell'elastina avvenga preferenzialmente a livello di qualche particolare legame perché per poter dirimere tale questione bisogna ovviamente esaminare anche i polipeptidi precipitabili della soluzione colloidale e ripetere tale esame in diversi stadi della solubilizzazione stessa.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] V. MORET, L. GOTTE, « Rend. Accad. Naz. Lincei », XXIII, 153 (1957).
- [2] G. S. ADAIR, H. F. DAVIS, S. M. PARTRIDGE, « Nature », 167, 605 (1952).
- [3] S. M. PARTRIDGE, H. F. DAVIS, G. S. ADAIR, « Biochem. J. », 61, 11 (1955).
- [4] J. R. BENDALL, « Biochem. J. », 61, 31 (1955).
- [5] P. BOULANGER, G. BISERTE, *Chemical Structure of Proteins*. (CIBA Foundation), 1953, p. 163.

Zoologia. — *La spermatogenesi secondaria in Asterina e la colorazione degli individui proteroginici di Asterina gibbosa* (*). Nota di GIUSEPPE COGNETTI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Riprendendo una serie di ricerche sulla variabilità sessuale in popolazioni di *Asterina* del Golfo di Napoli ho potuto osservare per mezzo di allevamenti e di sezioni istologiche che in *Asterina pancerii* si ha ermafroditismo proteroginico seguito da una spermatogenesi che interessa solamente pochi elementi germinali⁽¹⁾. Già nel 1954⁽²⁾ fu dimostrata l'esistenza di alcuni spermi dopo la deposizione delle uova anche negli individui di *A. gibbosa* del Fusaro presso Napoli, che sono in genere proterandrici⁽³⁾.

Un esame comparativo della produzione di spermi in *A. gibbosa* e in *A. pancerii* aveva permesso di concludere che in quest'ultima specie è pre-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia e Zoologia generale dell'Università di Sassari con contributi del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) G. COGNETTI, « Boll. Zool. Napoli », vol. 21, 77-80 (1954).

(2) C. HAUENSCHILD, « Zool. Jahrb. (Phys.) », vol. 65, 43-53 (1954).

(3) L. CUENOT, « Zool. Anz. », vol. 21, 273-279 (1898); G. BACCI, « Arch. Zool. It. », vol. 34, 49-74 (1949).

sente, dopo la deposizione delle uova, un numero di spermatozoi inferiore alla prima ⁽⁴⁾. Mi sono ora occupato di stabilire in quale stagione ed in quale fase della maturazione cominciano a comparire nelle gonadi ancora in fase femminile di *A. gibbosa* e di *A. pancerii*, i primi spermatociti e spermatidi.

All'inizio del mese di marzo, quando ha inizio il 3° periodo di accrescimento ovocitario (fase vitellogenetica del Vannini ⁽⁵⁾), durante il quale gli

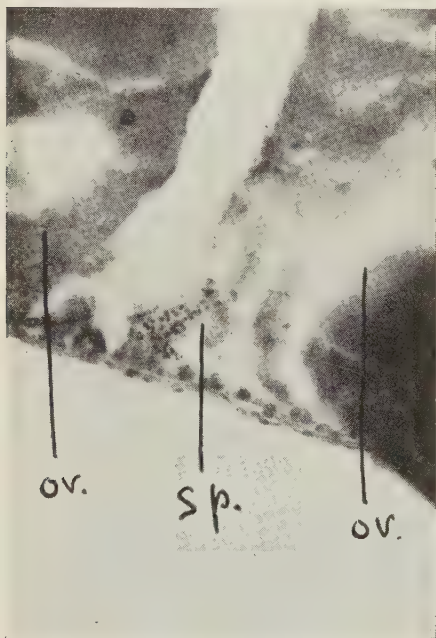


Fig. 1. - Sezione di una gonade di *Asterina pancerii* durante il 3° periodo di accrescimento ovocitario. (ov. = ovociti; sp. = spermatozoi).

ovociti si accrescono enormemente rimanendo compressi gli uni contro gli altri fra le pareti della gonade, si notano negli interstizi lasciati liberi dagli ovociti accanto alle pareti delle gonadi, gruppetti di spermatidi isolati nel lume della gonade e raccordati variamente con cordoni di spermatociti che si protrendono dall'epitelio germinale (fig. 1). Osservazioni fatte sporadicamente nei mesi di ottobre, novembre e dicembre avevano rivelato l'assenza di spermatidi nelle gonadi in fase femminile con ovociti in 2° periodo di accrescimento. Queste osservazioni sono state compiute su individui provenienti dal Golfo di Napoli e dalle coste nord occidentali della Sardegna (Portotorres). Sembra dunque lecito affermare che quella che potremo chiamare la fase spermatogenetica secondaria in *A. gibbosa* e *A. pancerii* abbia inizio contemporaneamente con la 3ª fase di sviluppo degli ovociti.

Questa osservazione pone alcuni problemi riguardanti la successione e il modo di azione dei fattori femminilizzanti e mascolinizzanti in *Asterina* in quanto ci fornisce un esempio di sovrapposizione della loro influenza nel tempo senza che per il momento mi sia possibile rilevare una qualche localizzazione differenziale delle zone di sviluppo degli spermatociti rispetto agli ovociti, come si riscontra in molti altri ermafroditi.

Ho potuto poi confermare con un maggior numero di osservazioni il fatto che in *Asterina gibbosa*, la spermatogenesi secondaria è costantemente più imponente che in *A. pancerii*. Ciò avvalorava l'interpretazione secondo la quale la specie proteroginica sarebbe originata da un'altra specie ermafrodita a forte variabilità sessuale per selezione di geni femminili o di geni modificatori con azione femminilizzante.

(4) G. COGNETTI, « Boll. Zool. Napoli », vol. 23, 275-277 (1956).

(5) E. VANNINI, « Boll. Zool. Napoli », vol. 21, 649-708 (1954).

Per quanto riguarda la variabilità sessuale nella popolazione di *A. gibbosa* del Fusaro ricordo che la maggior parte degli individui è ermafrodita proterandrica mentre una parte di essi non attraversa la fase maschile primaria ed un'altra presenta una netta prevalenza delle fasi maschili. Questi individui furono paragonati dal Bacci ai maschi e alle femmine pure dei casi più estremi di ermafroditismo non bilanciato ⁽⁶⁾. Recenti osservazioni personali mi hanno permesso di stabilire che gli individui nei quali è abolita la fase spermatogenetica nel primo periodo di maturità sessuale si distinguono esternamente da tutti gli altri componenti proterandrici della popolazione per il colore verde cupo del tegumento. Essi costituiscono il 20 % all'incirca degli individui delle stesse classi di grandezza raccolti negli scogli circostanti la palazzina di caccia del Fusaro. Ritengo interessante segnalare senza volerne trarre conclusioni troppo affrettate che il fenotipo di questi individui prevalentemente femminili somiglia a quello degli esemplari di colorazione verde di *A. panzerii* che si raccolgono nelle praterie di Posidonia nel Golfo di Pozzuoli.

La spermatogenesi secondaria di tali individui di *A. gibbosa* si manifesta con la produzione di pochi spermatociti e spermatozoi esattamente come avviene in tutti gli individui di *A. panzerii*. Ciò conferma ancora una volta gli stretti legami che esistono fra la variabilità sessuale di *A. gibbosa* e la ridotta variabilità di *A. panzerii*.

Genetica. — *Selezione e rapporto dei sessi nel Copepode Harpacticoides Tisbe gracilis (T. Scott)* ^(*). Nota di BRUNO BATTAGLIA, presentata ^(**) dal Corrisp. V. D'ANCONA.

La questione della variabilità del rapporto-sessi nei Copepodi Harpacticoidi è stata già accennata in miei precedenti lavori ^(1,2,3). Si tratta di un problema particolarmente complesso in quanto, pure essendoci vari indizi che la sessualità di questi Copepodi sia influenzata da fattori ambientali e genetici a un tempo, non è stato sinora possibile stabilire quale parte spetti ai primi, quale ai secondi. La prevalenza di uno o dell'altro tipo di fattori sembra inoltre variare da specie a specie.

Al fine di chiarire il più possibile la questione, ho intrapreso una serie di ricerche di cui, nella presente Nota, vengono riferiti i primi risultati. La

(6) G. BACCI, « *Experientia* », vol. 7, 31 (1951).

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Zoologia e Anat. comp. e la Stazione Idrobiologica dell'Università di Padova, con contributi del Centro di Studi Talassografici del C.N.R. Ringrazio il prof. B. Colombo, dell'Ist. Universitario di Economia e Commercio di Venezia, per i consigli datimi nell'elaborazione statistica dei risultati.

(**) Presentata nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) B. BATTAGLIA, « *Ann. Biol.* », 33, fasc. 5-6, 259 (1957).

(2) B. BATTAGLIA, « *Arch. Ocean. e Limnol.* », XI, 29 (1957).

(3) B. BATTAGLIA, « *Rapp. et Proc. Verb. Comm. Int. Expl. Sc. Mer. Medit.* », 14 (1957).

specie studiata è la *Tisbe gracilis* (T. Scott) che da qualche tempo è in allevamento nei nostri laboratori.

Nel corso di una precedente ricerca sulla biologia di questa specie ⁽²⁾ avevo osservato che il rapporto dei sessi presentava una elevata variabilità. Su 17 famiglie analizzate per questo carattere si è ottenuto un χ^2 di eterogeneità = 204,96, con una probabilità inferiore al 0,001. Basandomi su questa osservazione ho voluto vedere se e con quali modalità il rapporto dei sessi fosse un carattere ereditabile. A tale fine ho eseguito alcuni esperimenti di selezione che ho portato avanti per 6 generazioni consecutive. Non mi è stato possibile andare oltre poiché gli esperimenti venivano condotti in condizioni di inincrocio cosa che, in questa specie, comporta in tutti i casi una sensibile caduta della prolificità alla quarta o quinta generazione.

Sono stati eseguiti tre esperimenti contemporaneamente. Nel primo, che serviva da controllo, si è proceduto prelevando di volta in volta femmine ovigere a caso, senza cioè selezionare individui che provenivano da famiglie con un determinato rapporto-sessi. Nel secondo esperimento si è proceduto alla selezione di femmine che derivavano da famiglie con un rapporto-sessi spostato a favore del sesso ♀. Nel terzo esperimento si è invece selezionato verso il sesso ♂. Le femmine ovigere isolate nel corso dei tre esperimenti erano state fecondate da maschi fratelli presenti nelle culture da cui esse provenivano e ciò spiega come, col procedere delle generazioni, aumentasse il grado di inincrocio. I dettagli di tecnica verranno forniti caso per caso.

Esperimento di controllo (inincrocio senza selezione).

Da una famiglia che aveva dato discendenza con un rapporto-sessi uguale approssimativamente a 1:1, vennero isolate 15 femmine appena ovigere. Le prime 5 di queste femmine furono utilizzate per l'esperimento di controllo: dalla discendenza di ciascuna delle cinque femmine venivano isolate 2 femmine, prese a caso; dalla discendenza di ciascuna di queste 2 femmine veniva isolata 1 femmina, oppure 2 da una stessa femmina madre qualora l'altra non avesse dato prole, e così di seguito sino alla sesta generazione. I dati dell'esperimento sono riportati nelle Tabelle I e II. Solo per la famiglia 3 è stato possibile giungere alla sesta generazione. Le altre famiglie infatti si sono estinte prima a causa di un rapido raggiungimento di rapporti col 100% di maschi o perché le due femmine isolate non avevano dato prole (per mancata deposizione o mancato sviluppo del sacco ovigero). Dall'esame dei dati e del grafico relativo (fig. 1), risulta evidente che il progredire dell'inincrocio comporta uno spostamento del rapporto-sessi a favore dei ♂♂. Il confronto tra le prime tre e le seconde tre generazioni di inincrocio dimostra la significatività statistica dello spostamento stesso (Tabella III). Il confronto eseguito tra le generazioni successive, prese due alla volta, indica che gli spostamenti significativi si sono avuti soltanto tra la prima e la seconda generazione ($\chi^2 = 5,4160$, $P = 0,02$) e tra la terza e la quarta ($\chi^2 = 20,2131$, $P < 0,001$).

TABELLA I.

Esperimento di controllo (inincrocio senza selezione).

I valori in alto si riferiscono agli individui che hanno raggiunto lo stato adulto. I numeri in basso, in corsivo, indicano le percentuali di maschi.

Generazione	Famiglia				
	1	2	3	4	5
1	28 96,22		57 70,17	54 70,37	89 44,94
2	43 95,34	40 87,5	45 82,22	65 80,00	88 70,45
3	61 86,88	13 100,00	47 89,36	59 72,88	49 59,18
4	85 97,64		60 88,33	37 91,89	11 100,00
5	—		11 100,00	10 80,00	—
6			45 84,44	—	—

TABELLA II.

Esperimento di controllo. Totali figli adulti, percentuali medie ♂♂ e numeri medi figli adulti per cultura, calcolati dai dati della Tabella I.

Generazione	Totale figli adulti	% media osservata ♂♂	N. medio di figli adulti per cultura
1	280	69,64	56,00
2	368	77,71	52,57
3	331	78,85	47,28
4	242	92,56	48,40
5	49	91,83	16,33
6	72	88,88	36,00

Questo incremento del rapporto-sessi a favore dei maschi, in condizioni di inincrocio, non è un fatto nuovo. È stato osservato anche in *Tibse reticulata* ed è un fenomeno che si manifesta costantemente in entrambe le specie di *Tisbe*.

TABELLA III.

Esperimento di controllo. Confronto tra i rapporti dei sessi nelle tre prime e nelle tre seconde generazioni.

Generazioni	♂♂	♀♀	Totale	% media oss. ♂♂	χ^2 1 g.l.	P
1-2-3	742	237	979	75,79	42,24	< 0,001
4-5-6	333	30	363	91,73		

Selezione verso un incremento delle femmine.

L'esperimento è stato eseguito partendo dalle stesse 15 femmine isolate per l'esperimento precedente, provenienti da una famiglia con rapporto sessi di circa 1:1. Venivano quindi prelevate 12-15 femmine ovigere dalla famiglia col maggior numero relativo di femmine. Si è proceduto a questa

selezione per sei generazioni successive. I dati sono riportati nella Tabella IV e l'andamento della selezione nel grafico della fig. 1. Anche qui, come nel caso precedente, le femmine isolate di volta in volta erano state fecondate da maschi fratelli, tuttavia lo spostamento verso il sesso maschile, dovuto all'inincrocio non ha avuto luogo. Al contrario, la selezione ha portato verso un aumento del numero relativo di femmine rispetto alla generazione di partenza.

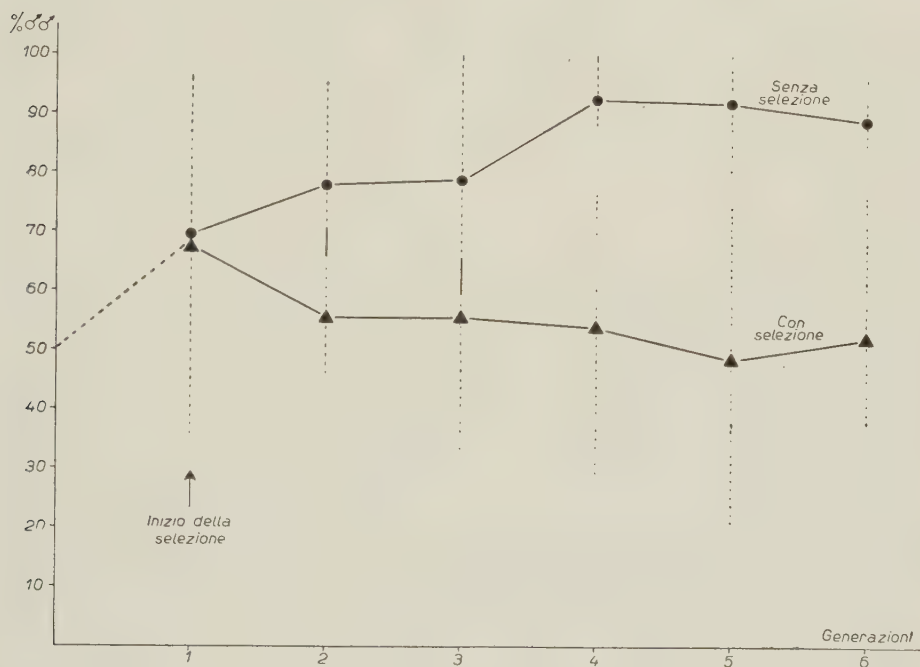


Fig. 1. — Comportamento del rapporto dei sessi nell'esperimento di controllo (inincrocio senza selezione) e nell'esperimento di selezione verso un incremento delle femmine.

I segmenti verticali tratteggiati indicano il campo di variazione.

Il confronto tra le prime tre e le seconde tre generazioni rivela uno spostamento statisticamente significativo (Tabella V). La differenza è però, in questo caso, dovuta soltanto ad una drastica variazione tra la prima e la seconda generazione ($\chi^2 = 14,9761$, $P < 0.01$). Dalla seconda generazione in avanti il rapporto-sessi si è stabilizzato a un livello press'a poco costante, e ciò di per sé è prova dell'efficacia della selezione, in quanto, pur progredendo il grado di inincrocio, non ha avuto luogo l'aumento dei maschi che l'inincrocio senza selezione comporta. Il confronto statistico dei due valori che corrispondono, nella stessa generazione, l'uno alla linea non selezionata, l'altro alla linea selezionata, è stato sempre fortemente significativo (χ^2 da 32,25 a 113,86).

TABELLA IV.
Selezione verso un incremento delle femmine.

Generazione	Numero di figli adulti per famiglia. In corsivo, le percentuali di ♂♂												Totale figli adulti	% media osservata ♂♂	N. medio figli adulti per cultura
1	28	52	57	54	89	56	53	57	21	62	—	—	529	67,86	52,9
	96,22	96,15	70,17	70,37	44,94	76,78	32,07	63,15	76,19	83,87	—	—			
2	57	60	65	42	68	64	63	—	—	—	—	—	419	55,60	59,85
	66,66	55,00	70,76	47,61	44,11	59,37	44,44								
3	47	38	57	57	67	51	62	51	59	—	—	—	489	55,62	54,33
	55,31	60,52	54,38	64,91	65,67	45,09	58,06	31,37	61,01						
4	47	91	34	72	47	75	60	40	68	63	—	—	597	53,76	59,7
	27,65	70,32	76,47	63,88	51,06	50,66	40,00	57,50	41,17	55,55					
5	38	28	53	18	45	39	26	33	38	—	—	—	318	48,42	35,3
	73,68	50,00	32,07	61,11	40,00	33,33	19,23	75,75	60,52						
6	20	55	23	21	20	33	32	34	33	31	59	52	413	51,81	34,41
	50,00	36,36	60,86	76,19	65,00	54,54	65,62	50,00	54,54	48,38	50,84	42,30			

TABELLA V.

Confronto tra i rapporti dei sessi nelle tre prime e nelle tre seconde generazioni di selezione verso un incremento delle femmine.

Generazioni	♂♂	♀♀	Totale	% media oss. ♂♂	χ^2 1 g.l.	P
1-2-3	864	573	1.437	60,12	19,04	< 0,001
4-5-6	689	639	1.328	51,88		

Selezione verso un incremento dei maschi.

Questo esperimento, condotto con la tecnica dell'esperimento precedente, salvo che per il senso in cui è stata operata la selezione, partendo dalle medesime 15 femmine iniziali, non si è potuto continuarlo a lungo per le limitazioni imposte dall'efficacia della selezione stessa. In questo caso, infatti, il rapporto dei sessi è andato spostandosi a favore del sesso maschile assai più rapidamente che nell'esperimento di controllo. Ciò si spiega facilmente se si considera che all'effetto dell'inincrocio si è sovrapposto l'effetto della selezione, entrambe le forze in questo caso operando nella stessa direzione. L'esperimento, eseguito tre volte, è stato sempre sospeso alla terza o alla quarta generazione a causa dell'estremamente rapido rarefarsi del numero delle femmine, per cui diveniva praticamente impossibile proseguire nella selezione.

Il rapporto-sessi nelle progenie derivanti da due sacchi ovigeri successivi.

Abbiamo analizzato il rapporto-sessi nelle discendenze di 14 femmine madri di diversa origine, tenendo conto di due deposizioni successive per ciascuna femmina (Tabella VI). È risultato che in tutti i 14 casi non c'è differenza significativa tra il rapporto-sessi del primo e del secondo sacco ovigero, mentre c'è sempre una notevole eterogeneità tra i rapporti-sessi nelle discendenze delle diverse femmine. Si tenga presente che le culture in cui si sono sviluppati i sacchi ovigeri erano tenute in condizioni di massima uniformità tra loro. I risultati pertanto suggeriscono indirettamente sia l'esistenza di una base genetica nelle differenze tra famiglie ⁽²⁾, sia che le differenze stesse non possono essere attribuite a mortalità differenziale se non in misura insignificante. Il rapporto-sessi non differisce infatti sensibilmente nei due sacchi ovigeri successivi anche quando è notevolmente diverso il numero di figli, sviluppatasi dai sacchi stessi, che hanno raggiunto lo stadio adulto (cfr., per esempio, le femmine 1, 2 e 3 della Tabella VI).

TABELLA VI.

Confronto tra i rapporti dei sessi nelle discendenze provenienti da due sacchi ovigeri successivi.

Femmina madre	Sacco ovigero	♂♂	♀♀	Totale	χ^2 1 g.l.	P
1	1° 2°	38 12	16 9	54 21	1,1904	0,30-0,20
2	1° 2°	40 21	49 35	89 56	0,7792	0,50-0,30
3	1° 2°	43 29	13 7	56 36	0,1822	0,70-0,50
4	1° 2°	17 8	36 31	53 39	1,5146	0,30-0,20
5	1° 2°	36 56	21 19	57 75	2,029	0,20-0,10
6	1° 2°	16 15	5 15	21 30	3,555	0,10-0,05
7	1° 2°	52 42	10 15	62 57	1,8572	0,20-0,10
8	1° 2°	38 51	19 13	57 64	2,6275	0,20-0,10
9	1° 2°	33 39	27 17	60 56	2,6427	0,20-0,10
10	1° 2°	46 45	19 22	65 67	0,1986	0,70-0,50
11	1° 2°	30 35	38 26	68 61	2,2632	0,20-0,10
12	1° 2°	38 30	26 32	64 62	1,5347	0,30-0,20
13	1° 2°	28 34	35 35	63 69	0,31	0,70-0,50
14	1° 2°	43 35	8 9	51 44	0,3648	0,70-0,50
χ^2 totale, 14 gr. di lib.					21,0491	0,20-0,10

In conclusione, dagli esperimenti di selezione e dal confronto dei rapporti-sessi tra discendenze originate da sacchi ovigeri successivi, risulta l'esistenza di genotipi sessuali diversi. I fatti osservati possono in parte essere spiegati ammettendo una determinazione per fattori sessuali multipli. Resterebbe però sempre da stabilire con quali modalità è ottenuto l'eccesso di maschi in condizioni di inincrocio. Si potrebbe forse ammettere, in via del tutto preliminare, che gli eventuali geni principali i quali presiedono alla realizzazione di un sesso o dell'altro siano influenzati dal grado di eterozigosi di altri geni secondari della sessualità, o modificatori. Più precisamente, la realizzazione del sesso femminile sarebbe condizionata da un elevato grado di eterozigosi, mentre condizioni di omozigosi porterebbero al sesso maschile. Quando viene operata la selezione verso il sesso femminile si tenderebbe pertanto ad aumentare anche il grado di eterozigosi ed è ovvio come quest'aumento in pratica non possa avere luogo (si confronti il livello stabilizzato della curva, dalla seconda generazione in avanti) se la selezione è operata in condizioni di inincrocio. Da alcune esperienze preliminari risulta che il sistematico mescolamento di individui provenienti da famiglie diverse, condotto per diverse generazioni, può portare ad un incremento nel numero relativo delle femmine. Quest'osservazione, se confermata, potrebbe convalidare l'ipotesi qui formulata e spiegare il motivo per cui, nelle popolazioni naturali di molte specie di Copepodi Harpacticoidi, il sesso che prevale numericamente è di solito quello femminile⁽⁴⁾.

Vari altri problemi, tra cui quello concernente l'assenza di intersessi fenotipicamente individuabili, sono ancora da risolvere prima di giungere ad una chiara interpretazione dei fenomeni di sessualità in *Tisbe*.

Sono in corso ricerche aventi lo scopo di stabilire se e fino a qual punto le condizioni ambientali influenzino la sessualità di questa specie, come è stato dimostrato per altri Harpacticoidi⁽⁵⁾.

Genetica. — *Indagini sulle variazioni del rapporto sessi in Asellus aquaticus* (*). Nota di GIOVANNA VITAGLIANO TADINI, presentata (**) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

A. Vandel studiando il rapporto dei sessi in parecchie specie di Isopodi terrestri ha trovato e descritto in una numerosa serie di lavori (1938-1945)⁽¹⁾ un fenomeno interessante cui ha dato il nome di *monogenia*. Le femmine monogeniche sono quelle che, accoppiate con qualsiasi maschio, danno sempre

(4) K. LANG, *Monographie der Harpacticiden*, p. 1515, Stoccolma 1948.

(5) N. TAKEDA, « *Physiol. Zoology* », 23, 288 (1950).

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Biologia del CNR presso la Stazione Zoologica di Napoli.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) A. VANDEL, « *Bull. Biol. France et Belg.* », 72, 147-186 (1938); ID., « *Ibid.* » 79, 168-216 (1945).

figli che appartengono tutti o in gran maggioranza ad un sol sesso. Il Vandel ha spiegato il fenomeno supponendo che in questi Isopodi la femmina sia eterogametica per la coppia dei cromosomi sessuali (eterocromosomi) ed attribuendo ad alcune femmine un'alterazione nel meccanismo dell'orientamento della coppia degli eterocromosomi per cui questi, nella cinesi di maturazione, non verrebbero ripartiti a caso, ma uno dei due resterebbe sempre o più frequentemente nell'ovocito e l'altro verrebbe espulso nel globulo polare. Solo le femmine anfigeniche conserverebbero la distribuzione a caso (50 %) degli eterocromosomi sul fuso di maturazione.

Il Vandel riassume i propri risultati raggruppandoli in tre categorie: la prima comprende le specie nelle quali il maggior numero delle femmine sono anfigeniche; oltre a queste ve ne sono poche arrenogeniche o teligeniche pure (nelle quali la percentuale di figli appartenenti ad un sesso è altissima) ed altre nelle quali il fenomeno arrenogenia o teligenia si presenta debolmente (le percentuali dei sessi dei nati oscillano fra il 55 % e l'80 %). La seconda categoria comprende le specie nelle quali tutte le femmine osservate sono anfigeniche. Alla terza categoria appartengono le specie in cui la maggior parte delle femmine sono anfigeniche, e rarissimamente si trovano femmine arrenogeniche o teligeniche, ma queste sono esclusivamente con tendenza estrema (cioè con figli appartenenti tutti ad un sol sesso).

H. W. Howard⁽²⁾ (1942) ha confermato ed esteso (su *Armadillidium*) le ricerche di Vandel e ne ha accettato la interpretazione. Ritiene probabile che monogenia ed anfigenia siano ereditate per via citoplasmatica, o per mezzo del cromosoma *y*.

Il De Lattin (1952)⁽³⁾ ristudiando il fenomeno in *Cylisticus convexus* trovò anche in questo Isopode femmine teligeniche ed arrenogeniche. Notò che le femmine teligeniche incrociate con qualunque maschio anfigenico o arrenogenico danno una F_1 con preponderanza di individui a sesso femminile. Osservò inoltre che le percentuali dei sessi sono diverse da quelle che si dovrebbero aspettare se le femmine fossero eterogametiche ed avessero orientamento costante degli eterocromosomi sul fuso di maturazione. Pertanto egli propose una ipotesi basata su di un meccanismo polifattoriale di determinazione del sesso. Vi sarebbe inoltre un fattore *F*, realizzatore del sesso, dominante, e un gene d'intensificazione *J*, anche dominante, il quale conferisce al gene *F* una epistasi assoluta su tutto il restante sistema realizzatore del sesso: i ceppi provvisti di *J* sarebbero monogenici, quelli con *j* anfigenici.

I risultati di queste ricerche sembrano indicare l'esistenza, negli Isopodi terrestri, di una notevole variabilità sessuale, probabilmente di natura genetica. Le interpretazioni sul meccanismo di realizzazione della monogenia e sulla sua ereditarietà non appaiono però del tutto convincenti. Mi è sembrato, perciò che valesse la pena di estendere le ricerche anche ad altre specie,

(2) H. W. HOWARD, « Journ. of Genet. », 44, 143-159 (1942).

(3) G. DE LATTIN, « Ztschr. f. ind. Abst. u. Vererb. lehre », 84, 536-567 (1952).

e di cercare di interpretare il fenomeno sulla base delle considerazioni svolte da G. Montalenti (1948, 1950)⁽⁴⁾ sulla molteplicità dei genotipi sessuali e le possibili interpretazioni.

Fin dal 1953 ho quindi iniziato una serie di ricerche su *Asellus aquaticus*, di cui alcuni risultati sono già stati pubblicati⁽⁵⁾. Le difficoltà che ho dovuto superare per avere dati statisticamente attendibili sono state notevoli. Messa a punto la tecnica di allevamento, in modo tale da ridurre al minimo la mortalità nei periodi larvale e giovanile, prima che il sesso sia riconoscibile (tale mortalità evidentemente potrebbe alterare l'attendibilità dei dati, nell'ipotesi, che non si può escludere, ch'essa colpisca in modo differente i due sessi) ho dovuto assicurarmi che questa specie non presenta normalmente partenogenesi, e ho dovuto poi determinare il periodo di vitalità degli spermatozoi immessi dal maschio nell'ovidutto, e che persistono anche dopo che la femmina ha partorito.

La partenogenesi può essere esclusa in modo assoluto perché circa tremila femmine sono state tenute isolate fin dalla nascita e per lunghi periodi, e in nessun caso esse hanno avuto discendenza se non fecondate.

Tutti gli individui sono stati tenuti in condizioni uniformi di allevamento: temperatura di 21°; acqua filtrata proveniente dal fiume Sarno; condizioni normali di illuminazione naturale; cibo vegetale pastorizzato.

Nei precedenti lavori⁽⁵⁾ ho dimostrato che pur non esistendo in questa specie monogenia assoluta, si trovano molte coppie la cui discendenza presenta notevole scarto dal rapporto 1 : 1. Ho inoltre constatato che il fenomeno è ereditario, e vari incroci mi hanno fatto escludere che esso sia dovuto a distribuzione non casuale degli eterocromosomi, i quali del resto non esistono in *Asellus* come entità morfologicamente riconoscibili⁽⁶⁾. D'altra parte, contrariamente alle osservazioni di Vandel e di Howard, mi risultò che il maschio ha eguale o maggiore importanza della femmina nella determinazione del rapporto dei sessi nella discendenza. Pertanto ho accettato l'ipotesi che la base genetica della monogenia sia un meccanismo poligenico.

Ho continuato le ricerche con i seguenti intenti: 1° stabilire la eterogeneità della distribuzione del rapporto sessi nelle popolazioni naturali (su questo punto riferirò più ampiamente in un altro lavoro); 2° accertare se uno dei due genitori e quale, abbia maggiore peso nella determinazione del sesso della discendenza; 3° stabilire se l'intensità del fenomeno sia legata alla variazione dei fattori esterni o all'età dei genitori; 4° cercare di riconoscere, mediante opportuni incroci, se l'ipotesi poligenica è atta a dar ragione di questi fenomeni.

(4) G. MONTALENTI, « XIII Congrès International de Zoologie », Paris, 1948; ID., Quaderno N. 22, *I problemi biologici della sessualità*, « Acc. Naz. dei Lincei », 80-103 (1950).

(5) G. VITAGLIANO TADINI, « Atti IX Congr. Intern. Genetica », 2, 953-957 (1953); G. VITAGLIANO TADINI, A. M. MALQUORI, F. MAFFEI, « Boll. di Zool. », 23, 389-396 (1956).

(6) G. VITAGLIANO, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 21, 164-182 (1947).

TABELLA I.

Distribuzione dei sessi nei figli di 9 coppie di Asellus prelevate in natura.

Coppie	Nati	Morti		♀		χ^2	P	Misura della eterogeneità	
		N	%	N	%			χ^2	P
II									
1° parto (T)	39	2	5 %	36	97 %	33,11	< 0,01	0,03	~ 0,90
2° parto (T)	93	4	4 %	88	98 %	85,04	< 0,01		
Somma (T)	132	6	4 %	124	98 %	118,12	< 0,01		
XVII									
1° parto (A)	71	—	—	29	40 %	2,380	> 0,1	5,068	> 0,02
2° parto (A)	98	15	15 %	12	14 %	41,938	< 0,01		
Somma (A)	169	15	8,8 %	41	27 %	39,250	< 0,01		
XXII									
1° parto (T)	49	—	—	30	61 %	2,468	> 0,1	2,670	~ > 0,10
2° parto (N)	106	10	9 %	45	47 %	0,374	> 0,5		
Somma (N)	155	10	6 %	75	52 %	0,172	< 0,7		
XXIV									
1° parto (N)	60	—	—	30	50 %	0		0,100	> 0,70
2° parto (N)	98	—	—	46	47 %	0,366	> 0,5		
Somma (N)	158	—	—	76	48 %	0,266	< 0,7		
XXXI									
1° parto (A)	70	—	—	19	27 %	14,628	< 0,01	4,114	< 0,05
2° parto (A)	64	1	1,5 %	6	9 %	41,284	< 0,01		
Somma (A)	134	1	0,7 %	25	18 %	51,798	< 0,01		
XXXIV									
1° parto (N)	65	5	7,6 %	33	55 %	0,6	< 0,5	0,040	> 0,80
2° parto (N)	76	2	2,6 %	42	56 %	1,350	> 0,2		
Somma (N)	141	7	4,9 %	75	56 %	1,910	< 0,2		
XXXV									
1° parto (A)	59	3	5,6 %	13	23 %	16,070	< 0,01	0,680	> 0,7
2° parto (A)	79	3	3,7 %	13	17 %	32,894	< 0,01		
Somma (A)	138	6	4 %	26	19 %	48,284	< 0,01		
XXXVI									
1° parto (A)	59	—	—	23	39 %	2,864	~ 0,1		
XXXVII									
1° parto (T)	71	2	2,8 %	44	63 %	5,230	> 0,02	10,550	< 0,01
2° parto (A)	92	2	2 %	34	37 %	5,376	~ 0,02		
Somma (N)	163	4	2,5 %	78	49 %	0,056	> 0,8		

Alcuni risultati di questa ricerca sono riassunti nelle Tabelle I-III. La prima dimostra la presenza in natura di coppie aventi discendenza con rapporto dei sessi che non si discosta dal 50 % (N, normale), di altre con rapporto spostato a favore delle femmine (T, teligeniche) e di altre con rapporto spostato a favore dei maschi (A, arrenogeniche). Sulla frequenza dei vari tipi riferirò in altro lavoro. Ognuna di queste coppie ha avuto due parti successivi, in ciascuno dei quali è stato stabilito il rapporto sessi. In alcuni casi il rapporto del secondo parto è stato significativamente diverso dal primo; ma, trattandosi di coppie raccolte in natura, non si può escludere che i figli del primo parto fossero originati da spermatozoi residuati da fecondazioni precedenti da parte di altro maschio.

La Tabella II dimostra alcuni incroci fatti fra individui registrati nella Tabella I, scambiando i coniugi. Si vede che dagli incroci di $\text{♀ A} \times \text{♂ T}$ si ha rapporto normale, dagli incroci $\text{♀ T} \times \text{♂ A}$ si ha rapporto spostato a favore di maschi; dagli incroci $\text{♀ A} \times \text{♂ N}$ si ha rapporto normale. Sembra dunque che il maschio abbia maggiore importanza nel determinare il rapporto dei sessi della discendenza e che la sua influenza sia più intensa quando si tratta di un maschio arrenogenico. Spero di potere in seguito esprimere questi concetti quantitativi con maggiore precisione, cioè con indici numerici.

TABELLA II.

Distribuzione dei sessi nella discendenza di cinque incroci con scambio di coniugi fra individui della Tabella I.

Coppie		Nati	Morti		♀		χ^2	P
♀	♂		N	%	N	%		
XVII A	II T	153	13	8 %	77	55 %	1,4	> 0,2
XXII N (T)	XXXI A	158	9	5,7 %	27	18 %	60,570	< 0,01
XXXV A	XXXIV N	50	8	16 %	21	50 %	0	
XXXVI A	II T	74	4	5 %	41	58 %	2,056	> 0,10
XXXVII N	XXIV N	69	—	—	33	48 %	0,130	~ 0,7

La Tabella III si riferisce alla F_1 , cioè a incroci tra i figli delle coppie della Tabella I. Dimostra che l'incrocio $\varphi T \times \sigma A$, è molto fecondo e dà netta prevalenza di arrenogenia; che la tendenza alla arrenogenia non varia con l'età dei genitori. Nell'incrocio $\varphi T \times \sigma T$ su 20 coppie in 19 si è manifestato un altro grado di sterilità, una sola coppia ha dato rapporto di tipo teligenico. Dall'incrocio $\varphi A \times \sigma A$ si ha che 20 coppie su 20 hanno presentato notevole sterilità (meno intensa che nell'incrocio precedente) e un'altissima mortalità embrionale o larvale della discendenza in tutti i parti. Il rapporto sessi nei sopravvissuti è nettamente di tipo arrenogenico.

TABELLA III.

Distribuzione dei sessi nella discendenza di incroci fra individui della F_1 .

A) Incrocio: $\varphi \varphi T \times \sigma \sigma A$

N. delle coppie	Parto	Nati	Morti		φ	σ	χ^2	P
			N	%	N	N		
23	I	517	27	5,2	163	327	54,88	< 0,01
	II	685	62	9	111	512	258,10	< 0,01
	III	613	110	17,9	115	388	148,16	< 0,01
	S	1815	199	10,9	389	1227	217,27	< 0,01

B) Incrocio: $\varphi \varphi T \times \sigma \sigma T$

N. delle coppie	Nati	Morti		φ	σ	χ^2	P
		N	%	N	N		
20	87	26	29,7	47	14	17,852	< 0,01

C) Incrocio: $\varphi \varphi A \times \sigma \sigma A$

N. delle coppie	Nati	Morti		φ	σ	χ^2	P
		N	%	N	N		
22	300	66	22	79	155	24,682	< 0,01

Questi risultati benché richiedano ulteriori estensioni, dimostrano tuttavia chiaramente: 1° che il fenomeno è ereditario e non si modifica con l'età; 2° che maschi e femmine hanno importanza diversa - che occorrerà misurare -

nel determinismo del rapporto sessi della discendenza; 3° che in alcuni incroci ($A \times A$ e $T \times T$) si ha un altissimo grado di mortalità dei nati. Ho potuto accertare che questa non è dovuta agli affetti della consanguinità; perché anche incrociando individui appartenenti a ceppi non consanguinei, l'alta mortalità si mantiene. Ho anche potuto dimostrare che tale mortalità non è proprietà di un singolo individuo, bensì caratteristica di un dato tipo di incrocio. Infatti gli stessi individui A o T, incrociati rispettivamente con individui T o A danno discendenza vitale.

Questi risultati spiegano perché in un precedente lavoro (1956) ⁽⁵⁾ l'incrocio $T \times T$ sembrava paradossalmente aver dato discendenza arrenogenica: in realtà si tratta di altissima mortalità embrionale: la percentuale del sesso fra i pochi nati era risultata, forse casualmente, spostata in favore dei maschi. Negli sperimenti attuali è invece, forse altrettanto casualmente, spostata a favore delle femmine. In ogni caso, dato lo scarsissimo numero dei nati, questi spostamenti non sono significativi.

Questi dati dimostrano l'esistenza di una notevole variabilità di genotipi sessuali in una specie gonocoristica, che fa riscontro a quella trovata in varia specie ermafrodite ^(4,7). Si può sperare di poter penetrare più intimamente, con altre ricerche ora in corso, nella conoscenza del meccanismo genetico del fenomeno della determinazione del sesso, studiato, anziché individualmente, in una popolazione.

Fisiologia. — *Intossicazione acuta da streptomicina e da diidrostreptomicina nel colombo: effetti sul tasso delle sostanze riducenti del sangue* ^(*). Nota di PIETRO D'ARCANGELO, presentata ^(**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

I) *Premesse e scopo della ricerca.* — L'azione tossica che la streptomicina e la diidrostreptomicina esercitano, ad alte dosi, sull'organismo degli animali superiori, si manifesta, nella forma acuta, con un quadro in cui appaiono prevalentemente turbate funzioni della vita di relazione. In seguito a somministrazione sottocutanea o intramuscolare di dosi adeguate l'animale cade in un coma, più o meno profondo a seconda della dose impiegata, che si presenta con caratteri fondamentalmente analoghi nelle diverse specie finora prese in esame ⁽¹⁾.

Nel colombo il quadro è stato dettagliatamente descritto da Cerquiglino e Chiucini ⁽²⁾. Ponendoci in condizioni sperimentali analoghe a quelle

(7) G. BACCI, «Pubbl. Staz. Zool. Napoli», 22, 26-39 (1949); 26, 110-137 (1955).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 febbraio 1958.

(1) S. CERQUIGLINI e G. CHIUCINI, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 25, 1130 (1949); 26, 1029 e 1366 (1950); G. CHIUCINI, ibidem, 26, 1031, 1033, 1368 e 1371 (1950).

(2) Loc. cit.

adottate da questi Autori abbiamo potuto vedere integralmente confermate le loro osservazioni. Dopo pochi minuti dalla somministrazione della sostanza compaiono segni di adinamia: l'animale si intorpidisce, tende alla immobilità e, se sollecitato alla marcia, presenta un'andatura stanca ed incerta. Successivamente si accovaccia poggiando il ventre a terra e reclinando il capo, mentre le palpebre si socchiudono. A questo stadio è chiaramente apprezzabile una marcata ipotonia muscolare; il riflesso di posizione è ancora presente ma assai torpido. Aggravandosi ulteriormente la adinamia e l'ipotonia muscolare, il riflesso di posizione scompare e al contempo risultano profondamente depresse anche le funzioni sensitive e sensoriali; l'animale resta inerte in tutte le posizioni che gli vengano imposte, quasi del tutto indifferente alle stimolazioni anche se di massima intensità. Il respiro è, in questa fase, profondo e raro, la frequenza cardiaca diminuita, la temperatura corporea notevolmente abbassata. Per dosi non letali la sintomatologia dell'intossicazione acuta si risolve, nella maggioranza dei casi, entro poche ore (2-6 circa) dalla somministrazione della sostanza.

L'evidente interesse che questa particolare forma di intossicazione presenta ci ha indotto ad approfondirne lo studio raccogliendo nuovi dati utili a chiarirne il meccanismo patogenetico. L'opportunità del nostro proposito ci è apparsa, peraltro, avvalorata dalla perdurante limitazione delle conoscenze riguardo alla natura e al meccanismo dell'azione tossica della streptomicina e della diidrostreptomicina sull'organismo animale.

Abbiamo iniziato la nostra analisi studiando gli effetti della somministrazione di alte dosi di streptomicina e di diidrostreptomicina sulla crasi ematica. Riferiamo qui i risultati di osservazioni riguardanti il comportamento del tasso delle sostanze riducenti ematiche durante l'intossicazione acuta nel Colombo.

II) *Tecnica sperimentale.* - Gli esperimenti sono stati condotti su 17 colombi, sani, adulti, di ambo i sessi. Il tasso delle sostanze riducenti del sangue è stato determinato con il micrometodo di Hagedorn e Jensen ed espresso in g di glicoso per l di sangue. In ogni esperienza l'accertamento del valore di base venne effettuato circa 30 min prima della somministrazione dell'antibiotico. Quindi a partire da 30 o da 60 min (a seconda dei casi) dalla somministrazione vennero eseguiti successivi dosaggi, a intervalli di 30 min o di 60 min, per un periodo di almeno 4 ore. Un ultimo dosaggio venne eseguito 24 ore dopo la somministrazione. Ogni dosaggio venne effettuato su sangue prelevato dalla vena ascellare. Per tutta la durata dell'esperimento, da 12 h prima fino a circa 24 h dopo la somministrazione della sostanza, l'animale venne mantenuto a digiuno, con acqua a volontà. Dopo la somministrazione del farmaco l'animale venne tenuto sotto attenta osservazione per poter accertare la comparsa dei primi segni di intossicazione e seguirne l'evoluzione, rivolgendo particolare attenzione al comportamento dei principali riflessi nervosi, del tono muscolare e della temperatura cloacale. Su ogni animale sono state eseguite prove di controllo effettuando il dosaggio

delle sostanze riducenti ematiche e, in alcuni casi, misurando il valore della temperatura cloacale, un ugual numero di volte e con le stesse modalità che nelle prove in cui è stata somministrata la sostanza.

Abbiamo impiegato sia streptomicina che diidrostreptomicina, in forma di solfato, disciolte in concentrazione del 10 % (come base) in soluzione acquosa sterile di NaCl al 9 ‰. La sostanza venne iniettata all'animale in unica dose, per via endomuscolare (muscoli pettorali). Dei 17 animali sottoposti ad esperimento 6 vennero trattati con streptomicina e 11 con diidrostreptomicina. La streptomicina è stata somministrata in tutti i casi in dose di 0,40 g per kg di peso corporeo; la diidrostreptomicina in dose di 0,60 g/kg in 10 casi, e in un caso in dose di 0,70 g/kg. Con tali dosi secondo Cerquiglini e Chiucini (loc. cit.) si provoca costantemente nel Colombo un quadro di intossicazione acuta grave.

III) *Risultati.* – I risultati delle esperienze sono riportati nelle Tabelle I e II ed espressi in grafico nella fig. 1. Essi possono essere così schematizzati.

1) In tutti i Colombi la somministrazione di streptomicina o di diidrostreptomicina nelle dosi adottate ha provocato la comparsa del caratteristico quadro dell'intossicazione acuta già descritto da Cerquiglini e Chiucini. La dose di streptomicina da noi impiegata è risultata mortale in 1 su 6 dei Colombi trattati; l'animale è morto circa 7 h dopo l'iniezione. Degli 11 Colombi trattati con diidrostreptomicina, 6 (tra cui l'animale n. 17, al quale la sostanza era stata somministrata alla dose di 0,70 g/kg di peso corporeo) sono morti per intossicazione e precisamente 5 entro 1-3 h (in 4 di essi l'ultimo dosaggio delle sostanze riducenti ematiche venne eseguito su sangue prelevato dal cuore immediatamente dopo la morte), uno dopo circa 8 h dall'iniezione.

2) 5 su 6 Colombi intossicati con streptomicina, e 10 su 11 degli intossicati con diidrostreptomicina hanno presentato, durante le prime ore dalla iniezione, un netto aumento del tasso delle sostanze riducenti ematiche. Questo è stato di entità diversa ed è evoluto con differenti modalità nei diversi animali. Nella maggioranza dei casi ha cominciato a rendersi manifesto già entro la prima ora dalla somministrazione del farmaco. I valori più alti raggiunti nei diversi animali sono corrisposti ad aumenti compresi tra il 21 % e il 52 % negli intossicati con streptomicina e tra il 20 % e il 90 % negli intossicati con diidrostreptomicina.

3) In tutti gli animali sopravvissuti alla intossicazione il tasso delle sostanze riducenti ematiche dopo 24 h dalla iniezione è risultato sensibilmente più alto di quello basale. Questo aumento non sembra attribuibile ad un perdurante effetto dell'antibiotico, dato che anche in quasi tutte le prove di controllo è stato osservato, dopo 24 h dall'inizio dei dosaggi, un aumento dello stesso ordine di grandezza. Esso va probabilmente interpretato come una reazione iperglicemica da salasso, dovuta alla inevitabile perdita di sangue subita dagli animali nei prelievi effettuati per i dosaggi.

4) In nessuno degli animali è stato possibile accertare una chiara relazione tra il comportamento del tasso delle sostanze riducenti ematiche e l'evoluzione del quadro tossico.

TABELLA I.
Esperienze con streptomicina.

N. del- l'animale	PROVA DI CONTROLLO				PROVA CON SOMMINISTRAZIONE DI STREPTOMICINA				Osservazioni
	Peso corporeo in g	Tempo in h	Sostanze ridu- centi in g di glicosio per l di sangue	Tempe- ratura cloacale in °C	Peso corporeo in g	Tempo dalla sommini- strazione in h	Sostanze ridu- centi in g di glicosio per l di sangue	Tempe- ratura cloacale in °C	
4	380	0	1,79	—	385	(prima)	1,79	42	Coma Coma Coma Coma Vigile. Profonda adinamia e ipotonìa.
		1	1,79	—		1/2	2,15	39	
		2	1,82	—		1	2,28	36,5	
		3	1,93	—		2	2,38	33,9	
		4	1,91	—		4	2,55	32,2	
					360	24	2,66	36,1	
5	425	0	1,68	—	440	(prima)	1,72	42,6	Coma Coma Coma Vigile. Profonda adinamia.
		1	1,72	—		1/2	1,91	41,9	
		2	1,72	—		1	2,15	40,2	
		3	1,73	—		2	1,75	39,8	
		4	1,72	—		3	1,79	40,4	
	410	24	1,91	—	415	24	2,08	41,5	
6	—	—	—	—	388	(prima)	2,17	42	Coma Coma Coma Coma Muore dopo circa 7 h dalla sommministrazione.
		—	—	—		1	2,30	39,8	
		—	—	—		2	2,40	37,8	
		—	—	—		3	2,35	35,1	
		—	—	—		4	2,19	33,5	
					—	5	2,13	32,5	

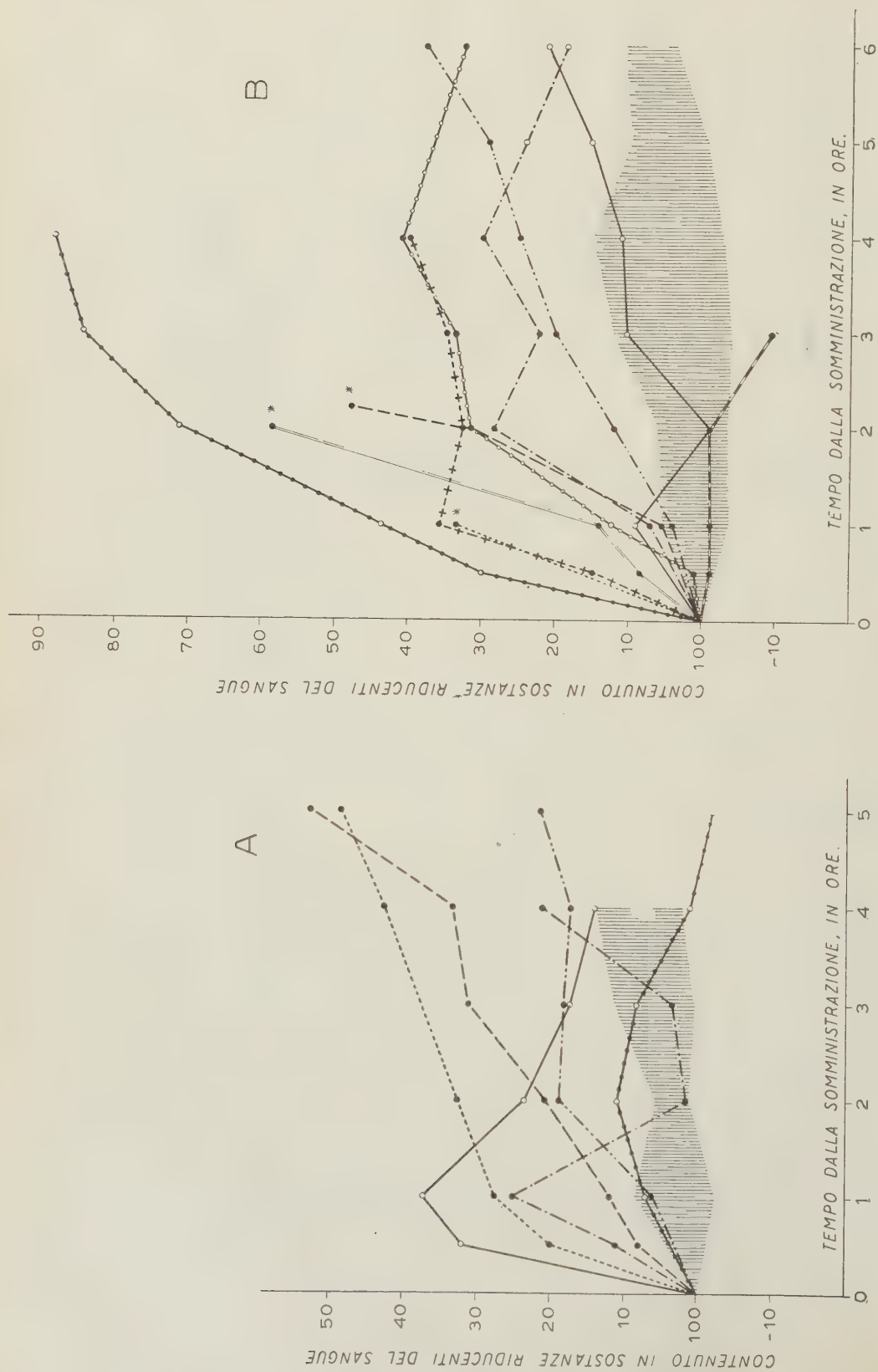


Fig. 1. - Comportamento dei valori del tasso delle sostanze riducenti del sangue nei colombi intossicati con streptomicina (A) e con diidrostreptomicina (B). Le variazioni in più o in meno rispetto al tasso iniziale sono espresse in valori percentuali. L'area tratteggiata indica i limiti delle variazioni osservate nelle prove di controllo, e a due controlli assenti.

5) In due colombi (il n. 6, trattato con streptomicina, e il n. 16, trattato con diidrostreptomicina) non si è verificato un apprezzabile aumento del tasso delle sostanze riducenti ematiche, pur avendo questi animali presentato in pieno la sintomatologia caratteristica dell'intossicazione acuta.

Nelle tabelle e nei grafici annessi non figurano i dati relativi all'esperimento eseguito sul Colombo n. 17. In questo animale la iniezione di diidrostreptomicina alla dose di 0,70 g/kg ha provocato un aumento delle sostanze riducenti ematiche pari, dopo 30 min dalla somministrazione, al 13,5 % del valore basale; nel campione di sangue prelevato dal cuore immediatamente dopo la morte, avvenuta dopo circa 50 min dall'iniezione, l'aumento è risultato del 45 %.

IV) *Discussione.* — Nell'interpretare i risultati delle nostre esperienze bisogna tener presente che la streptomicina e la diidrostreptomicina sono sostanze provviste di proprietà riducenti. Ciò induce a considerare la possibilità che l'aumento delle sostanze riducenti ematiche, verificatosi dopo somministrazione dell'uno o dell'altro antibiotico nella maggioranza dei colombi da noi esaminati, sia semplicemente espressione della quantità di farmaco passata in circolo. Per il momento non ci sentiamo in grado di pronunciarsi in modo definitivo per escludere o meno tale possibilità. Ci sembra, però, che non concordino con essa né il comportamento dei colombi n. 6 e n. 16, né i risultati di alcune prove che abbiamo eseguito per stabilire il potere riducente della streptomicina e della diidrostreptomicina nei confronti del reattivo al ferricianuro di K impiegato nel metodo di Hagedorn e Jensen.

Infatti, nel Colombo n. 6, trattato con streptomicina, e nel n. 16, trattato con diidrostreptomicina, non si è verificato aumento del tasso delle sostanze riducenti ematiche malgrado la comparsa di un quadro di intossicazione acuta analogo per gravità e per durata a quello osservato negli altri colombi sottoposti ad esperimento, e tale quindi da far ritenere che la sostanza iniettata sia passata nel circolo di questi due animali in quantità non minore che negli altri.

I risultati delle prove eseguite per determinare il potere riducente della streptomicina e della diidrostreptomicina nei confronti del reattivo al ferricianuro di K sono riportati nella Tabella III. In queste prove sono state impiegate quantità di antibiotico tali da corrispondere alla concentrazione massima teoricamente raggiungibile dalla sostanza nel sangue dei colombi da noi trattati. Nel Colombo il peso totale del sangue corrisponde, in media, al 6,5 % del peso corporeo e la densità del sangue intero è di 1,064 ⁽³⁾. In base a questi dati, nei nostri animali, il cui peso corporeo medio era di 425 g, il volume totale del sangue avrebbe dovuto aggirarsi, in media, sui $\left(\frac{425 \times 6,5}{100 \times 1,064} = \right) 25$ ml. Dopo somministrazione dell'antibiotico alle dosi da noi impiegate la concentrazione ematica di questo non avrebbe potuto, quindi, superare il valore di 0,70 %, nel caso della streptomicina, e quello di 1,05 %, nel caso della diidrostreptomicina, pur nell'ipotesi, peraltro poco

(3) O. W. BARLOW e M. S. BISKIND, «Am. Jour. Physiol.», 86, 585 (1928).

attendibile, che la dose iniettata fosse venuta, ad un certo momento, a trovarsi tutta nel sangue dell'animale.

Abbiamo, pertanto, misurato il potere riducente di soluzioni di streptomina e di diidrostreptomina alla concentrazione (come base) rispettivamente di 0,7 % e di 1,05 %, preparate sia in acqua sia in sangue di Colombo reso incoagulabile con ossalato di K alla concentrazione dello 0,2 % (dopo aver controllato che in tale quantità l'ossalato di K non disturba la determinazione del potere riducente delle due sostanze). Le determinazioni sono state eseguite con il metodo di Hagedorn e Jensen su campioni di 0,1 ml.

TABELLA III.

Potere riducente della streptomina e della diidrostreptomina nei confronti del reattivo di Hagedorn e Jensen al ferricianuro di K.

	Streptomina 0,70 %		Diidrostreptomina 1,05 %		Sangue di Colombo, 0,1 ml.
	in acqua, 0,1 ml.	in sangue di Colombo, 0,1 ml.	in acqua, 0,1 ml.	in sangue di Colombo, 0,1 ml.	
Quantità di $K_3Fe(CN)_6$ N/200 ridotta, ml. .	1,76	> 2,00	0,08	1,25	1,19
Potere riducente, in g di glicosio % . . .	3,23	> 3,85	0,14	2,22	2,08

I dati della Tabella III indicano che la diidrostreptomina ha nei confronti del reattivo al ferricianuro di K un potere riducente assai scarso, tale da non poter assolutamente rendere ragione dell'aumento delle sostanze riducenti ematiche nella misura da noi osservata nei Colombi trattati con questo antibiotico. La streptomina, invece, possiede un potere riducente molto maggiore, talché non si può escludere che l'incremento delle sostanze riducenti ematiche osservato nei Colombi intossicati con essa non possa essere dovuto al passaggio in circolo della sostanza stessa. Ci sembra, tuttavia, più verosimile che la streptomina, così affine nella struttura e nelle proprietà biologiche alla diidrostreptomina, nel provocare a carico del tasso delle sostanze riducenti ematiche una variazione nello stesso senso e di entità analoga a quella prodotta dalla diidrostreptomina, agisca con lo stesso meccanismo di questa o con uno molto simile.

Verosimilmente, quindi, l'aumento del tasso ematico di sostanze riducenti osservato nella maggioranza dei Colombi intossicati con streptomina o con diidrostreptomina, non è semplicemente attribuibile alla presenza in circolo dell'una o dell'altra sostanza. I dati finora a nostra disposizione non ci consentono di precisare ulteriormente la natura del fenomeno: allo scopo di chiarire se esso sia dovuto ad aumento del glicosio o a quello di altro metabolita riducente abbiamo istituito altre ricerche, sui risultati delle quali ci proponiamo di riferire prossimamente.

Fisiologia vegetale. — *Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti.* — III. *Relativa insensibilità di enzimi di Cianoficee a denaturanti che agiscono rompendo i legami di idrogeno*^(*).
Nota di ERASMO MARRÈ, MARIA ALBERTARIO ed EDVIGE VACCARI, presentata^(**) dal Socio S. TONZIG.

Precedenti ricerche avevano dimostrato come la capacità di forme termofile di prosperare a temperature eccezionalmente elevate (oltre i 60 °C) corrisponda ad una caratteristica termoresistenza dei loro sistemi proteici e, in particolare, di quelli enzimatici [1, 2]. Tale termoresistenza, apparendo evidente anche per enzimi estratti dalle cellule ed in condizioni tali da escludere l'azione di sostanze protettive aspecifiche, suggeriva che la base biochimica del fenomeno dell'adattamento biologico alle temperature più elevate dovesse cercarsi in una particolare struttura delle singole proteine, per cui queste risultassero meno sensibili all'azione denaturante del calore. Tale azione, come è noto, è in larghissima parte riconducibile alla rottura dei legami d'idrogeno; legami di per sé stessi relativamente deboli, e la cui forza diminuisce con estrema rapidità con l'allontanamento dei gruppi tra i quali essi fanno da ponte (la forza dei legami d'idrogeno risulta proporzionale all'inverso della 6^a potenza della distanza tra i gruppi ch'essi legano). La maggior resistenza, da noi rilevata, alla denaturazione termica delle proteine nelle forme termoresistenti, suggeriva quindi logicamente una struttura molecolare meno dipendente, per quanto riguarda la sua integrità, da legami d'idrogeno altamente termolabili.

Per controllare la validità di questa ipotesi, abbiamo studiato il comportamento delle proteine di forme rispettivamente termoresistenti e termolabili nei confronti di composti caratteristicamente attivi nel rompere i ponti d'idrogeno quali, l'urea e l'acetamide [3]; e abbiamo preso come test dell'azione denaturante, l'attività di due sistemi enzimatici facilmente rilevabili negli estratti di polvere acetonica di queste Cianoficee, la TPNH-citocromo c riduttasi e la catalasi. Alla scelta di questo test, anziché di quelli più generalmente usati, più agevoli e più specifici, nei quali l'azione dei denaturanti sui ponti d'idrogeno viene valutata in base allo smascheramento dei gruppi sulfidrilici o alle variazioni della viscosità, siamo stati costretti dalla difficoltà di ottenere una sufficiente quantità di materiale proteico dalla forma termofila a nostra disposizione.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Milano. Centro di studio per le ossido-riduzioni nei vegetali del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

MATERIALE E METODI.

a) *Materiale*. - Come in esperienze precedenti, il materiale è stato fornito, per la forma termofila, da culture di *Aphanocapsa thermalis* ambientata da anni, in questo Istituto, in vasche termoregolate a 60 °C; per la forma termolabile da culture di *Anabaena cylindrica*, mantenute a temperatura ambiente (circa 18 °C).

b) *Metodi*. - Nella preparazione delle polveri acetoniche delle due forme, come anche degli estratti di queste, è stata seguita la procedura già descritta in una precedente ricerca [2]. Come è ovvio, la procedura seguita è stata, in tutti i passaggi, rigorosamente identica per i due diversi materiali. L'attività TPNH-citocromo c riduttasica è stata determinata come precedentemente descritto. L'attività catalasica è stata determinata secondo Theorell.

ESPERIENZE E RISULTATI.

A) *Diversa azione dell'urea e dell'acetamide sulla TPNH-citocromo c riduttasi della forma termolabile e, rispettivamente, della forma termoresistente*.

Come risulta dalla Tabella I, l'attività citocromo c riduttasica di estratti di *Anabaena* è nettamente inibita da concentrazioni di urea tali da produrre il tipico effetto di rottura dei ponti d'idrogeno [3], il valore dell'inibizione essendo del 40 % per la concentrazione 5,4 M; mentre di gran lunga minore, a parità di concentrazione del denaturante, risulta l'inibizione a carico dell'enzima della forma termostabile, *Aphanocapsa* (21 %).

TABELLA I.

Azione dell'acetamide e dell'urea sull'attività TPNH-citocromo c riduttasica di Aphanocapsa thermalis e di Anabaena cylindrica.

Composizione dell'incubato: Enzima in soluzione cc. 0,3, TPNH 0,2 μ moli, Tris 0,2 M, pH 7,3. Volume finale 3 cc. Preincubazione con acetamide o urea, quando indicato, per 10 minuti prima dell'aggiunta dei substrati.

	Trattamento	Attività (*)	Inibizione
<i>Aphanocapsa</i> . . .	Nessuno	0,085	—
	Urea 5,4 M	0,067	21 %
	Acetamide 4,3 M . .	0,055	35 %
<i>Anabaena</i>	Nessuno	0,072	—
	Urea 5,4 M	0,043	40 %
	Acetamide 4,3 M . .	0,028	61 %

(*) Attività come aumento della D.O. a 550 $m\mu$ /minuto.

Un quadro analogo appare, nella stessa Tabella, anche per l'altro denaturante dei ponti d'idrogeno usato, l'acetamide, per cui si osserva, a con-

centrazione 4,3 M, una inibizione del 35 % per la forma termolabile, in confronto di una inibizione del 61 % della forma termostabile.

B) *Azione sulla catalasi.*

I dati della Tabella II illustrano il comportamento della catalasi rispettivamente di *Anabaena* e di *Aphanocapsa* di fronte all'acetamide e all'urea. Per quanto riguarda il primo dei due denaturanti, il fenomeno della maggiore resistenza della forma termostabile appare imponente, nessuna inibizione potendosi osservare per una concentrazione di acetamide 8 M, la stessa che inibisce del 50 % la catalasi di *Anabaena*. In singolare contrasto con questo comportamento, l'urea incide invece in maniera sostanzialmente identica sull'attività della catalasi delle due forme, inibendola in entrambi i casi di circa il 33 %. Contrasto difficilmente spiegabile, a meno di non ricorrere all'ipotesi di un'azione preferenziale di ciascuno dei due denaturanti su legami o gruppi aventi caratteristiche diverse e diversamente determinanti nel condizionare l'attività dell'enzima.

TABELLA II.

Azione dell'acetamide e dell'urea sull'attività catalasica di estratti di Aphanocapsa thermalis e di Anabaena cilindrica.

Composizione dell'incubato: Enzima in soluzione 0,5 cc., Tris 0,2 M, pH 7,2. H_2O_2 0,01 M. Preincubazione con acetamide o urea, dove indicato, per 10 minuti pr. prima dell'aggiunta di H_2O_2 . Volume finale 4 cc. La concentrazione degli inibitori era 8 M nel periodo di preincubazione, e 3 M in quello di incubazione.

	Trattamento	Attività (*)	Inibizione
<i>Aphanocapsa</i> . . .	Nessuno	0,65	—
	Acetamide	0,66	0
	Urea	0,43	33 %
<i>Anabaena</i>	Nessuno	0,65	—
	Acetamide	0,32	50 %
	Urea	0,42	33 %

(*) Attività in cc. di $KMnO_3$ 0,01 M mancanti alla titolazione dopo incubazione per 5 minuti primi.

CONCLUSIONI E RIASSUNTO.

I risultati della presente ricerca possono riassumersi dicendo che, dei due denaturanti per rottura dei ponti di idrogeno usati, l'uno — l'acetamide — è nettamente meno attivo tanto sulla citocromo riduttasi quanto sulla catalasi estratte dalla Cianoficea termofila *Aphanocapsa*, di quanto non lo sia

sugli stessi enzimi estratti da una Cianoficea termolabile, *Anabaena*; mentre l'altro - l'urea - segue questo comportamento per quanto riguarda la citocromo riduttasi, inibendo invece, in misura pressoché uguale la catalasi di entrambe le forme.

Poiché entrambi i denaturanti sono ben noti per la loro caratteristica azione di rottura dei ponti di idrogeno, e poiché l'ordine di grandezza delle concentrazioni da noi trovate attive corrisponde a quello per il quale questa loro proprietà è nota manifestarsi genericamente sulle proteine, enzimatiche o meno, ci sembra ragionevole attribuire l'inibizione delle attività enzimatiche da noi studiate essenzialmente alla denaturazione proteica indotta dai due reagenti attraverso rottura dei legami di idrogeno; anche se effetti di diversa natura non possono categoricamente escludersi.

Una maggior resistenza nei confronti di una azione, di questo tipo, sembra potersi interpretare come espressione di una configurazione proteica affidata in misura minore all'azione dei legami d'idrogeno e caratterizzata dalla prevalenza, nelle proteine delle forme termoresistenti, di legami di natura diversa e meno termolabile.

In questo senso i nostri risultati sembrano strettamente collegarsi con quelli recentissimamente ottenuti da Koffler e collaboratori [4, 5, 6] nello studio della termostabilità dei flagelli dei batteri termofili. Questi Autori infatti, dopo esser giunti, per questo materiale, a conclusioni che confermano quelle da noi precedentemente enunciate circa il meccanismo generale della termostabilità nelle alghe, rilevano per le proteine dei flagelli di diverse specie di batteri termofili una molto maggiore stabilità di fronte all'azione di composti che rompono i ponti d'idrogeno; e propongono, come ipotesi di lavoro, la possibilità che legami particolarmente tenaci tra gruppi idrofobi (lipofili) sostituiscano, in questi organismi adattati a temperature normalmente incompatibili con la vita, la funzione normale espletata dai ponti d'idrogeno. Ipotesi certamente suggestiva, che sembra trovare una possibilità di applicazione anche al nostro materiale. Avevamo infatti precedentemente segnalato la molto maggiore difficoltà di estrarre le proteine sotto forma solubile dalle Cianoficee termofile rispetto a quelle termoresistenti; e come questa difficoltà sia in parte superabile solo mediante trattamento del materiale con soluzione satura di butanolo [2]; procedura che è particolarmente indicata proprio per la solubilizzazione di proteine saldamente legate a substrati o a strutture di natura lipidica.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] MARRÈ E. e SERVETTAZ O., «Atti Acc. Naz. Lincei, Rend.», Cl. Sc. Fis., 20, 72 (1956).
- [2] MARRÈ E. e SERVETTAZ O., «Atti Acc. Naz. Lincei, Rend.», Cl. Sc. Fis., 22, 9 (1957).
- [3] HAUROWITZ F., *Chemistry and Biology of Proteins*, Academic Press, 1950.
- [4] KOEFFLER H. e GALE G. O., «Arch. Biochem. a. Biophys.», 67, 249 (1957).
- [5] ADYE J., KOEFFLER H. e MALLETT G. E., «Arch. Biochem. a. Biophys.», 67, 251 (1957).
- [6] MALLETT G. E. e KOEFFLER H., «Arch. Biochem. a. Biophys.», 67, 254 (1957).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente Luigi Fantappiè

tenuta (*) dal Corrisp. GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

Luigi Fantappiè nacque a Viterbo il 15 settembre 1901; normalista a Pisa, vi si laureò nel 1922; assistente a Roma fino al 1927, professore poi in Cagliari, Palermo, Bologna e San Paolo, presso quelle Università, e, dal 1939, in Roma, presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica, si spense a Bagnaia, in provincia di Viterbo, il 28 luglio 1956: era accademico linceo da circa due anni. Fu insignito della medaglia d'oro per la matematica dalla Società italiana delle scienze detta dei XL, del premio reale per la matematica dall'Accademia dei Lincei e del premio Volta dall'Accademia d'Italia, della medaglia d'oro per i benemeriti della cultura dal Ministero della Pubblica Istruzione. Fu socio dell'Accademia di scienze lettere ed arti di Palermo, dell'Accademia delle scienze di Bologna, dell'Accademia de ciencias di Rio de Janeiro e di quella di Barcellona, dell'Accademia pugliese delle scienze di Bari.

L'esuberanza del talento e la profonda cultura fisico-matematica lo portarono ad ampliare il campo dei suoi studi fino ad affrontare quistioni generali di filosofia naturale e addirittura problemi metafisici. Ma Egli fu anzitutto e soprattutto un matematico. E se potrò parlare delle Sue ricerche e dei Suoi contributi nel campo dell'analisi, solo vagamente potrò far cenno delle Sue pur tanto suggestive speculazioni fisiche e filosofiche.

Negli anni pisani ed in quelli immediatamente successivi, Fantappiè era stato attratto da alcune questioni di algebra e di teoria dei numeri. Ma già fin dall'inizio del primo periodo romano di Sua vita matematica, Egli aveva incontrato l'argomento di future ricerche predilette. Mi riferisco ai funzionali analitici, lineari o non, dipendenti da funzioni analitiche di variabili complesse: negli anni a venire Egli ne avrebbe sviluppato la teoria, ponendone le basi, cogliendone i risultati fondamentali e indicandone importanti applicazioni.

La teoria si impernia su una formula di struttura per i funzionali analitici lineari. Questa formula si ricollega, per un verso, a quella elementare di Cauchy, si inquadra, per l'altro, nella moderna teoria generale dei funzionali lineari e costituisce un risultato, che, nella sua semplicità ed espressività, può ben già chiamarsi classico; essa ha permesso a Fantappiè di porre

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

le nozioni di funzionale derivato e di funzionali derivati successivi per un funzionale analitico non lineare e di dare indi, per un tal funzionale, sviluppi in serie analoghi a quelli considerati da Volterra nel caso reale e dotati della serie di Taylor come prototipo nell'analisi elementare.

Nel corso di questi studi, prolungatisi per vari anni, Fantappiè ha risolto dapprima i problemi relativi ai funzionali di funzioni di una variabile, ha affrontato poi il caso di quelli delle funzioni di due o più variabili, sormontando le grandi difficoltà che si presentano, come è ben noto agli analisti, nel passaggio da una a più variabili complesse. Di grande interesse sono le considerazioni topologiche a cui Fantappiè è stato condotto dall'analisi del comportamento all'infinito, secondo i principi posti in forma definitiva da Severi.

La profondità della teoria è confermata dal valore delle applicazioni che l'Autore stesso ne ha fatto. Fra tutte, va ricordata quella relativa al calcolo simbolico degli operatori. È noto che il calcolo simbolico formale rende spesso preziosi servigi dal punto di vista euristico, ma non è teoricamente giustificato fino a quando non si sia pervenuti ad una adeguata interpretazione sostanziale dei simboli. Orbene, Fantappiè ha osservato che in molti casi i simboli di quel calcolo si possono interpretare come dei funzionali analitici lineari e che il loro significato è fornito appunto dalla Sua formula sulla struttura di un tal funzionale! Beninteso quei procedimenti simbolici possono esser suscettibili anche di altre giustificazioni: indiscutibile è l'originalità concettuale ed il contenuto larghissimo dell'interpretazione data da Fantappiè.

Egli poteva quindi trattare, coi metodi del calcolo simbolico, il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti alle derivate parziali, conseguendo, in questo problema generalissimo, una soluzione mediante formule cosiddette chiuse, o in termini finiti, come si esprimono l'Autore e la Sua scuola. L'interesse di queste ricerche non risiede soltanto nell'importanza intrinseca del risultato acquisito, ma nell'indirizzo seguito (integrazione logica), già coltivato in passato e certamente ricco di avvenire.

Ricorderò anche le applicazioni relative allo studio delle equazioni funzionali lineari nel campo analitico, all'esame dei legami fra problemi di Cauchy e di Dirichlet, al calcolo degli autovalori e delle autofunzioni di un nucleo variato per una variazione di tipo elementare, alla costruzione di prodotti funzionali relativisticamente invarianti. E rammenterò altresì l'applicazione fornita dall'Autore nella Sua ultima nota lineare, nella quale Egli porge una notevole formula integrale per le funzioni analitiche di più variabili complesse e pone in luce una circostanza, che, secondo Lui, potrebbe spiegare le profonde differenze fra le proprietà delle funzioni analitiche di una e quelle delle funzioni analitiche di più variabili complesse.

Fantappiè ha utilizzato la Sua teoria anche per il calcolo delle matrici nella teoria dei quanti. Queste ricerche risalgono al 1928 e testimoniano nell'Autore un interesse antico per le questioni della fisica matematica e

della fisica teorica, interesse antico e sempre più manifesto nelle pubblicazioni dell'ultimo ciclo.

Fra le quali emergono quelle rivolte alla formulazione di una teoria relativistica. Ne espongo brevemente il concetto. Le leggi della meccanica classica sono, notoriamente, invarianti rispetto al gruppo di Galileo e quelle della relatività ristretta rispetto al gruppo di Lorentz. Il gruppo di Galileo si può riguardare come una buona approssimazione del gruppo di Lorentz nel caso di corpi che si muovano con velocità piccole rispetto a quella di propagazione della luce nel vuoto; e il gruppo di Lorentz si può riguardare come il gruppo dei movimenti dello spazio-tempo di Minkowski. Ebbene, Fantappiè determina il gruppo dei movimenti dello spazio-tempo quadridimensionale ed a curvatura costante di De Sitter. Se la curvatura è piccola, lo spazio-tempo di De Sitter è approssimato dallo spazio-tempo di Minkowski ed il gruppo di Fantappiè dal gruppo di Lorentz. Il complesso delle leggi invarianti di fronte al gruppo di Fantappiè fornisce appunto una teoria relativistica. Entro questa è possibile dedurre, in modo spontaneo, una equazione di Schrödinger, generalizzata dalla presenza di un termine correttivo, che, secondo Fantappiè, potrebbe suggerire un principio di equivalenza fra massa, energia e campo.

La costruzione è senza dubbio seducente dal punto di vista matematico. Non sta a me pronunciarmi circa il suo valore dal punto di vista fisico. Come non sta a me pronunciarmi circa il valore fisico di un'altra ampia costruzione fisico-matematica di Fantappiè: la teoria degli universi, nella quale quella relativistica si inserisce.

In imbarazzo poi mi troverei, se dovessi parlare del sistema di filosofia naturale formulato da Fantappiè. Alludo a quella Sua teoria unitaria dei fenomeni fisici e biologici. La quale, audace e ambiziosa nei propositi, richiede, appunto perciò, postulazione grandiose tanto, da apparir costruzione della fantasia. Ma queste parole, ispirate da un prudente riserbo, non vogliono esser giudizio affrettato. Si ricordi piuttosto, con Leopardi, quanto l'immaginazione contribuisca alla filosofia, perché le grandi verità, e massime nell'astratto e nel metafisico, non si scuoprono se non per un quasi entusiasmo della ragione, né da altri che da chi è capace di questo entusiasmo.

Forse qualche volta Fantappiè si è lasciato trascinare un po' troppo dall'entusiasmo. Quando ha voluto interpretare la razionalità come argomento delle cose non parventi, Egli ha inserito nella linea del Suo pensiero tratti invero singolari, e di incerto valore conoscitivo.

Ma quando Egli interpreta la razionalità matematica come sostegno propulsore della nostra intelligenza dell'universo, ci si sente trasportati dalla gioia orgogliosa dello scienziato, che intende sempre più quanto la propria disciplina onori lo spirito umano.

Di Luigi Fantappiè l'opera matematica, per l'importanza e fecondità dei conseguimenti, per le prospettive che schiude, lascia sicura traccia in analisi. E durerà nel ricordo — complessa, suggestiva, inconfondibilmente originale — la Sua figura di Scienziato.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Scorza Dragoni commemora il compianto Collega Luigi Fantappiè, rievocandone la multiforme opera scientifica, che si è conclusa con applicazioni geniali alla fisica moderna.

Sono presenti alla commemorazione, oltre i familiari, la Signora Dupuy, consorte dell'Ambasciatore del Canada, in rappresentanza dell'Ambasciatore stesso, il Primo Presidente della Corte di Cassazione Eula, l'Ambasciatore Sola, il Socio Krall, in rappresentanza del Presidente a vita dell'Istituto di Alta Matematica prof. Severi, il prof. Menegazzi, in rappresentanza dell'on. Coselschi, il prof. Carafa e numerosi altri amici e discepoli dell'illustre scienziato scomparso.

Sono pervenuti numerosi messaggi di adesione.

Il Presidente Giordani, dopo aver ringraziato l'oratore, rinnova ai familiari del prof. Fantappiè l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per l'imatura scomparsa del valoroso Collega.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge il cordiale saluto della Classe ai proff. Federico Gaeta, dell'Università di Santiago de Compostela (Spagna) e Gheorghe Galbura, dell'Università di Bucarest.

Il prof. Giordani comunica ai Soci che è in distribuzione il fascicolo VI dei Rendiconti, del dicembre 1957, e che quelli del gennaio e febbraio 1958 sono rispettivamente in macchina e in fase di avanzata composizione.

Il Presidente, mentre si compiace per l'accelerato ritmo dato alla pubblicazione dai Segretari Accademici, con la loro solerzia e diligenza, rinnova a tutti i Colleghi la viva preghiera di attenersi strettamente ai termini prescritti per il rinvio delle bozze, in modo da consentire che la stampa dei Rendiconti riprenda quella mirabile regolarità, che il Presidente Castelnuovo aveva voluto, e che costituiva un vanto dell'Accademia.

Il prof. Giordani informa poi la Classe, nell'eventualità che la notizia possa interessare qualche Socio, che avrà luogo a Losanna, dal 27 al 29 corrente, per iniziativa della « Schweizerische Akademie der Medizinischen Wissenschaften », un Symposium dedicato allo studio degli effetti nocivi delle piccole dosi di elementi radioattivi.

Dà quindi lettura del bando di concorso al Premio Johndino Nogara, di L. 100.000, indetto dalla Società Mineralogica Italiana e riservato a giovani studiosi di nazionalità italiana, laureati in Italia, che presentino lavori di carattere scientifico o scientifico-applicato, con particolare riferimento allo studio di giacimenti minerali. Le domande e i lavori dovranno pervenire alla Presidenza della predetta Società Mineralogica rispettivamente entro il 15 giugno e non oltre il 31 luglio 1958.

Il Presidente, infine, riferendosi a quanto comunicato dal Collega Montalenti nella seduta del 6 giugno 1957, ricorda che nel corrente anno viene a cadere il bicentenario della pubblicazione del « *Sistema Naturae* » di Linneo, mentre, nel 1959, ricorrerà il centenario della stampa dell'opera di Darwin « *On the origin of species* ». Nella citata seduta, la Classe decise di indire, per il corrente anno accademico, una conferenza pubblica per il bicentenario dell'opera linneiana, riservandosi di studiare la possibilità di organizzare, per il 1959, un convegno sulla specie.

Il Presidente prega i Colleghi di voler presentargli concrete proposte in merito alle suddette manifestazioni.

Il Socio Montalenti osserva che forse sarebbe conveniente abbinarle, poiché quest'anno, oltre al bicentenario del *Systema Naturae*, si celebra anche il centenario della prima pubblicazione di Darwin sull'evoluzione, preliminare alla *Origine della Specie*, la quale uscì nel 1859.

Il prof. Giordani è invece d'avviso di tenere distinte le due celebrazioni e, in considerazione del fatto che il discorso dell'adunanza solenne del prossimo giugno dovrà essere pronunciato quest'anno da un Socio della Classe, crede che un ottimo tema per tale discorso potrebbe essere appunto quello del bicentenario Linneiano. Invita pertanto la Classe a pronunciarsi al riguardo, assicurando che egli si renderà interprete delle decisioni della Classe stessa presso il Consiglio di Presidenza che si riunirà lunedì 10 corrente.

La Classe approva ad unanimità la proposta del Presidente e designa, quale oratore, il Collega Montalenti.

Il Socio Polvani ritiene opportuno informare i Colleghi che quest'anno ricorre anche il 350° anniversario della nascita di Torricelli.

Il Presidente ringrazia il Socio Polvani ed esprime la sua convinzione che tale ricorrenza potrà essere degnamente celebrata dall'Accademia con una seduta pubblica da tenersi all'inizio del nuovo anno.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Cambi presenta gli « Indici » delle pubblicazioni uscite dall'Istituto di Chimica Industriale dell'Università di Milano, da lui diretto, dall'ottobre 1924, data della fondazione dell'Istituto stesso, a tutto l'anno accademico 1954-55. Tali « Indici », redatti in italiano, in inglese e in tedesco, sono divisi in otto fascicoli che si riferiscono rispettivamente ai periodi 1925-1930, 1931-1934, 1935-1938, 1939-1941, 1942-1946, 1947-1951, 1952-1953 e 1954-1955. Le pubblicazioni riguardano tutte le cattedre e i laboratori che l'Istituto ha successivamente ospitati e coordinati e abbracciano pertanto i problemi della chimica-fisica, della fisica-tecnica, della chimica inorganica e organica, teoriche e applicate, nonché quelli degli impianti e del macchinario chimico. La suddetta raccolta chiude il trentennio di vita dell'Istituto di Chimica Indu-

striale il quale, con l'anno accademico 1955-56, ha assunto una nuova struttura scientifica e didattica con la denominazione di « Istituto per la laurea in chimica industriale ».

Il Presidente ringrazia il Collega Cambi e osserva che la pubblicazione da lui presentata costituisce un prezioso documento della sua fervida attività di scienziato e di Maestro.

Il Socio Tonolo presenta all'Accademia il II volume delle « Opere » di Ricci Curbastro, con le seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia il secondo volume, che è anche l'ultimo, delle « Opere » di Ricci-Curbastro, pubblicato, come il volume I, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Esso contiene trentuno lavori, fra Note e Memorie, che vanno dal 1896 al 1926. Mi limito a segnalare, in ordine cronologico, lo studio sui sistemi di congruenze ortogonali di linee tracciate in una varietà riemanniana qualsiasi, quello sui gruppi continui di movimenti nelle varietà a tre dimensioni, la deduzione delle formule fondamentali della teoria generale delle varietà e della loro curvatura, la determinazione delle superficie geodetiche in una varietà a tre dimensioni, i concetti di direzioni e invarianti principali in una varietà riemanniana, l'estensione alle varietà, dal Ricci dette regolari, di qualcuno dei risultati già ottenuti per quelle a tre dimensioni sui gruppi continui di movimenti, la ricerca sulla riducibilità delle quadriche differenziali e sui ds^2 della statica einsteiniana. Nel volume si trova anche la celebre monografia, scritta in collaborazione con il Levi-Civita: « Méthodes de Calcul différentiel absolu et leurs applications ». Il volume termina con le « Lezioni sulla teoria matematica dell'elasticità », tratte da un manoscritto del Ricci e qui per la prima volta date alle stampe. Il Comitato è venuto nella determinazione di pubblicare anche queste « Lezioni », in quanto che tale teoria vi è svolta sistematicamente con i metodi del Calcolo assoluto e perciò, storicamente, di grande interesse; inoltre una postilla, inserita alla fine della Monografia citata, indica che il Ricci stesso aveva intenzione di dare alle stampe il suo manoscritto.

« Per facilitare la lettura delle « Opere », è sembrato opportuno al Comitato inserire alla fine del volume un raffronto tra le più frequenti notazioni e locuzioni adoperate dal Ricci con altre più recenti. Queste sono tratte, per la massima parte, dal trattato dello Schouten « Ricci-Calculus » (Springer Verlag, 2ª Edizione, 1954).

« Alla Famiglia Ricci-Curbastro, al Consiglio Nazionale delle Ricerche e ai vari Enti che hanno largamente contribuito finanziariamente alle spese di stampa dei due volumi e a tutti i Collaboratori, il Comitato, anche a nome dell'Unione Matematica Italiana, esprime i più vivi ringraziamenti ».

Il Presidente ringrazia il Collega Tonolo e si compiace vivamente per l'importanza dell'opera realizzata dall'Unione Matematica Italiana.

Il Segretario accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci: Graffi, Supino, Tonzig, Chisini, E. Bompiani, Natta, Signorini, Segre, Picone, Montalenti e Armellini.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

BOBOC N. – Sur la caracterisation des variétés différentiables a base denombrable (pres. dal Socio M. PICONE).

CIMINO M. e FRESA A. – Fotometria fotoelettrica dell'eclisse totale di luna del 13-14 maggio 1957 (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

GRÖBNER W. – L'inversione di un sistema di funzioni analitiche mediante serie di Lie (pres. dal Socio M. PICONE).

MARCHIONNA E. – Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota I (pres. dal Socio O. CHISINI).

MARCHIONNA E. – Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota II (pres. dal Socio O. CHISINI).

SCROCCO M. e CAGLIOTI L. – Spettroscopia I.R. nel campo di vibrazione del —CH_3 su alcuni derivati pirrolici (pres. dal Socio V. CAGLIOTI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Picone, anche a nome del Collega Caccioppoli, dà lettura della relazione sulla Memoria di E. De Giorgi dal titolo: «Sulle proprietà isoperimetriche dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata secondo Caccioppoli di misura finita». Tale relazione, che conclude proponendo la stampa del suddetto lavoro nelle Memorie accademiche, è messa ai voti dal Presidente e approvata all'unanimità.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 marzo 1958

- Becarios del Consejo Superior de Investigaciones Cientificas*. Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, 1957. Pp. 141, in-8°.
- BONAZZI Augusto. — *Genesi e collaborazione dei suoli dei Llanos Venezuelani*. Opera pubblicata in collaborazione tra l'Istituto Venezuelano Italiano di Cultura di Caracas e l'Istituto Agronomico per l'Oltremare di Firenze. Firenze, Tip. Coppini, 1957. Pp. 117, in-8°, con figg. e tavv.
- BOSSOLASCO Mario e DAGNINO Ignazio. — *Sulla turbolenza delle correnti marine nello stretto di Messina*. Estr. da «Geofisica Pura e Applicata», vol. XXXVII, 1957.
- *Sulle correnti costiere nel golfo di Genova*. Estr. da «Geofisica Pura e Applicata», vol. XXXVIII, 1957.
- BOSSOLASCO Mario, CAVO A. e DAGNINO Ignazio. — *Sulla genesi dei microsismi*. Estr. da «Geofisica Pura e Applicata», vol. XXXVIII, 1957.
- CAMERON Austin W. — *A guide to eastern canadian mammals*. Illustrations by John Crosby. Ottawa, The Minister of Northern Affairs and National Resources, 1956. Pp. 72, in-8°, con figg. (National Museum of Canada. Department of Northern Affairs and National Resources).
- CAVO A. — Vedi: BOSSOLASCO Mario, CAVO A. e DAGNINO Ignazio.
- CHIODI Valentino. — *Storia della veterinaria*. Milano, Farmitalia, Servizio Veterinario, 1957. Pp. XIV-535, in-8°, con figg. e tavv.
- CROSBY John. — Vedi: CAMERON Austin W.
- DAGNINO Ignazio. — Vedi: BOSSOLASCO Mario e DAGNINO Ignazio.
- Vedi: BOSSOLASCO Mario, CAVO A. e DAGNINO Ignazio.
- GHIGI Alessandro, PASQUINI Pasquale e RAFFAELE Federico. — *La vita degli animali*. 2ª ed. aggiornata e accresciuta. Vol. I e II. Torino, Unione Tipografico-Editrice, 1958. Voll. 2, in-8°, con figg. e tavv.
- HOFFMAN J. — Vedi: TODESCHINI Marco.
- JONESCU Mihail A. — *Cynipinae*. Bucureşti, Editura Academiei Republicii Populare Romine, 1957. Pp. 246, in-8°, con figg. (Fauna Republicii Populare Romine. Insecta, vol. IX, fasc. 2).
- PASQUINI Pasquale. — Vedi: GHIGI Alessandro, PASQUINI Pasquale e RAFFAELE Federico.
- RAFFAELE Federico. — Vedi: GHIGI Alessandro, PASQUINI Pasquale e RAFFAELE Federico.
- RAIGI Amedeo. — *Clinica dei tumori dell'utero*. Livorno, Stab. Tip. Belforte, 1958. Pp. 4, in-8°.
- *Fisiopatologia delle leucemie*. Livorno, Stab. Tip. Belforte, 1957. Pp. 4, in-8°.
- RICCI-CURBASTRO Gregorio. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. II: *Note e Memorie. Teoria dell'elasticità*. Roma, Edizioni Cremonese, 1957. Pp. 586, in-8°.
- SYMPOSIUM ON PRESTRESSED CONCRETE AND COMPOSITE BEAMS. — *Proceedings*. S. I., Science Council of Japan, Architectural Institute of Japan, Japan Society of Civil Engineers, 1955. Pp. 96, in-8°, con figg. e tavv.
- SYMPOSIUM ON SAFETY OF STRUCTURES. — *Proceedings*. S. I., Science Council of Japan, Architectural Institute of Japan, Japan Society of Civil Engineers, 1956. Pp. 127, in-8°, con figg. e tavv.
- TODESCHINI Marco. — *L'unificazione qualitativa della materia e dei suoi campi di forze continui ed alterni*. (Estratto dagli «Atti dell'Ateneo di Bergamo», vol. XXIX, 1955-56). [Poi]: HOFFMAN J. — *Note informative*. Bergamo, Ateneo di Scienze, Lettere ed Arti, 1957. Pp. 64, in-8°, con ritr. dell'A.
- UNIVERSITÀ DI MILANO. ISTITUTO DI CHIMICA INDUSTRIALE. — *Pubblicazioni degli Anni Accademici dal 1924-25 al 1954-55*. Milano, 1958. Pp. 176, in-4°.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE
PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCO DEI CONCORRENTI

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE
PER LA GEOLOGIA, PALEONTOLOGIA E MINERALOGIA PER IL 1958

(Scadenza 31 dicembre 1957 - Premio lire 1.000.000).

1. GUALTIERI ROBERTO. — 1. « Perfezionamento dei forni Gill e utilizzazione dei prodotti gassosi ». — 2. « Ipotesi di lavoro sulla genesi della mineralizzazione solfifera siciliana ». — 3. « La Genesi dello Zolfo italiano - Nuovi orientamenti per le ricerche ». — 4. « Sulla formazione di minerale solfifero o di calcare sterile da rocce solfatiche ». — 5. « Esame microscopico della trasformazione gesso minerale solfifero ».

2. LEONARDI PIERO. — 1. « Nuove idee sulla geologia della Valle del Piave nel tratto fra Lozzo e Perarolo ». — 2. « La "Mefite" di Rocca S. Felice nell'Irpinia ». — 3. « Carta Geologica delle Tre Venezie - Pieve di Cadore ». — 4. « Orme di Hamatopus Wildfeueri su una lastra di Arenaria del Buntsandstei della Turingia ». — 5. « Una nuova ricca fauna degli strati di S. Cassiano (Trias Sup.) rinvenuta nei dintorni di Cortina d'Ampezzo ». — 6. « Segnalazione di una nuova ricca fauna Carnica inferiore dei dintorni di Cortina d'Ampezzo (Dolomiti orientali) ». — 7. « Saggio di sintesi tettonica delle Dolomiti orientali ». — 8. « Segnalazione di nuovi, e ricchi giacimenti fossiliferi negli Strati di S. Cassiano dei dintorni di Cortina d'Ampezzo (Dolomiti Orientali) ». — 9. « Quarziti paleolitiche della Grotta di S. Teodoro (Messina) ». — 10. « Caccia grossa preistorica in Italia ». — 11. « Carta geologica delle Tre Venezie (Belluno) ». — 12. « Contributo alla conoscenza dell'Industria Paleolitica Superiore della Grotta di S. Teodoro in Provincia di Messina ». — 13. « A proposito dello scorrimento della Cima del Rodella e di una recente pubblicazione di M. Ogilvie Gordon e J. Pia ». — 14. « Imbarcazione di tipo preistorico rinvenuta ai margini della laguna di Venezia ». — 15. « Notizie sui risultati preliminari di uno scavo paleontologico eseguito nel deposito pleistocenico di Quinzano Veronese ». — 16. « Alluvioni oleoceniche con tracce di industria umana a S. Cristina di Parona nel Veronese ». — 17. « Estratto dal vol. "Sassolungo, Catinaccio, Latemer" della Collezione "Guida dei monti d'Italia del C.A.I. e della C.T.I." ». — 18. « Risultati Paleontologici di uno scavo sistematico nel deposito pleistocenico di Quinzano presso Verona ». — 19. « Un nuovo giacimento di interresse paleontologico presso il Ponte Catena alla periferia di Verona ». — 20. « Carta geologica delle Tre Venezie - Feltre ». — 21. « Risultati di uno studio paleontologico sul Pitecantropo ». — 22. « Sintesi Stratigrafico-Tettonica e nuova carta geologica al 50.000 della Val Gardena e dei gruppi dolomitici circostanti ». — 23. « La fauna cassiana di Cortina d'Ampezzo - Parte I - Introduzione Geologica e Lamellibranchi ». — 24. « Schema Tettonico della Regione Dolomitica Veneto-Tridentina ». — 25. « Pitecantropo e Sinantropo ». — 26. « Note Paleontologiche sul Pitecantropo ». — 27. « I primi resti di pesci rinvenuti nel Trias della Regione Dolomitica ». — 28. « Prima segnalazione di un Mosasauo del genere Globidens nel cretaceo dell'Egitto ». — 29. « Notizie sui primi resti di castoro rinvenuti nelle torbiere delle Valli di Fimon (Colli Berici) ». — 30. « Lo scheletro di "Leithia melitensis" del Museo geologico di Padova e il problema delle faune insulari pleistoceniche del Mediterraneo ». — 31. « I Mosasauri del Veneto - Revisione critica dei resti fossili di

Mosasauri rinvenuti nel Veneto e saggio di bibliografia del sottordine Pythonomorpha». — 32. «Resti fossili di rinoceronti del Museo di Storia Naturale di Trieste». — 33. «L'ippopotamo del Valdarno». — 34. «Resti fossili inediti di rinoceronti - conservati nelle collezioni dell'Istituto Geologico dell'Università di Padova». — 35. «Contributi alla conoscenza della flora delle arenarie di Val Gardena (Permiano Medio-Inf.) dell'alto Adige - La nuova flora di Redagno e una felce di Egna». — 36. «Nuove forme di Gasteropodi della fauna di Cortina d'Ampezzo». — 37. «Una nuova forma verfeniana del Cadore». — 38. «Nuove ricerche geologiche nel gruppo della Marmolada (Dolomiti)». — 39. «Le stazioni dell'età del ferro sullo Sciliar (m. 2500 s. m.) nelle Dolomiti». — 40. «Una nuova stazione veneta dell'età del bronzo: i fondi di capanne di Sossano». — 41. «Scoperta di due nuove grotte di interesse paleontologico e paleontologico nei Colli Berici». — 42. «Ricerche nella Regione dolomitica». — 43. «Novità Geopaleontologiche Dolomitiche». — 44. «Nuove ricerche Paleontologiche nelle Venezie». — 45. «Statigrafia del deposito Quaternario della Grotta Marilisa da Schio nei Colli Berici». — 46. «Alpinismo Geologico ottocentesco». — 47. «La Grotta del Broion nei Colli Berici». — 48. «Nuove forme di echinodermi della fauna cassiana di Cortina d'Ampezzo». — 49. «Notizie geologiche sul territorio di Tramutola in Basilicata». — 50. «Su alcuni fossili ladinici di Bulla in Val Gardena e sul valore stratigrafico di due forme del genere Daonella». — 51. «L'evoluzione biologica e l'origine dell'uomo». — 52. «Darwin». — 53. «Segnalazione di resti di Antracoterio nelle ligniti dei dintorni di Chiupano». — 54. «Una sepoltura preistorica scoperta nei pressi di Martignano a Trento». — 55. «Nuove serie di petroglifi della Val Camonica». — 56. «Ricerche paleontologiche e paleontologiche nelle grotte e stazioni preistoriche dei Colli Berici». — 57. «Risultati di uno scavo nella stazione del III periodo La Tène sul Col di Flam presso Ortise in Val Gardena». — 58. «La structure des Alpes Dolomitiques». — 59. «L'evoluzione dei viventi». — 60. «Corso di Geologia - Stratigrafia e Geologia Storica». — 61. «Orme di Tetrapodi nelle arenarie di Val Gardena (Permiano Medio-Inferiore dell'Alto Adige Sud-Orientale)». — 62. «Seconda campagna di scavi nelle grotte di Berici (Vicenza)». — 63. «Flora Fauna delle Arenarie di Val Gardena (Permiano medio) delle Dolomiti Occidentali». — 64. «Nuovi scavi nelle stazioni preistoriche della Sciliar (Dolomiti)». — 65. «Il Castelliere del Dos Zelor in Val di Fiemme (Trentino)». — 66. «La stazione preistorica del Castellon del Brosimo sui Colli Berici orientali (Vicenza)». — 67. «Moderne vedute sul problema dell'evoluzione - La teleogenesi». — 68. «Ricerche sulla geologia e paleontologia della regione dolomitica». — 69. «Indizi di un nuovo insediamento pre- o protostorico scoperto nel parco della parrocchia di Cavalese in Val Fiemme (Trentino) - II. La Necropoli protostorica della Cava di Via Pasquai a Cavalese». — 70. «La Fauna Cassiana di Cortina d'Ampezzo - Parte II: Cefalopodi». — 72. «Vorläufiger Bericht über die Wallburg auf M. Rocca-Schwarzhorn bei Cavalese (Westl. Dolomiten)». — 72. «Resti fossili di "Sivachoerus" del giacimento di Sahabi in Cirenaica (Africa Settentrionale)». — 73. «Finalistic Evolution or "Teleogenesis"». — 74. «Concezioni moderne sul problema dell'evoluzione biologica». — 75. «Ricerche sulla geologia e paleontologia della regione dolomitica (Campagna 1951)». — 76. «Déodat de Dolomieu e le Dolomiti». — 77. «La Genealogia dei viventi». — 78. «Il Gruppo dello Sciliar». — 79. «Flora continentale Ladinica delle Dolomiti». — 80. «Désertes Actuels et Anciens». — 81. «Relazione di un viaggio in Spagna e Francia compiuto in occasione del "Cursillo Internacional de Paleontologia y Estratigrafia" tenuto in Sabadell (Barcellona) nell'estate 1952». — 82. «Il Castelliere sulla cima della Rocca delle Dolomiti occidentali». — 83. «Nuove stazioni del Paleolitico inferiore e medio in Emilia». — 84. «Un osso nasale di Metoposaurus nei tufi a Pachicardie dell'Alpe di Siusi (Dolomiti ecc.)». — 85. «Tirage à part des: Actes du IV^e Congrès International du Quaternaire "Stratigrafia quaternaria nelle grotte di S. Cassiano (Vicenza)"». — 86. «Idem, idem, idem, "Il Paleolitico inferiore e medio dell'Appennino Bolognese-Romagnolo"». — 87. «Ricerche geo-paleontologiche della regione dolomitica - Nuova interpretazione della tettonica della Val di Fassa e scoperta di tronchi silicizzati giuresi nella Valle del Piave». — 88. «L'Istituto ferrarese di Paleontologia umana - Attività svolta durante gli anni 1950-1952». — 89. «Una moneta dell'imperatore Tito e nuovo

materiale fittile rinvenuti nel luogo di culto del M. Castello (m. 2500) sull'Altipiano dello Sciliar nelle Dolomiti». — 90. «Algunos aspectos interesantes de la evolución de los mamíferos». — 91. «La Terra». — 92. «Monogenismo e Poligenismo». — 93. «Cenni Geologici sulla Zona di Bolzano». — 94. «I suidi di Sahabi nella Sirtica (Africa Settentrionale)». — 95. «Les Mammifères nains du pléistocène méditerranéen». — 96. «I Castellieri della Venezia Tridentina». — 97. «Erdgeschichte». — 98. «Vorgeschichtliche Felszeichnungen im Etschtal bei Castelfeder». — 99. «Il "Castelir" di Bellamonte in Val Trivignolo (Dolomiti occidentali)». — 100. «Nuove ricerche paleontologiche nella Bassa Val di Fiemme (Trentino)». — 101. «Scavi sul "ciaslir" di Santa Giuliana in Val di Fassa nelle Dolomiti». — 102. «Manufatti del Paleolitico inferiore in un deposito costiero dell'Appennino Bolognese-Romagnolo». — 103. «Divagazioni Paleontologiche». — 104. «Nuove ricerche sulla stratigrafia e sulle indurte del Paleolitico superiore della Grotta del Broion nei Colli Berici (Vicenza)». — 105. «Fiemme preistorica e protostorica». — 106. «El evolucionismo y los últimos datos de la Paleontología». — 107. «Le origini del corpo umano alla luce delle più recenti scoperte». — 108. «La dislocazione trasversale di Ferarolo secondo contributo alla geologia della valle del Piave (Dolomiti orientali)». — 109. «Note di viaggio sulle figurazioni parietali paleolitiche franco-cantabriche». — 110. «Impressioni di viaggio sull'arte parietale franco-cantabrica». — 111. «Outillages du Paléolithique inférieur dans des cailloutis marins côtiers de l'Apennin émilien». — 112. «Breve sintesi geologica delle Dolomiti occidentali». — 113. «Quarta campagna geo-paleontologica nelle Dolomiti (Estate 1953)». — 114. «Ricerche sull'età delle industrie Paleolitiche inferiori dell'Appennino Emiliano-Romagnolo». — 115. «Dislocazioni triassiche non orogeniche in Val di Fassa». — 116. «L'uomo visto da un Paleontologo». — 117. «Origine e natura geologica dei terreni della pianura ferrarese». — 118. «I porfidi quarziferi di S. Leonardo nell'Alto Adige sud-orientale». — 119. «Manufatti del paleolitico inferiore di un deposito costiero dell'Appennino Bolognese-Romagnolo». — 120. «Preistoria Vicentina». — 121. «Notizie preliminari sul "Coccodrillo di Portomaggiore"». — 122. «Los orígenes humanos a la luz de los descubrimientos más recientes». — 123. «La evolución biológica». — 124. «Risultati delle nuove ricerche stratigrafiche sul paleolitico inferiore dell'Appennino Emiliano-Romagnolo». — 125. «La Fauna delle Pampas nel Museo Botet di Valencia (Spagna) e le escursioni del II cursillo internacional de paleontología (Sabadell 1954)». — 126. «Prima segnalazione di manufatti microlitici di tipo mesolitico nella Grotta di Paina sui Colli Berici (Vicenza)». — 127. «Paleontologia umana o Paleoantropologia». — 128. «Témoignages de l'Homme de Néandertal dans l'Italie du Nord». — 129. «La scogliera coralligena del Sella nelle Dolomiti occidentali». — 130. «Il paleolitico dell'Italia padana». — 131. «Campagne geo-paleontologiche 1954-56 dell'Istituto Geologico di Ferrara nelle Dolomiti». — 132. «Origine ed evoluzione della vita». — 133. «I porfidi permiani di Cavalese». — 134. «La fauna Cassiana di Cortina d'Ampezzo - Parte III - Gasteropodi». — 135. «Geologia delle Dolomiti Veneto-Trentine», Vol. I. — 136. «Geologia delle Dolomiti Veneto Trentine», Vol. II. — 137. «Carta geologica della Val di Fassa».

3. STASSI-D'ALIA FERDINANDO. — «Analisi di fenomeni interessanti la crosta terrestre alla luce di una moderna condizione di plasticità».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL «PREMIO BATTISTA GRASSI 1958»

(Scadenza 31 dicembre 1957 - Premio lire 300.000).

1. FRIZZI GUIDO. — 1. «Studi preliminari comparativi sul ciclo della Dirofilaria, ecc.». — 2. «Resistenza alla Dirofilaria, ecc.». — 3. «L'anofelismo del Veneto dopo dieci anni di trattamento con disinfestanti ad azione residua». — 4. «Nuovi orientamenti per lo studio delle specie anofeliche, ecc.». — 5. «Étude Cytogénétique d'Anopheles gambiae». — 6. «Poliformismo cromosomico in Anopheles». — 7. «Studio della fauna anofelica nella piana di Valencia (Spagna)». — 8. «Primi tentativi di trapianti di organi endocrini, ecc.». —

9. «Effect of DDT Selection Pressure, ecc.». — 10. «Preliminari indagini citogenetiche su alcuni focolai larvali di "Anopheles Maculipennis" delle Provincia di Bari».

2. OMODEO PIETRO. — 1. «Oligocheti terricoli del Venezuela raccolti dal dott. Marcuzzi». — 2. «Aspetti biogeografici della speciazione». — 3. «Lombrichi cavernicoli di Grecia e Turchia», raccolti dal dott. K. Lindberg. — 4. «Eudrilinae e octochaetinae della Costa d'Avorio (Oligochaeta)». — 5. «Cariologia dei Lumbricidae». II contributo. — 6. «Nuove specie dei generi a distribuzione anfiatlantica Wegeneriella e Neogaster». — 7. «Contributo alla revisione dei Lumbricidae». — 8. «I Lombrichi dei Monti Sibillini e la drilofauna degli Appennini». — 9. «Oligocheti dell'Indocina e del Mediterraneo Orientale». — 10. «Lumbricidae and Lumbriculidae of Greenland. Meddelelser om Grønland». — 11. «La disputa sulla generazione spontanea da Redi fino a Lamarck».

3. STARKOFF OLEG. — 1. «Su di un esemplare tiedro di *Taenia saginata* Goetz, 1782». — 2. «Fauna di Romagna». — 3. «Due casi di malformazione in *Izodidae*». — 4. «Presenza in Italia di *Argas persicus*». — 5. «Primo reperto in Italia di *Ornithodoros erraticus*». — 6. «*Ixodoidea* del Museo Civico di Storia Naturale "G. Doria" di Genova». — 7. «Cenni storici sulle nostre conoscenze intorno alle zecche con particolare riguardo all'Italia». — 8. «Sulla presenza in Italia di *Argas Persicus*». — 9. «*Ixodoidea* della Sicilia». — 10. «Un caso di miasi delle vie urinarie di *Fannia canicularis* (L.)». — 11. «Contributo alla conoscenza dell'Acarofauna di Roma e dintorni». — 12. «Id., nota V».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL «PREMIO LUIGI D'AMATO 1958»

(Scadenza 31 dicembre 1957 - Premio lire 150.000).

1. AMEDEO RAIGI. — «Sul cosiddetto Scirro della Mammella».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO «GIOVANNA JUCCI» PER IL 1958

(Scadenza 31 dicembre 1957 - Premio lire 50.000).

1. BIANCHI ANGELO. — 1. «L'anemia macrocitica ereditaria e l'ipogenitalismo dei topi macchiati» in collab. con C. Manera. — 2. «Sul contenuto in zuccheri nei frutti di varie razze di pomodoro e di alcuni loro incroci» in collab. con R. Forlani e C. Manunta. — 3. «Convegno Internazionale di Cerealicoltura mediterranea». — 4. «Aspetti del secreto vaginale delle topine W^v/W^v anemiche e sterili», in collab. con G. Marchesi e P. Ribera. — 5. «Selezione di pomodoro con elevato contenuto zuccherino nei frutti». — 6. «Fattori genetici nel tempo di fioritura di un incrocio di *Zea Mays*», in collab. con I. Maliani. — 7. «Ancora sulle modificazione della crasi sanguigna in seguito alla legatura della vena splenica e della vena coronaria gastrica e successiva splenectomia nei topi normali ed eterozigoti per i fattori dello «spotting dominante», in collab. con C. Manera. — 8. «Alcuni effetti di ormoni sessuali nelle gonadi e sulla milza di topi normali e di topi dello «spotting dominante», in collab. con C. Manera. — 9. «Modificazioni da estrogeni sulle gonadi e nella milza di topi normali ed eterozigoti per i fattori dello «spotting dominante» (comunicazione preliminare), in collab. con C. Manera. — 10. «Eterosi». — 11. «Modificazioni da stilbeni nel secreto vaginale di topine W^v/W^v anemiche e sterili», in collab. con C. Manera, G. Marchesi e P. Ribera. — 12. «Modificazioni determinate da estrogeni nelle gonadi e nella milza dei topi normali ed eterozigoti per i fattori dello «spotting dominante», in collab. con C. Manera. — 13. «Geni modificatori comuni agli alleli dello «spotting dominante» del topo e teorie della dominanza». — 14. «Meccanismi genetici nel tempo di fioritura in un incrocio di *Zea mays*», in collab. con A. Bottazzi. — 15. «Possibilità speculative e di applicazione pratica nello studio dei mutanti del locus W del topo».

— 16. «Studies of defectived seeds originating in teosinte-maize derivatives», in collab. con P. C. Mangelsdorf. — 17. «Gli studi in corso sugli alleli del locus W nei topi». — 18. «Defective endosperm mutants from maize-teosinte derivatives». — 19. «Defective endosperm mutants from maize-teosinte derivatives». — 20. «Defective caryopsis factors from maize-teosinte derivatives. I. Origin, description and segregation». — 21. «Un eccellente materiale per studi citologici nella discendenza di un incrocio fra granoturco e teosinte». — 22. «A new method of placing inherited factors in maize?». — 23. «Defective endosperm factors from maize-teosinte derivatives». «Endosperm chimeras on ears segregating detfactors». «Ga-factor in maize-teosinte derivatives». «Incomplete synapsis a multiple tester». «Mitotic disjunction and non-disjunction on the case of interchanges involving the B-type chromosomes». «Balanced lethals for determining linkage». — 24. «Gametophyte factors in maize-teosintes derivatives». — 25. «Introgressione teosintica e mutazioni nel mais». — 26. «Correcting the genetically determined sterility of W^v/W^v male mice», in collab. con G. Veneroni. — 27. «Conservazione di stipiti genetici di mais in Italia». — 28. «Fattori genetici determinanti cariossidi difettose in discendenti di incroci fra mais e teosinte». II. «Curve di variabilità dei pesi».

2. MILANI RICCARDO. — 1. «Relations between courtship and fighting behaviour in some *Drosophila* species». — 2. «Relations between courting and fighting behaviour in some *Drosophila* species (*obscura* group)». — 3. «The genetics of the housefly - Preliminary note». — 4. «Genetics aspects of the development of resistance to chemical insecticides». — 5. «Comportamento ereditario dei caratteri *knock-down resistance* (*kdr*) e *plexus* (*plx*) in *M. domestica* L.». — 6. «Mendelian inheritance of knockdown resistance to DDT and correlation between knockdown and mortality in *Musca domestica* L.». — 7. «Considerazioni genetiche su alcuni aspetti della biologia della Mosca domestica e osservazioni sulla fecondità e sulla fertilità». — 8. «Osservazioni sugli scleriti dei segmenti terminali di individui sessualmente anormali di *M. domestica* L.», su collaborazione con L. Rivosecchi. — 9. «Malformazioni e mutazioni di *Musca domestica* L. di interesse per la conoscenza dei segmenti terminali maschili dei Ditteri», in collaborazione con L. Rivosecchi. — 10. «Ricerche genetiche sulla resistenza degli insetti alla azione delle sostanze tossiche». — 11. «Errori genetici in ricerche sulla ereditarietà della resistenza agli insetticidi». — 12. «Some aspects of genetic research on insecticide resistance». — 13. «Osservazioni sulla lotta chimica contro gli artropodi di interesse agrario». — 14. «Ricerche genetiche sulla resistenza al DDT in *Musca domestica*. Concatenazione del gene *kdr* (*knockdown-resistance*) con due mutanti morfologici», in collaborazione con A. Travaglino. — 15. «Recenti sviluppi delle ricerche genetiche sulla mosca domestica». — 16. «Genetics and Sanitary Entomology».

3. TESTA ITALO. — 1. «Problemi medico-biologico-giuridici degli illegittimi». — 2. «Un secondo caso di EBE (Epidermolisi bollosa ereditaria) letale, riscontrata in un solo membro di una coppia di gemelli neonati». — 3. «Ein Fall von mongoloiden zwillingskindern ohne geistige Störungen». — 4. «Mongolismus und Sauerstoffmangel». — 5. «Ei-nelinge Zwillinge bei Triton, ihre experimentelle Herstellung und ihre Regulation». — 6. Ueber die Regulation der halbseitigen Organanlagen bei, ecc.».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE 1958 PER LE SCIENZE MATEMATICHE

(Scadenza 31 gennaio 1958 - Premio lire 250.000).

1. ARCIDIACONO GIUSEPPE. — 1. «Sulla estensione delle operazioni aritmetiche». — 2. «Sul gruppo aggiunto del gruppo di Galileo». — 3. «Sui gruppi ortogonali negli spazi a tre, quattro, cinque dimensioni». — 4. «Sui gruppi aggiunti dei gruppi delle rotazioni negli spazi a tre, quattro, cinque dimensioni». — 5. «Sull'importanza del "gruppo base" nel problema della unificazione dei campi fisici». — 6. «La elettrodinamica e la idrodinamica nella "teoria di relatività finale"». — 7. «La teoria degli universi fisici». — 8. «La

relatività di Fantappiè». — 9. «Modelli di universo». — 10. «Teoria unitaria e modelli di universo». — 11. «Visione unitaria dell'universo». — 12. «Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale». — 13. «Sul campo elettromagnetico generalizzato». — 14. «Sul significato fisico della "Teoria di relatività finale"». (*Con gli stessi lavori concorre al Premio per le Scienze fisiche.*)

2. BONERA PIETRO. — 1. «Sui gruppi di livello del cubo della curvatura proiettiva per la cubica ellittica». — 2. «Sui gruppi di livello del cubo della curvatura proiettiva per la cubica nodata». — 3. «Sui nodi delle curve gobbe razionali dotate di quaterna armonica di punti d'iperosculazione». — 4. «Sopra alcune generalizzazioni della superficie desmica».

3. DE FERRA CLAUDIO. — «Tavola di mortalità per una popolazione inomogenea».

4. DE TULLIO CIRILLO ELDA. — «Sulle rappresentazioni complesse dell' S_2 tripotenziale».

5. GIOVANNINI GIGLIANA. — «Sulla sincronizzazione dei sistemi non lineari a più di due gradi di libertà».

6. IOVINO GIUSEPPE MARIO. — «Manuale calcolatore».

7. LAMPARIELLO AGOSTINO. — 1. «Area di un quadrilatero in funzione dei lati». — 2. «Criterio del rapporto generalizzato e conseguenze notevoli». — 3. «Divisibilità di due polinomi in una variabile».

8. LETI GIUSEPPE. — «Determinazione dei gruppi aggiunti del gruppo di Galilei e di alcuni suoi sottogruppi».

9. MONTALDO OSCAR. — 1. «Sui sistemi autonomi che godono delle proprietà di Kasner». — 2. «Su un problema di valori al contorno per le funzioni bicaloriche». — 3. «Sul primo problema di valori al contorno per l'equazione del calore». — 4. «Un problema di valori al contorno per una equazione parabolica del quarto ordine». — 5. «Sull'integrazione dei sistemi di Riccati». — 6. «Esistenza di infiniti autovalori per un sistema differenziale lineare omogeneo a coefficienti costanti». — 7. «Sul sistema di due equazioni differenziali ordinarie (*fuori concorso*)».

10. PEZZANA MARIO. — «Rendiconti sul seminario matematico».

11. PINI DE SOCIO MARIA LUISA. — 1. «Sull'instabilità delle onde elettromagnetiche, ecc.». — 2. «Alcuni teoremi di unicità per le equazioni di Maxwell». — 3. «Sulla propagazione nelle guide con dielettrico eterogeneo». — 4. «Sulle frequenze critiche in una guida d'onda». — 5. «Sulla rappresentazione del campo elettromagnetico in una guida d'onda a pareti assorbenti». — 6. «Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un gas-ionizzato soggetto a un campo magnetico». — 7. «Sulla velocità dell'energia in un gas ionizzato soggetto ad un campo magnetico». — 8. «Sulla velocità dell'energia in una guida d'onda soggetta ad un campo magnetico». — 9. «Sulle condizioni al contorno per le guide imperfettamente conduttrici». — 10. «Sulla propagazione di onde non sinusoidali in un gas ionizzato soggetto ad un campo magnetico».

12. ROSSI FRANCESCO SAVERIO. — «Sui numeri perfetti».

13. SCHILIRÒ VINCENZO. — «Sviluppo di una funzione di variabile complessa in serie di polinomi secondo il Faber».

14. STORLAZZI ROSETTA. — «Sul moto di un punto in un piano con assegnate condizioni per la velocità».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE 1958 PER LE SCIENZE FISICHE

(Scadenza 31 gennaio 1958 - Premio lire 250.000).

1. ARCIDIACONO GIUSEPPE. — 1. «Sulla estensione delle operazioni aritmetiche». — 2. «Sul gruppo aggiunto del gruppo di Galileo». — 3. «Sui gruppi ortogonali negli spazi a tre, quattro, cinque dimensioni». — 4. «Sui gruppi aggiunti dei gruppi delle rotazioni negli spazi a tre, quattro, cinque dimensioni». — 5. «Sull'importanza del "gruppo base" nel problema della unificazione dei campi fisici». — 6. «Le equazioni di Maxwell generaliz-

zate nella teoria di relatività finale». — 7. «Sul campo elettromagnetico generalizzato». — 8. «Sul significato fisico della "teoria di relatività finale"». — 9. «La elettrodinamica e la idrodinamica nella "teoria di relatività finale"». — 10. «La teoria degli universi fisici». — 11. «La relatività di Fantappiè». — 12. «Modelli di universo». — 13. «Teoria unitaria e modelli di universo». — 14. «Visione unitaria dell'universo». (*Con gli stessi lavori concorre al Premio per le Scienze Matematiche*).

2. BATTAGLIA ARRIGUCCIO. — 1. «Absorption and Refraction of Some Polar Gases as a Function of Pressure ecc.». — 2. «Microwave Apparatus for the measurement, ecc.». — 3. «Mesures sur des gaz absorbants en fonction de la pression à 32 mm. de longueur d'onde». — 4. «Sur l'indice de réfraction de l'air humide en microondes».

3. BONASERA FRANCESCO. — 1. «Il clima del territorio di Urbino». — 2. «Il climogramma del territorio di Urbino». — 3. «L'osservatorio geofisico "Alessandro Serpieri"». — 4. «Elementi meteorologici di Urbino nel 1952». — 5. «Annuario meteorologico di Urbino 1953». — 6. «Climogramma di Urbino 1954». — 7. «Climogramma di Urbino 1955». — 8. «Climogramma di Urbino 1956». — 9. «Il "Grosso" verificatosi sul mare tra Rimini e Pesaro il 21 luglio 1946». — 10. «Controllo statistico di due proveri sulla pioggia in uso in Urbino». — 11. «Lo studio scientifico del clima della città di Ancona». — 12. «L'Istituto "Giuseppe Ceramicola" della Camera di Commercio di Ancona e lo studio del clima della città di Ancona e della Regione marchigiana». — 13. «Il climogramma di Jesi». — 14. «Bollettino economico». — 15. «Il problema dello studio scientifico del clima della Regione marchigiana». — 16. «Contributi alla conoscenza del clima delle Marche». — 17. «Profilo climatico di Ancona (1926-1940)».

4. CARRO-CAO GIUSEPPE. — «Esperienze sulla influenza della alfa-metilnaftalene, ecc.».

5. CHIAPPINI LAVAGNINI GIULIETTA. — «Analogie tra materiali magnetici e materiali dielettrici».

6. CIPRIANI ALFREDO. — «Il coefficiente K e la resistenza del mezzo».

7. JOANNIN MARIO. — «Teoria dell'ellisse d'elasticità».

8. MAYR GIOVANNA. — 1. «Dosaggio di radiosotopi mediante le emulsioni nucleari». — 2. «Advantages given by P 33 - or aged P 32 - in Autoradiographs». — 3. «Determinazione ed utilizzazione del P 33». — 4. «Verbesserung der Autoradiographischen Möglichkeiten durch Verwendung von P 33». — 5. «Dose measurements with photographic films (in collab. con J. L. Haybittle)». — 6. «Photographische Dosismessung an beta-strahlenden Nadeln». — 7. «Introduzione di calcio in emulsioni nucleari mediante assorbimento». — 8. «Dispositivo per migliorare le condizioni di assorbimento di una soluzione da parte di emulsioni nucleari». — 9. «Magnetochemical behaviour of some substances used in the medical treatment of tumors». — 10. «Coexistence of antimetabolic and carcinogenic Action» (in corso di stampa). — 11. «Contributo allo studio degli elettroni di legame». — 12. «Contaminazioni radioattive». (*Con gli stessi lavori concorre al Premio per le Scienze Chimiche*).

9. SIRACUSANO NATALIZIO. — 1. «A proposito di una obiezione mossa alla realtà fisica delle pulsazioni solari». — 2. «Osservazioni critiche alla teoria delle onde magnetoidrodinamiche di arbitraria forma».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE 1958 PER LE SCIENZE CHIMICHE

(Scadenza 31 gennaio 1958 - Premio lire 250.000).

1. ARCIDIACONO SALVATORE. — 1. «Respirazione e fotosintesi». — 2. «I virus e il problema della vita». — 3. «Fisica e biologia». — 4. «I fenomeni di anabiosi». — 5. «Termodinamica e biologia». — 6. «Teoria unitaria e modelli di universo». — 7. «El profesor Fantappiè». — 8. «Versione unitaria dell'universo». (*Con gli stessi lavori concorre al Premio per le Scienze Naturali*).

2. CARRO-CAO GIUSEPPE. — « Esperienze sulla influenza dell'alfa-metilnaftalene nella combustione dei motori a ciclo Diesel ». (*Con lo stesso lavoro concorre al Premio per le Scienze Fisiche*).

3. GIORDANO FRANCESCO. — 1. « Chimica generale inorganica ed organica ». — 2. « Mineralogia ».

4. MAYR GIOVANNA. — 1. « Dosaggio di radisotopi mediante le emulsioni nucleari ». — 2. « Advantages given by P 33 - or aged P. 32 - in Autoradiography ». — 3. « Determinazione ed utilizzazione del P 33 ». — 4. « Verbesserung der Autoradiographischen Möglichkeiten durch Verwendung von P 33 ». — 5. « Dose measurements with photographic films » (in collab. con J. L. Haybittle). — 6. « Photographische Dosismessung an betastrahlenden Nadeln ». — 7. « Introduzione di calcio in emulsioni nucleari mediante assorbimento ». — 8. « Dispositivo per migliorare le condizioni di assorbimento di una soluzione da parte di emulsioni nucleari ». — 9. « Magnetochemical Behaviour of some substances used in the medical treatment of tumors ». — 10. « Coexistence of antimetabolic and carcinogenic Action » (in corso di stampa). — 11. « Contributo allo studio degli elettroni di legame ». — 12. « Contaminazioni radioattive ». (*Con gli stessi lavori concorre al Premio per le Scienze fisiche*).

5. PICCOLI GIUSEPPE. — 1. « Contributo alla soluzione del problema antitermitico ». — 2. « L'isolamento architettonico come mezzo antitermitico ». — 3. « Per una architettura antitermitica ». — 4. « Un materiale dell'edilizia moderna di sperimentata inattaccabilità dalle termiti ».

6. RUSSO FRANCESCO. — « Dosamento volumetrico delle proteine e della caseina nel latte ».

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO DEL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE 1958 PER LE SCIENZE NATURALI

(Scadenza 31 gennaio 1958 - Premio lire 250.000).

1. ARCIDIACONO SALVATORE. — 1. « Respirazione e fotosintesi ». — 2. « I virus e il problema della vita ». — 3. « Fisica e biologia ». — 4. « I fenomeni di anabiosi ». — 5. « Termodinamica e biologia ». — 6. « Teoria unitaria e modelli di universo ». — 7. « El profesor Fantappiè ». — 8. « Visione unitaria dell'universo ». (*Con gli stessi lavori concorre al Premio per le Scienze Chimiche*).

2. ARGENTATI MARIA. — « Gli elementi tracciati e la reazione di fotosintesi ».

3. BATTIATO CARMELO. — « Osservazioni morfo-istologiche sui picnidi ».

4. BONASERA FRANCESCO. — 1. « Il clima del territorio di Urbino ». — 2. « Il climogramma del territorio di Urbino ». — 3. « L'osservatorio geofisico "Alessandro Serpieri" ». — 4. « Elementi meteorologici di Urbino nel 1952 ». — 5. « Annuario meteorologico di Urbino 1953 ». — 6. « Climogramma di Urbino 1954 ». — 7. « Climogramma di Urbino 1955 ». — 8. « Climogramma di Urbino 1956 ». — 9. « Il "Gropo" verificatosi sul mare tra Rimini e Pesaro il 21 luglio 1946 ». — 10. « Controllo statistico di due proverbi sulla pioggia in uso in Urbino ». — 11. « Lo studio scientifico del clima della città di Ancona ». — 12. « L'Istituto "Giuseppe Ceramicola" della Camera di Commercio di Ancona e lo studio del clima della città di Ancona e della Regione marchigiana ». — 13. « Il climogramma di Jesi ». — 14. « Bollettino economico Ancona » A. XI, n. 3. — 15. « Il problema dello studio scientifico del clima della Regione marchigiana ». — 16. « Contributi alla conoscenza del clima delle Marche ». (*Con gli stessi lavori concorre al Premio per le Scienze Fisiche*).

5. FAGANELLI ARMANDO. — 1. « Il trofismo della laguna veneta e la vivificazione marina ». — 2. « Resultats de trois années d'étude sur les conditions chimiques et physiques de la lagune de Venise ». — 3. « Effetti dell'alluvione del Po sulle valli salse da Pesca dei polesini vecchi ». — 4. « Osservazioni chimico-fisiche sulle acque della laguna di Marano Grado ». — 5. « Nova thalassia » (vol. II, n. 3).

6. — FILIPPI NATALE. — 1. «Contributo alla conoscenza delle Salde mediterranee con particolare riguardo alla fauna italiana (*Heteroptera*)».

7. — FORTI CLARA. — 1. «Conseguenze delle epatectomie parziali estese e ripetute su diversi organi e funzioni». — 2. «Sugli effetti lontani dell'epatectomia parziale nel ratto albino». — 3. «Effetti lontani di estese mutilazioni del fegato praticate in un tempo solo». — 4. «Sugli effetti di epatectomie parziali ripetute». — 5. «Sulle epatectomie parziali ripetute - Tecnica operatoria». — 6. «Conseguenze delle epatectomie parziali estese e ripetute - Referti istologici». — 7. «Conseguenze delle epatectomie parziali estese e ripetute - Indagini anatomo-istologiche».

8. GRANDI MARTA. — «Contributi allo studio degli efemeroidi italiani». (Voll. XVII, XVIII, XIX, XX, XXI).

9. MANGANELLI RANIERI ANNA. — «Osservazioni sul legno di tensione in un tronco di *Salix* sp.».

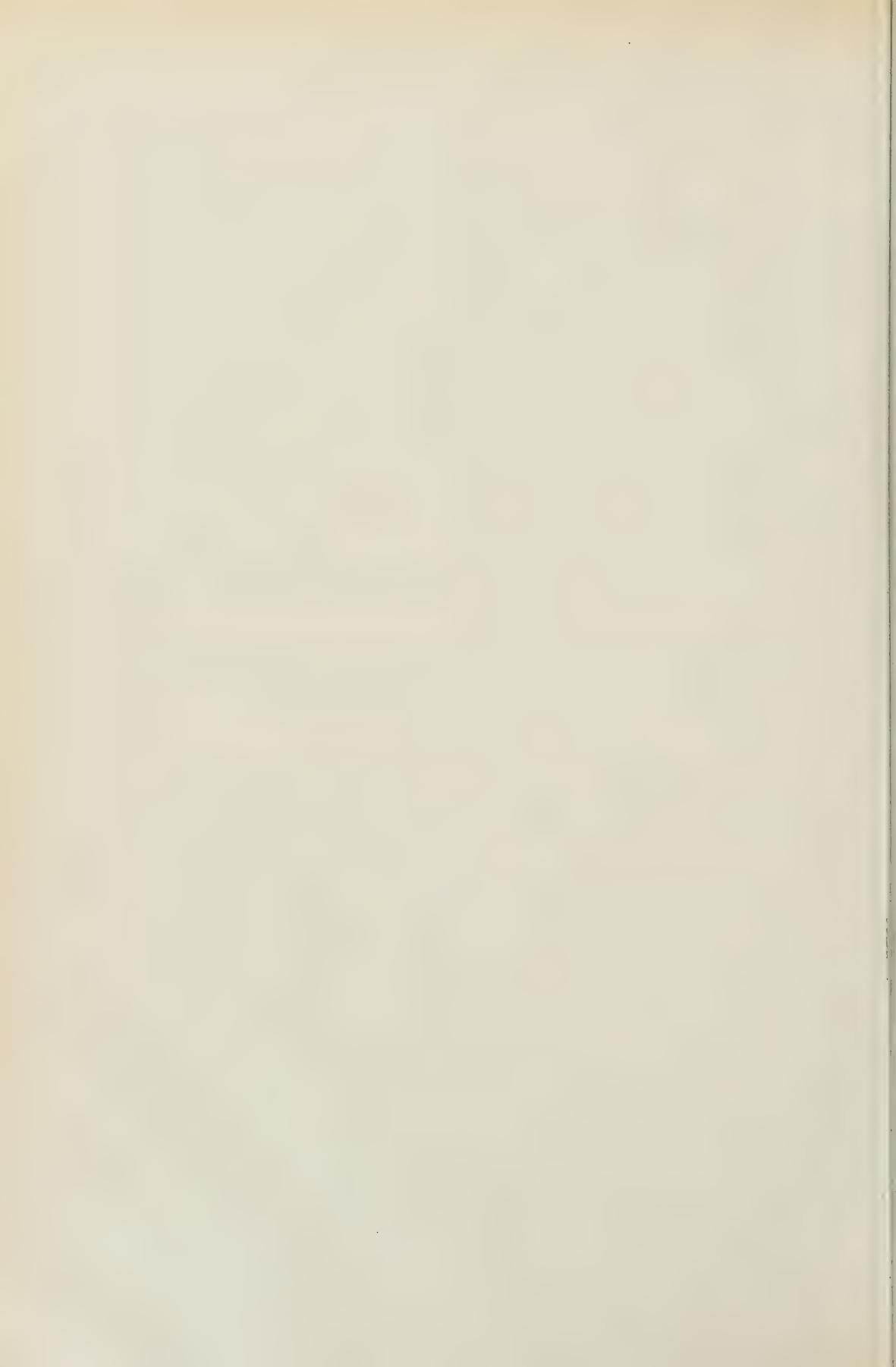
10. QUERCIOLI ELDA. — 1. «L'azione citofisiologica e citogenetica delle sostanze del gruppo delle cumarine in rapporto alla loro costituzione molecolare». — 2. «Nuovi studi sul rapporto fra la costituzione molecolare e l'azione delle cumarine sulla cellula vegetale». — 3. «Struttura molecolare e azione citogenetica e citofisiologica di sostanze del gruppo delle cumarine».

11. SCACCINI CICATELLI MARTA. — 1. «La salinité de l'Adriatique à Fano pendant la periode de crue du Po de l'hiver 1951-1952». — 2. «Le variazioni della salinità delle acque costiere dell'Adriatico a Fano in rapporto col deflusso del Po e di altri fiumi minori». — 3. «La temperatura e la salinità nelle acque superficiali dell'Adriatico a Fano dal 1951 al 1956».

12. SPENA GIOVANNA. — «I fattori letali».

13. TOMBA ANNA MARIA. — 1. «Notizie preliminari sopra uno studio cristallografico dei gessi delle Grotte Bolognesi». — 2. «I gessi saccaroidi di Sassatello e di Pieve di Gesso (Vallata del Santerno)». — 3. «I gessi delle grotte bolognesi - atlante». — 4. «Natura e montagna». — 5. «La grotta del Re Tiberio: Ieri e oggi».

14. VLORA K. ALESSANDRO. — «Il tendone».



RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 19 aprile 1958

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Complessi quadratici e cubici di spazi dotati di omologie armoniche.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

1. — OGGETTO DELLA NOTA.

In una Nota precedente ho determinato ⁽¹⁾ i complessi quadratici e cubici di rette appartenenti ad uno spazio proiettivo ad n dimensioni S_n che ammettono le omologie armoniche determinate da un $(n+1)$ -edro, aventi cioè per centri i vertici e per S_{n-1} -assi le facce ad essi opposte di questo.

Risolverò qui l'analogo problema relativamente a spazi subordinati qualsiasi S_{r-1} di S_n .

2. — IMPOSTAZIONE ANALITICA DEL PROBLEMA.

In S_n sia dato un qualsiasi riferimento proiettivo e i vertici di esso siano i vertici dell' $(n+1)$ -edro in questione. Le coordinate omogenee del vertice O_h sono le δ_h^i , $i = 1, \dots, n+1$; le coordinate di un S_{r-1} s'indichino con $p^{i_1 \dots i_r}$, con le solite proprietà di alternanza rispetto agli indici tutti distinti.

L'omologia armonica Ω_h di centro nel vertice O_h muta x^h in $-x^{-h}$ e lascia inalterate le altre coordinate quindi muta una p^{\dots} in sé o nel valore opposto secondo che fra i suoi indici non comparisce o invece comparisce l'indice h .

(*) Presentata nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) E. BOMPIANI, *Su certi complessi quadratici e cubici di rette*, « Rend. Acc. Lincei », seduta dell'8 marzo 1958.

Detto E il primo membro dell'equazione di un complesso e considerato un suo termine l'omologia Ω_h può lasciare quel termine inalterato oppure può mutarne il segno: nel primo caso l'indice h si dirà pari per il termine considerato, dispari nel secondo.

Affinché il complesso sia invariante rispetto a tutte le omologie in esame ogni termine di E dovrà avere rispetto ad un indice fissato qualsiasi lo stesso carattere pari o dispari.

Un indice a carattere pari figurerà in ciascun termine o zero volte o un numero pari di volte, e un indice a carattere dispari figurerà in un termine un numero dispari di volte (e se figurerà più di una volta dovrà figurare in ciascuno dei tre fattori se si tratta di un complesso cubico).

Indicheremo gli indici a carattere dispari con lettere latine (i, i_1, \dots, j, \dots) e quelli a carattere pari con lettere greche ($\alpha, \alpha_1, \dots, \beta, \dots$).

3. - DETERMINAZIONE DEI COMPLESSI QUADRATICI CON LE OMOLOGIE VOLUTE.

Esaminiamo anzitutto i complessi quadratici.

Supponiamo di avere un termine con tutti indici dispari (cioè a carattere dispari):

$$p^{i_1 \dots i_r} p^{j_1 \dots j_r};$$

nel loro insieme gli indici $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_r$ devono esaurire tutti i valori $1, \dots, n+1$ perché ove mancasse un indice questo avrebbe carattere pari; quindi $n = 2r - 1$. Si hanno quindi complessi con le volute omologie armoniche del tipo

$$c_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_r} p^{i_1 \dots i_r} p^{j_1 \dots j_r} = 0$$

in S_{2r-1} (le c, \dots sono alternanti rispetto agli r indici di ciascun gruppo e simmetriche rispetto ai due gruppi).

Naturalmente si possono considerare complessi di questo tipo anche in spazi di dimensione $> 2r - 1$ ma sono proiezione dei precedenti.

Esaminiamo ora un termine che contenga un solo indice pari (a carattere pari)

$$p^{\alpha i_1 \dots i_{r-1}} p^{\alpha j_1 \dots j_{r-1}}.$$

Gli indici $i_1, \dots, i_{r-1}, j_1, \dots, j_{r-1}$ sono tutti diversi fra loro e sono perciò $2r - 2$; né possono esservi altri indici a carattere dispari in altri termini di E perché uno di essi non figurando nel termine scritto sarebbe per questo a carattere pari. Ne segue che complessi (aventi le dette omologie armoniche)

$$c_{\alpha, i_1 \dots i_{r-1}, j_1 \dots j_{r-1}} p^{\alpha i_1 \dots i_{r-1}} p^{\alpha j_1 \dots j_{r-1}} = 0$$

possono esistere in qualsiasi spazio di dimensione $2r - 3 + h$, essendo $h \geq 1$ gli indici pari (mentre $i = 1, \dots, 2r - 2$).

Similmente esistono complessi del tipo

$$c_{\alpha_1 \dots \alpha_s, i_1 \dots i_{r-s}, j_1 \dots j_{r-s}} p^{\alpha_1 \dots \alpha_s i_1 \dots i_{r-s}} p^{\alpha_1 \dots \alpha_s j_1 \dots j_{r-s}} = 0$$

per $i = 1, \dots, 2(r-s)$; $s \geq 1$; e questi esistono in spazi di dimensione $\geq 2r - 2s + s - 1 = 2r - s - 1$.

Gli ultimi casi possibili sono i complessi

$$c_{a_1 \dots a_{r-1}} p^{a_1 \dots a_{r-1}} p^{a_1 \dots a_{r-1}^2} = 0$$

(analoghi ai complessi di rette di Terracini in S_3 e a quelli del tipo III della mia Nota precedente in S_n) e

$$c_{a_1 \dots a_r} (p^{a_1 \dots a_r})^2 = 0$$

(analoghi ai complessi di rette di Battaglini in S_3).

4. - COMPLESSI CUBICI. ESAME DEI SINGOLI TERMINI.

Passiamo all'esame dei complessi cubici che ammettono le omologie armoniche volute.

Sia E il primo membro dell'equazione di uno di essi; esaminiamone i singoli termini. Un termine, contenente il prodotto di tre $p \dots$ con r indici, è caratterizzato:

1° dal numero degli indici distinti a carattere pari, sia t , che compariscono in esso e dai tre numeri $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \geq 0$ di tali indici in ciascun fattore. Poiché ciascun indice pari (che indicheremo con lettere greche, distinte per indici distinti) vi comparisce esattamente due volte dovrà aversi

$$(4.1) \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2t < 3r$$

e potremo sempre assumere

$$(4.2) \quad \tau_1 \geq \tau_2 \geq \tau_3$$

quindi

$$(4.3) \quad \tau_1 \leq t, \quad 3\tau_1 \geq 2t, \quad \tau_1 \leq r;$$

2° dal numero degli indici distinti a carattere dispari, sia I ;

3° dal numero degli indici fra loro distinti a carattere dispari ciascuno dei quali sia ripetuto, necessariamente tre volte; se questo numero è l deve aversi

$$(4.4) \quad I = 3r - 2t - 2l$$

e poiché $I \geq l$ è necessariamente

$$(4.5) \quad 0 \leq 3l \leq 3r - 2t.$$

Per le (4.2) $(r - \tau_1 \leq r - \tau_2 \leq r - \tau_3)$ è inoltre

$$(4.6) \quad 0 \leq l \leq r - \tau_1.$$

Bisogna ora esaminare come possono distribuirsi in ciascun fattore gli indici a carattere pari, gli indici a carattere dispari che figurano tre volte, gli indici a carattere dispari che figurano in un solo fattore.

Allo scopo distinguiamo tre casi:

$$t = 3h \quad , \quad t = 3h + 1 \quad , \quad t = 3h + 2$$

e per riconoscere a vista di quale caso ci si occupa usiamo per essi lettere senza apici o con uno o con due apici:

$$(4.7) \quad t = 3h \quad , \quad t' = 3h' + 1 \quad , \quad t'' = 3h'' + 1$$

(e così adopereremo $l, l', l'', I, I', I''; \tau_i, \tau'_i, \tau''_i$).

1° caso: $t = 3h$.

Poiché il numero dei posti occupati da indici pari è $6h$ deve essere per le (4.2)

$$(4.8) \quad \tau_1 \geq 2h \quad , \quad 0 \leq h \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$$

e ancora per le (4.3) $\tau_1 \leq t, \tau_2 \leq r$ cioè

$$(4.9) \quad \tau_1 \leq \min.(t, r).$$

Possiamo dunque porre

$$(4.10) \quad \tau_1 = 2h + p$$

con

$$(4.11) \quad 0 \leq p \leq \min.(h, r - 2h) = H$$

e per la (4.6)

$$(4.12) \quad 0 \leq l \leq r - 2h - p.$$

È

$$I = 3r - 6h - 2l$$

quindi

$$r - 2h + 2p \leq I \leq 3(r - 2h).$$

La terna (τ_1, τ_2, τ_3) può scriversi

$$2h + p \quad , \quad 2h + q \quad , \quad 2h(p + q)$$

con le limitazioni

$$q \leq p \quad , \quad 2q \geq -p.$$

Conviene ora porre in evidenza la parità di p .

Se $p = 2\pi$ è $-\pi \leq q \leq 2\pi$ quindi la terna stessa si può scrivere

$$2h + 2\pi \quad , \quad 2h - \pi + s \quad , \quad 2h - \pi - s \quad \text{con } 0 \leq s \leq 3\pi.$$

Se $p = 2\pi + 1$ è $-\pi \leq q \leq 2\pi + 1$ quindi la terna si può scrivere

$$2h + 2\pi + 1 \quad , \quad 2h - \pi + s \quad , \quad 2h - \pi - 1 - s \quad \text{con } 0 \leq s \leq 3\pi + 1.$$

2° caso: $t' = 3h' + 1$.

Per occupare $6h' + 2$ posti occorre che sia

$$\tau'_1 \geq 2h' + 1, \quad 0 \leq h' \leq \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor$$

$$\tau'_1 \leq \min.(t, r),$$

sicch  si pu  porre

$$\tau'_1 = 2h' + 1 + p'$$

con

$$0 \leq p' \leq \min.(h', r - 2h' - 1) = H'$$

$$0 \leq l' \leq r - 2h' - p' - 1$$

$$I' = 3r - 6h' - 2l' - 2, \quad r - 2h' + 2p' \leq I' \leq 3(r - 2h') - 2.$$

Secondo che $p' = 2\pi'$ o $p' = 2\pi' + 1$ si ha l'una o l'altra delle due terne $(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3)$

$$(2h' + 2\pi' + 1, \quad 2h' - \pi' + 1 + s', \quad 2h' - \pi' - s') \quad \text{con } 0 \leq s' \leq 3\pi',$$

$$(2h' + 2\pi' + 2, \quad 2h' - \pi' + s', \quad 2h' - \pi' - s') \quad \text{con } 0 \leq s' \leq 3\pi' + 2.$$

3° caso: $t'' = 3h'' + 2$.

Occorre occupare $6h'' + 4$ con indici pari, quindi

$$\tau''_1 \geq 2h'' + 2, \quad 0 \leq h'' \leq \left\lfloor \frac{r-2}{2} \right\rfloor$$

e

$$\tau''_1 \leq \min.(t, r).$$

Si pu  porre

$$\tau''_1 = 2h'' + 2 + p''$$

con

$$0 \leq p'' \leq \min.(h'', r - 2h'' - 2) = H''$$

$$0 \leq l'' \leq r + 2h'' - p'' - 2$$

$$I'' = 2r - 6h'' - 2l'' - 4, \quad r - 2h'' + 2p'' \leq I'' \leq 3(r - 2h'') - 4.$$

Secondo che $p'' = 2\pi''$ o $p'' = 2\pi'' + 1$ si ha l'una o l'altra delle due terne $(\tau''_1, \tau''_2, \tau''_3)$

$$(2h'' + 2\pi'' + 2, \quad 2h'' - \pi'' + 1 + s'', \quad 2h'' - \pi'' + 1 - s'') \quad \text{con } 0 \leq s'' \leq 3\pi'' + 1$$

$$(2h'' + 2\pi'' + 3, \quad 2h'' - \pi'' + 1 + s'', \quad 2h'' - \pi'' - s'') \quad \text{con } 0 \leq s'' \leq 3\pi'' + 2.$$

5. - DETERMINAZIONE DEI COMPLESSI CUBICI.

Esaurito l'esame dei possibili indici che possono comparire in ciascun termine dell'equazione E di un complesso passiamo all'esame dei termini che possono comparire in E.

  fissato r , cio  ci si occupa dei complessi cubici di spazi S_{r-1} .

L'elemento essenziale è I perché in tutti i termini di E vi deve essere lo stesso numero di indici distinti a carattere dispari, altrimenti un tale indice che figurasse in un termine ma non in un altro sarebbe a carattere pari (e non dispari) per quest'ultimo termine.

Invece il numero degli indici a carattere pari può essere differente da termine a termine di E .

Fissato I (ed r) è fissata per la (4.4) la somma $t + l$; cioè possono appartenere ad uno stesso complesso termini per cui

$$t + l = t' + l' = t'' + l'' = v$$

cioè

$$3h + l = 3h' + l' + 1 = 3h'' + l'' + 2 = v.$$

Assegnato v , che caratterizza un tipo di E , si trovino tutte le coppie (h, l) , (h', l') , (h'', l'') che soddisfano alle relazioni ora scritte e alle disuguaglianze indicate. Per ogni valore di h, h', h'' si costruiscano tutte le terne (τ_1, τ_2, τ_3) , $(\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3)$, $(\tau''_1, \tau''_2, \tau''_3)$ (ciascuna dipendente da una coppia di indici p, s ; p', s' ; p'', s'' soddisfacenti alle disuguaglianze indicate). Tutti i termini così costruiti e non altri possono appartenere ad una stessa E .

6. - COMPLESSI CUBICI DI PIANI E DI S_3 .

A titolo di esempio di applicazione del metodo esposto esaminiamo alcuni casi di complessi cubici.

a) *Complessi di piani*: $r = 3$.

Poiché $1 = 9 - 2(t + l) = 9 - 2v$, $v \geq 0$, I può assumere i valori dispari 9, 7, 5, 3, 1.

a₁) $I = 9$, $t = l = 0$. Per brevità (cioè per non scrivere i coefficienti) indichiamo con $\{ \}$ una combinazione lineare dei termini scritti entro $\{ \}$; si ha un complesso del tipo

$$\{ p^{i_1 i_2 i_3} p^{i_4 i_5 i_6} p^{i_7 i_8 i_9} \} = 0, \quad i_1, \dots, i_9 = 1, \dots, 9$$

in cui gli indici tutti distinti, quindi a carattere dispari, variano da 1 a 9. Questi complessi appartengono ad S_8 (o sono proiezioni di essi se l'ambiente del complesso ha dimensione > 8).

a₂) $I = 7$. Si ha $t = 0$, $l = 1$ oppure $t = 1$, $l = 0$. Si ha un complesso del tipo

$$\{ p^{i_1 i_2 i_3} p^{i_4 i_5} p^{i_6 i_7}, p^{\alpha i_1 i_2} p^{\alpha i_3 i_4} p^{i_5 i_6 i_7} \} = 0$$

con $i, \dots, i = 1, \dots, 7$ tutti distinti e $\alpha \geq 8$.

a₃) $I = 5$. Si ha $t = 0$, $l = 2$ oppure $t = 1$, $l = 1$, o $t = 2$, $l = 0$.

I termini per cui $t = 2$ danno luogo alle terne $(2, 2, 0)$ e $(2, 1, 1)$. Il complesso è del tipo

$$\{ p^{i_1 i_2 i_3} p^{i_1 i_2 i_4} p^{i_1 i_2 i_5}, p^{\alpha i_1 i_2} p^{\alpha i_1 i_3} p^{i_1 i_4 i_5}, \\ p^{\alpha \beta i_1} p^{\alpha \beta i_2} p^{i_3 i_4 i_5}, p^{\alpha \beta i_1} p^{\alpha i_2 i_3} p^{\beta i_4 i_5} \} = 0.$$

a₄) $I = 3$. Può essere $t = 0$, $l = 3$ o $t = 1$, $l = 2$ o $t = 2$, $l = 1$ o $t = 3$, $l = 0$. Per $t = 2$ si hanno due terne $(2, 2, 0)$ e $(2, 1, 1)$; per $t = 3$ ($h' = 1$) si hanno tre terne $(3, 3, 0)$; $(3, 2, 1)$; $(2, 2, 2)$ quindi il complesso è del tipo

$$\{ (p^{123})^3, (p^{\alpha i_1 i_2})^2 p^{i_1 i_2 i_3}, (p^{\alpha \beta i_1})^2 p^{i_1 i_2 i_3}, p^{\alpha \beta i_1} p^{\alpha i_1 i_2} p^{\beta i_1 i_3}, \\ (p^{\alpha \beta \gamma})^2 p^{i_1 i_2 i_3}, p^{\alpha \beta \gamma} p^{\alpha \beta i_1} p^{\gamma i_2 i_3}, p^{\alpha \beta i_1} p^{\alpha \gamma i_2} p^{\beta \gamma i_3} \} = 0.$$

a₅) $I = 1$. Poiché $t + l = 4$, non può essere $t = 0$ perché $l \leq 3$, né $t = 1$, quindi $h' = 0$ perché $l' \leq 2$, né $t = 2$, quindi $h'' = 0$ perché $l'' \leq 1$. Invece per $t = 3$, $h = 1$, $l = 1$ si ha la terna $(2, 2, 2)$ e per $t = 4$, $h' = 1$, $l' = 0$ si ha l'unica terna $(3, 3, 2)$; il complesso è

$$\{ p^{\alpha \beta i_1} p^{\beta \gamma i_1} p^{\gamma \alpha i_1}, p^{\alpha \beta \gamma} p^{\beta \gamma \delta} p^{\delta \alpha i_1} \} = 0.$$

Come altro esempio consideriamo i complessi cubici di S_3 quindi $r = 4$ e $I = 12, 10, \dots, 2, 0$, cioè $v = t + l = 0, 1, \dots, 6$.

Il numero dei casi da esaminare si riduce tenendo conto che $l \leq I$. Si hanno i seguenti complessi di S_3

$$\text{I)} \quad \{ p^{i_1 \dots i_4} p^{i_5 \dots i_8} p^{i_9 \dots i_{12}} \} = 0, \quad I = 12$$

$$\text{II)} \quad \{ p^{i_1 i_2 i_3 i_4} p^{i_1 i_5 i_6 i_7} p^{i_1 i_8 i_9 i_{10}}, p^{\alpha i_1 i_2 i_3} p^{\alpha i_4 i_5 i_6} p^{i_7 i_8 i_9 i_{10}} \} = 0, \quad I = 10$$

$$\text{III)} \quad \{ p^{i_1 i_2 i_3 i_4} p^{i_1 i_2 i_5 i_6} p^{i_1 i_2 i_7 i_8}, p^{\alpha i_1 i_2 i_3} p^{\alpha i_1 i_4 i_5} p^{i_1 i_6 i_7 i_8}, \\ p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\alpha i_3 i_4 i_5} p^{\beta i_6 i_7 i_8}, p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\alpha \beta i_3 i_4} p^{i_5 i_6 i_7 i_8} \} = 0, \quad I = 8$$

$$\text{IV)} \quad \{ p^{i_1 i_2 i_3 i_4} p^{i_1 i_2 i_3 i_5} p^{i_1 i_2 i_3 i_6}, p^{\alpha i_1 i_2 i_3} p^{\alpha i_1 i_2 i_4} p^{i_1 i_2 i_5 i_6}, \\ p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\alpha i_1 i_3 i_4} p^{\beta i_1 i_5 i_6}, p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\alpha \beta i_1 i_3} p^{i_1 i_4 i_5 i_6}, p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\beta \gamma i_3 i_4} p^{\gamma \alpha i_5 i_6}, \\ p^{\alpha \beta \gamma i_1} p^{\alpha \beta i_2 i_3} p^{\gamma i_4 i_5 i_6}, p^{\alpha \beta \gamma i_1} p^{\alpha \beta \gamma i_2} p^{i_3 i_4 i_5 i_6} \} = 0, \quad I = 6$$

$$\text{V)} \quad \{ (p^{1234})^3, (p^{\alpha i_1 i_2 i_3})^2 p^{i_1 i_2 i_3 i_4}, p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\alpha i_1 i_2 i_3} p^{\beta i_1 i_2 i_4}, \\ (p^{\alpha \beta i_1 i_2})^2 p^{i_1 i_2 i_3 i_4}, p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\beta \gamma i_1 i_3} p^{\gamma \alpha i_1 i_4}, p^{\alpha \beta \gamma i_1} p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\gamma i_1 i_3 i_4}, \\ (p^{\alpha \beta \gamma i_1})^2 p^{i_1 i_2 i_3 i_4}, p^{\alpha \beta \gamma i_1} p^{\beta \gamma \delta i_2} p^{\alpha \delta i_3 i_4}, p^{\alpha \beta \gamma \delta} p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\gamma \delta i_3 i_4}, \\ p^{\alpha \beta \gamma \delta} p^{\alpha \beta \gamma i_1} p^{\delta i_2 i_3 i_4}, (p^{\alpha \beta \gamma \delta})^2 p^{i_1 i_2 i_3 i_4} \} = 0, \quad I = 4$$

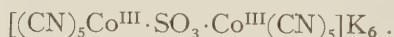
$$\text{VI)} \quad \{ p^{\alpha \beta i_1 i_2} p^{\beta \gamma i_1 i_2} p^{\gamma \alpha i_1 i_2}, p^{\alpha \beta \gamma i_1} p^{\alpha \beta \delta i_1} p^{\gamma \delta i_1 i_2}, \\ p^{\alpha \beta \gamma \delta} p^{\alpha \beta \epsilon i_1} p^{\gamma \delta \epsilon i_2}, p^{\alpha \beta \gamma \delta} p^{\alpha \beta \gamma \epsilon} p^{\delta \alpha i_1 i_2} \} = 0, \quad I = 2$$

$$\text{VII)} \quad \{ p^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} p^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 \alpha_6} p^{\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6} \} = 0, \quad I = 0.$$

Chimica inorganica. — *Azione dell'acido cianidrico sui solfiti di Co^{II}* (*). Nota di LIVIO CAMBI e ERNESTINA PAGLIA, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

Rimandiamo ai nostri precedenti lavori sulle reazioni dell'acido cianidrico con i sali di Co^{II} (1). La ricerca presente riguarda l'azione dell'acido stesso sui solfiti di Co^{II} . Comunichiamo in questa Nota il risultato più saliente, rimandiamo ad altra prossima pubblicazione il dettaglio sperimentale, la descrizione dei sali ottenuti e delle reazioni relative.

Il nostro esame si è esteso a tutti i presunti solfito- Co^{III} -cianuri descritti dai diversi Autori, ma ora ci limitiamo al cosiddetto solfito-decacianuro (2), soprattutto studiato da P. Ray (3), ampiamente descritto in tutti i maggiori trattati particolarmente come sale potassico:



Ray operò con i cianuri alcalini e soluzioni Co^{II} -solfitiche. Noi agimmo col nostro metodo originale, indipendente.

Ottenemmo il sale avente gli stessi rapporti 5 CN/2 Co/1 S/6 K sopraindicati e tutti i caratteri relativi descritti: cristallino, colore giallo aranciato intenso; alta solubilità in acqua; diamagnetico e via. Rilevammo lo stesso spettro di assorbimento nel visibile e nell'U.V.

Operammo facendo agire Co^{II} -acetato in atmosfera di HCN sulla soluzione di solfito di potassio in presenza di acetato di potassio, per la funzione di tampone, e saturammo con HCN a 0°. Dalla soluzione acquosa finale rosso-aranciata intensa separammo il sale potassico cristallino, per aggiunta di alcool metilico fino al 20% circa; oppure di alcool etilico fino a circa il 30% in volume. Il sale, prodotto con alti rendimenti, si può purificare perfettamente per ridissoluzione in acqua.

La verifica o revisione che comunichiamo è stata originata dalla osservazione della rapida ossidazione di Co^{II} a Co^{III} all'atto della cianurazione. Questa ossidazione noi verificammo per altri Co^{III} -ciano-complessi, e la discutemmo nei nostri lavori sopra citati, ma in questo caso assumeva

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la Laurea in Chimica Industriale della Università di Milano - Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) L. CAMBI e E. PAGLIA, « Rend. del Convegno sui Composti di coordinazione, Ricerca Scientifica », 1958; E. PAGLIA e C. SIRONI, « Gazz. Chim. Ital. », 88 (1958).

(2) Vedi « Abegg's Hand. anorg. Chem. », IV, 3, 461 (1935).

(3) P. RAY, « Z. Anorg. Chem. », 208, 392 (1932).

un particolare aspetto, tanto da farci presumere che in realtà intervenisse il processo dello schema seguente:



Infatti verificammo che la reazione si attua in atmosfera inerte, e che non si sviluppa idrogeno. Ray aveva supposto l'intervento dell'ossigeno atmosferico.

Abbiamo ammesso cioè che si attuasse la riduzione del solfo dalla forma di solfito a quella di solfossilato:

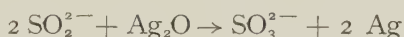


Questo non poteva risultare ovviamente delle sole analisi quantitative del complesso, ma doveva manifestarsi con il potere riducente del decacianuro. Infatti, *il sale riduce l'indaco, i sali d'argento ammoniacali, l'idrato di bismuto. Presenta tutti i caratteri dei solfossilati e dei ditioniti (idrosolfiti).*

Per la determinazione del potere riducente usammo il vecchio metodo della riduzione dei sali d'argento ammoniacali, applicato da Seyewetz e Bloch ⁽⁴⁾ all'idrosolfito (ditionito). Verificammo che nel nostro caso può intervenire anche la demolizione, operata dall'eccesso di sale ammoniacale d'argento sul pentacianuro, con formazione di AgCN e idrossidi cobaltici i quali possono agire ossidando sia l'argento ridotto od anche il radicale solforato, deprimendo comunque il titolo argentometrico.

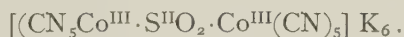
Purtuttavia, nella serie dei numerosi saggi da noi compiuti giungemmo al rapporto limite massimo di 1 S/2,04 Ag.

È noto che l'ossidazione con i sali di argento ammoniacali praticamente si arresta a SO_3^{2-} , al solfito, in schema:



la ulteriore ossidazione del solfito si manifesta assai più lentamente, e può venire trascurata, operando con metodo adeguato ⁽⁵⁾.

Abbiamo concluso che il ponte solforato del complesso binucleare corrisponde ad un radicale anionico bivalente, nettamente differenziato da SO_3^{2-} , per il tipico potere riducente, che i solfiti non presentano, corrispondente con ogni probabilità a quello solfossilico SO_2^{2-} . Il complesso corrisponde cioè a



In riferimento a quanto sopra era interessante verificare il comportamento del residuo $\{\text{Co}(\text{CN})_5\}^{2-}$ nelle ossidazioni. Verificammo che questo persiste facendo agire H_2O_2 sulla soluzione fortemente ammoniacale del decacianuro predetto che si decolora, assumendo colore giallo pallido. Per

(4) LUNGE e BERL, vol. III, 887 (1923).

(5) R. SCHOLDER e G. DENK, «Z. Anorg. Allg. Chem.», 222, 29 (1935).

successiva concentrazione, purificazione, ottenemmo l'ammoniacco-pentacianuro finora non descritto



controllato all'analisi, diamagnetico. Il solfo si ossida, come ovvio, quantitativamente a solfato.

L'indagine prosegue su gli altri presunti solfito- Co^{III} -cianuri, intesa alla verifica del probabile intervento del processo di riduzione della SO_2 a solfosilati complessi. Ricordiamo a questo proposito che R. Scholder e G. Denk ⁽⁶⁾ hanno riconosciuto la formazione di CoSO_2 per azione dei sali di cobalto sul ditionito sodico.

Botanica. — *Strutture ed attività di miceli fungini e loro probabili rapporti con la natura e l'origine dei Virus.* Nota ^(*) del Socio ALESSANDRO TROTTER.

Intendo qui riferirmi ad uno speciale gruppo di Funghi, gli Ifali, e tra essi, soprattutto alle Mucedinacee e Demaziacee, che contano, solo in Italia, un ingente numero di entità sistematiche (Generi, Specie e Varietà), assieme a buona parte delle volgari Muffe ⁽¹⁾. Funghi non solo parassiti delle piante e talora degli animali, ma anche saprofiti, costituenti in larga misura la microflora dei terreni specialmente coltivati: il terreno che, può dirsi, è culla e tomba di tutti i microrganismi, o della più parte di essi.

I cosiddetti miceli, rappresentano l'apparato con il quale tali funghi, traggono il loro nutrimento per la successiva formazione degli organi riproduttori, conidiofori e conidi. In natura, il micelio, specialmente nella sua fase giovanile, non è facilmente visibile, o non lo è affatto, o piuttosto nella esistenza e forme variabili dei «Mycelia sterilia». Questi, talora dall'aspetto di tenui veli, o di pelurie, di polveri maculiformi biancastre, presenti su organi vegetali caduti, su frustuli inumiditi e giacenti alla superficie del terreno, o di feltri o talora di ben visibili cordoni. Muffe importanti altresì per la loro grande diffusione, e per le loro proprietà sistematiche da potersi rilevare mediante colture. Nelle colture inoltre, è facile seguirne la nascita e lo sviluppo: dalla germinazione del conidio alla formazione dei conidiofori e dei nuovi conidi.

Tali colture di laboratorio, non richiedono condizioni o mezzi speciali. Si possono praticare (con temperature di 20°-30°C. secondo le entità siste-

(6) Loc. cit., p. 17 e sgg.

(*) Presentata nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) Muffa, è espressione del linguaggio comune, attribuita a funghi sistematicamente differenti tra loro, ma di aspetto esteriore convenzionale. Tra essi, negli Ifali, la Fam. Mucedinacee, che conta, in Italia circa 70 generi e quasi 500 specie, e le muffe vi sono largamente rappresentate. Segue la Fam. Demaziacee, con un centinaio di generi, ma quasi altrettante specie. Seguono, distanziate, le due altre Fam., Tuberculariacee e Stilbacee.

matiche), in acqua distillata, addizionata o no a minime dosi di sali nutritivi, od anche ad agar. Si possono praticare anche in semplice goccia pendente, per seguirne lo sviluppo nel campo del microscopio. Tali colture anaerobiche e sviluppo del micelio in profondità, appaiono le sole appropriate e forse indispensabili. Dopo brevissimo tempo, talora poche ore, si vedrà costituirsi la prima ifa (*promicelio*), che successivamente, col suo allungarsi e ramificarsi, costituirà la prima fase di vita del vero micelio giovanile, da potersi distinguere come un *protomicelio*. Successivamente, con un rapido evolversi, ed allora in condizioni aerobiche, si andrà costituendo un micelio aereo e le fruttificazioni proprie a generi e specie prescelti. Il protomicelio, durante tale fase, per il profano paragonabile al sistema radicale delle piante superiori, potrà offrirci nuove e svariate strutture. Trattasi per ora di osservazioni isolate, contingenti, cioè di colture ed osservazioni dirette piuttosto che a fini generali, ad accertamenti di micologia sistematica o di eziologia fitopatologica.

Le ife (filamenti miceliali) così formatesi, sono cilindracee tubolose di calibro costante (intorno ai $5\ \mu$ di diam.), con sottili pareti di un colorito bianco-ialino, o più o meno giallognolo, oppure brunastro col variare del loro contenuto plasmatico, che è continuo o granulare, spesso frammisto a minute goccioline oleose rifrangenti. Le ife sono settate trasversalmente, sono cioè articolate, con la possibilità anche di separarsi in articoli (artroconidi) suscettibili di ulteriore accrescimento. Ma ciò che fornisce maggiori elementi di variabilità e di caratterizzazione, sono i vari modi di collegamento tra ife di uno stesso micelio, od eventualmente di miceli contigui, ma soprattutto differenze o variazioni di carattere morfologico. Trattasi di ingrossamenti, o di nodosità di variabile dimensione, forma ed aspetto, situate all'apice delle ife od in differenti punti del loro percorso (od anche del tutto unilaterali), solitarie o brevemente distanziate, cioè divenute torulose. Entro tali differenti nodosità, si possono differenziare minuti corpuscoli sferoidali od ellissoidi ma di variabili dimensioni. Tali corpuscoli (microconidi, granulospore, etc.), si possono rinvenire anche all'interno di ife normali, ed eccezionalmente di ife trasformate in conidiofori od in pseudo-parafisi. Tutto ciò, ha originato una ricca nomenclatura ed una sinonimia di ardua discriminazione. Malgrado questa complessa gamma di variazioni morfologiche, le funzioni loro proprie non appaiono ancora ben definite. Si può tuttavia ritenere che tali differenti strutture siano coordinate a funzioni, se non totalmente moltiplicative, piuttosto conservative o di riserva, e tra loro talora reversibili.

Una ben diversa particolarità funzionale, piuttosto che strutturale, fu da me osservata sino dal 1904, ed in annate successive in vari generi e specie, ma considerata allora quale banale fenomeno traumatico, del tutto accidentale, e di trascurabile segnalazione. Solo in questi ultimi anni mi sono orientato verso una diversa e ben più importante interpretazione del fenomeno. Con l'impiego dei mezzi colturali segnalati, avevo potuto notare cioè che qualche ifa condensa il proprio contenuto plasmatico verso l'apice

più o meno ingrossato (eventualmente anche in altri punti del suo percorso), e che il plasma, con l'accrescersi del turgore, fuoriesce attraverso la parete apicale assottigliata, mentre l'ifa si vuota parzialmente del suo contenuto. Tale plasma esterno, può permanere in prossimità dell'apice, oppure può ricostituirsi in ifa, oppure, ciò che più interessa, la piccola nube plasmatica può dissolversi e scomparire totalmente in seno al liquido nutritivo. Tali fenomeni furono constatati ed anche segnalati da un mio vecchio allievo ed assistente di Portici ⁽²⁾.

L'anatomia patologica delle piante, ha già registrato, in tempi più recenti, qualche cosa di analogo per cellule di piante superiori, ma anche per ife fungine, assegnando al fenomeno il nome di *plasmotisi*, affine ad altri distinti come *plasmoschisi* e *plasmolisi*. Nei casi da me osservati, trattasi di plasmi non patologici, ma che io considero sani e vitali: li designa il loro colorito non degenerare, la loro struttura complessa, granulare, talora dotata di moto oscillante, capace di ricostituirsi in ifa, e lo stesso loro attivo dissolversi in granuli sferoidali sempre più minuti, sino a scomparire in seno al liquido nutritivo, anche ai più forti ingrandimenti di un ordinario microscopio; mentre nuovo plasma può essere richiamato da segmenti contigui, per fuoruscire e dissolversi come il precedente. Infatti non è raro imbattersi in ife del tutto ialine e trasparenti, cioè ridotte a tubicini privi di contenuto. Fenomeni questi, come quelli colturali precedentemente segnalati, i quali debbono prodursi, anche se occulti, intensamente e su larga scala nei terreni impregnati da acque di pioggia, dopo periodi di secco, ed egualmente con larga produzione ed emissione di plasmi fluttuati e vaganti nel terreno. I terreni, specialmente coltivati, sono sempre ricchi di Ifali, come le colture microbiologiche lo hanno ripetutamente dimostrato ⁽³⁾.

Un tale insieme di caratteristiche e di fenomeni, richiama alla mente il «contagium vivum fluidum», proveniente dal terreno, secondo il concetto del grande microbiologo olandese M. W. Beyerinck, e che *tale pertanto possa essere l'origine dei virus delle piante*. Non mi nascondo che, dal punto di vista sperimentale, il cammino da percorrere è ancora lungo ed irto di

(2) FR. SANSONE, *Intorno ad alcune infezioni e malattie da Fusarium vasinfectum Atk., etc.*, «Annali Istit. Super. Agrario Portici», vol. III (1928), pp. 145-163, 3 figg. e 1 tav. Da me, il fenomeno come ho detto, era stato osservato nel 1904: *Osservazioni e ricerche malsania Nocciuolo etc.*, in «Redia», vol. II, pp. 37-67, con fig. (sub. *Clasterosporium* Desm., poi *Clas. radialis* Trotter 1920). Nel 1905, in qualche fungo gallicolo, *Nuove ricerche etc.*, «Annales Mycologici», Berlin, vol. III, pp. 521-547, con fig. Come pure in *Ambrosiaemyces zeylanicus* Trotter 1933; nonché in varie muffe tra quelle da me studiate per *Il «cimiciato» delle nocciuole* (1925), e per *Gli ammuffimenti delle castagne* (1938).

(3) Particelle di terreno sottoposte a coltura da microbiologi stranieri, avevano rivelato da oltre mezzo secolo (1902), la presenza dei seguenti generi di Ifali (le specie, omesse per brevità): Fam. Mucedinacee, **Aspergillus*, *Geotrichum*, *Monilia*, *Mycogone*, **Penicillium*, **Trichothecium*, **Verticillium*. - Fam. Demaziacee, *Acremonia*, *Alternaria*, *Cladosporium*, **Macrosporium*, *Torula*. - Fam. Stilbacee, *Graphium*, *Isaria*. - Fam. Tuberculariacee, **Fusarium*, *Hymenula*. - Ficomietici, **Mucor*, **Rhizopus*. Gli asteriscati, anche alla nota 4.

difficoltà tecniche, però non mancano altri fatti ed argomenti che per lo meno rafforzano l'ipotesi, che cioè i virus delle piante possano derivare, od essere un tuttuno con tali micoplasmi, e tale plasmatosi.

Dobbiamo pervenire perciò al concetto di una molecola micoplasmatica, ridotta a dimensioni minimali, forse i 30 $\mu\mu$ attribuiti a molti virus, ma capace di mantenersi vitale, con un minimum di dimensioni e di metabolismo nutritivo; atta tuttavia, se non a moltiplicarsi in senso genetico, atta piuttosto ad ulteriori scissioni e frammentazioni, compatibili con tale minimum. Richiamando così il concetto di taluni biologi americani, di una « life-like », cioè di un « vita-simile » o di una « subvita ». In cosifatte condizioni, le molecole micoplasmatiche potrebbero essere assorbite dalle radici con i liquidi nutritivi, meglio ancora attraverso le minime soluzioni di continuità dell'apparato tegumentale, per raggiungere, breve cammino, i primi vasi dell'apparato vascolare ascendente ed esservi condotte passivamente sino agli apici vegetativi (fors'anche per talune tracheomicosi), od a raggiungere lateralmente i parenchimi fogliari a mezzo dei vasi capillari, e da cellula a cellula, a mezzo dei plasmodesmi. Si spiegherebbe così il prodursi delle visibili reazioni locali: atrofia dell'apice vegetativo, increspature fogliari marginali ecc.; causa l'ostacolato irregolare allungamento dell'apparato vascolare periferico, sintomi i quali si possono osservare in molte virosi se non nella più parte di esse. La successiva penetrazione dei micoplasmi, o dei loro prodotti entro le cellule del parenchima fogliare, sono fatti secondari, e causa dei ben noti fenomeni di alterazione dei cloroplasti: clorosi, giallume e persino albinismo, od anche di fenomeni necrotici, in rapporto con la varia intensità dell'attacco.

La presente ipotesi, non sarebbe in contrasto con la teoria delle virus-proteine di Stanley, in quanto è opportuno far presente che anche nelle segnalate colture di Ifali, è possibile rinvenire nel liquido di coltura, ma fenomeno secondario, produzioni cristalline: le più grosse di ossalato calcioso, mentre le più minute (non analizzate), non è da escludere possano risultare di sostanze proteiche.

In relazione con tali fenomeni, debbo segnalare che i liquidi nutritivi residuati dalle colture, possono indurre fenomeni anormali, sia in semi germinanti che in piantine in vegetazione. Per analoghe cause, acque provenienti dal dilavamento di terreni coltivati, hanno potuto causare nelle piante anomalie vegetative. Analoghi fenomeni si sono potuti produrre a causa di irrigazioni con acque improprie, cioè accidentalmente ricche di germi o di miceli vitali. Il Batteriofago di d'Herelle, farebbe pensare all'incontro di molecole micoplasmatiche (un volto per l'anonimo « fago »), sia col *Rhizobium Leguminosarum* che con altre entità batteriche del terreno, sia utili che dannose. La cosiddetta « stanchezza » del terreno di fronte alle coltivazioni, potrebbe trovare, almeno in qualche caso, una plausibile spiegazione anche con l'intervento di micoplasmi, ed a maggior ragione la sterilità di fronte a talune coltivazioni. La microbiologia del terreno, già così ricca e complessa, dovrebbe tener conto perciò anche del nuovo fattore micoplasmatico.

Saremmo venuti così, per gradi, ad altra conclusione apparentemente paradossale, che cioè esista una certa parentela tra micoplasmi malefici (i virus) e micoplasmi benefici cioè gli antibiotici. Tale parentela non esclude il processo di una produzione industriale, con la tecnica fondamentale dei piccoli esperimenti colturali di laboratorio. Cioè la produzione di micoplasmi di appropriate specie fungine, appartenenti a differenti gruppi, o solo separate genericamente o specificamente, ma aventi in comune il carattere generale della plasmotisi. Alcuni antibiotici inoltre, sperimentati sulle piante, avrebbero esplicato azione patologica (plasmolisi) al pari di certi estratti miceliari, ed è perciò giustificato il loro impiego sperimentale quali anticrittogamici, contro Batteri e Funghi. Ci troviamo comunque, di fronte ad una catena di complessi fenomeni del massimo interesse generale.

Un grande numero di Mucedinacee e Demaziacee, alle quali si potrebbero aggiungere altre Ifali, nonché diffuse Mucoracee terrestri tra i Ficomietici, alcuni Miceli sterili, sia saprafiti che parassiti delle piante o degli Insetti, come pure Attinomiceti ed altri Funghi, potrebbero offrirci analogo ed estesa fonte di ricerche sperimentali ⁽⁴⁾.

Pur avendo esclusa dalla presente trattazione una parallela indagine sui virus degli animali e dell'uomo, non posso tacere, per il suo carattere eziologico generale, l'ipotesi formulata da alcuni zooiatri. Essi vedono egualmente nei ricordati Ifali (*Aspergillus*,? *Monilia*), una sorgente *indiretta* di tali virus. Il primo a formulare tale ipotesi, non raccolta che io sappia dai trattatisti, è stato il prof. N. Mori (1914, 1930), e commentata micologicamente dal prof. A. Nannizzi (1920) ⁽⁵⁾. Secondo tale ipotesi, le colture di Ifali parassiti in malattie di animali domestici, produrrebbero dei germi visibili (microtalli), raffrontabili con i clamidozoi. Successivamente, in via ipotetica, essi darebbero luogo alla formazione degli invisibili virus, ma differenti dalle forme filtrabili batteriche. Il Mori ci ha presentato anche una succinta storia dell'argomento per quanto più direttamente lo interessava, cioè i virus degli animali domestici.

Le due ipotesi, per differenti vie, convergono nel rendere responsabili gli Ifali (od altri Funghi), di trovarsi all'origine degli ultravirus, sia delle piante che degli animali; ma per il resto del cammino da percorrere sperimentalmente, differiscono in modo notevole. La mia ipotesi eliminerebbe

(4) I seguenti generi (per brevità si omettono le specie), furono da me studiati e taluni assoggettati a coltura, in ammuffimenti di nocciuole, di castagne e di qualche altro prodotto, per inquinamenti naturali dal terreno. Oltre i gen. precedenti (asteriscati) mi hanno offerto anche i seguenti: Fam. Mucedinacee, *Acremonium*, *Acrostalagmus*, *Botrytis*, *Gonatobotrys*, *Microstroma*, *Oospora*, *Polyactis*, *Sterigmatocystis*. - Fam. Demaziacee, *Acrospeira*, *Chaetomium*, *Clasterosporium*, *Coniothecium*, *Heterosporium*, *Rhacodiella*. - Fam. Stilbacee, *Coremium*, *Stysanus*. - Fam. Tuberculariacee, *Tubercularia*. - Altri Gruppi, *Eurotium*, *Melanospora*, *Papulospora*.

(5) N. MORI, *Sulla natura dei virus filtrabili etc.*, « Annali Staz. Sperim. malattie infettive bestiame », vol. II, 4 pp. (1914); *La mia ipotesi della natura micetica degli ultravirus*, « Annali di Igiene », 40, 8 pp. (1930); A. NANNIZZI, *Forme microtali e forme ultravisibili nei miceti*, « Accademia Fisiocritici in Siena », genn. 1928, 4 pp.

le difficoltà di dover immaginare organismi geneticamente autonomi ma diversi dai Batteri, ed anche le difficoltà di dover rendere compatibile la loro esistenza con strutture cristalline secondo la teoria di Stanley e le difficoltà, anche maggiori, di dover supporre una origine endocellulare dei virus; od anche di dover attribuire a qualche altro gruppo di Funghi le attitudini degli Ifali, ad esempio ai Mixomiceti, secondo un'ipotesi di F. M. Jones (1926); cioè ad una *Plasmodiophora* il mosaico del Tabacco. Già in un mio precedente scritto del 1933 ⁽⁶⁾ trattando estesamente del mosaico del tabacco e dei virus in generale, avevo presentato osservazioni e considerazioni le quali mi appaiono, ora, come un preludio alla ipotesi odierna della « biomolecola » (bioplasson, biocolloide, ecc.): « Forme di riduzione o di involuzione, dicevo, della sostanza viva di taluni organismi inferiori ». Anche la teoria del « micoplasma » di Eriksson, o quella dei corpuscoli « metacromatici » di alcuni biologi francesi, vi si ricollegano: interpretando il perpetuarsi della Ruggine del Frumento come possibile anche dall'interno della pianta, a mezzo degli organi florali e semi, contaminati mediante un processo che, con linguaggio medico, potremmo definire come metastatico. Naturalmente, oltre le contaminazioni dirette, da terreno a radici, saranno possibili altre, secondarie, in organi aerei, sia dal terreno che da organi già virosati, a mezzo dei noti vettori. Comunque, a mio credere, l'ipotesi di una plasmotisi e di una biomolecola di origine fungina (micomolecola) potrebbe prevalere sulle altre segnalate.

RIASSUNTO.

In colture liquide anaerobiche di Ifali, si ha formazione di copioso micelio, con ife le quali presentano notevoli variazioni morfologiche, e parallelamente una complessa e ricca nomenclatura. Entro le ife, esiste un plasma ora omogeneo più spesso granulare, talora semovente, frammisto a goccioline oleose rifrangenti; fuoruscendo dalle ife (plasmotisi) per aumentato turgore, è atto a produrre nuove ife, oppure granulazioni moltiplicative con attitudine alla reversibilità. Tale plasma si diffonde entro il liquido nutritivo sino a scomparire (biomolecole, micomolecola).

Dall'esistenza di tali plasmi vitali, destinati a copiosa formazione anche nel terreno, diffusibili e suscettibili di penetrazione passiva entro radici e vasi delle piante, si dedurrebbe l'origine dei loro eventuali virus. Sono pure ammissibili contaminazioni su organi aerei, sia dal terreno che da piante virosate a mezzo di comuni agenti vettori. L'ipotesi è avvalorata da altre osservazioni e considerazioni, in rapporto alla natura ed origine dei virus, e da raffronti con virosi degli animali domestici. L'ipotesi prevede inoltre, affinità genetiche tra virus ed antibiotici, data una comune origine micoplasmatica.

(6) P. M. JONES, *Structure and cultural history of a Mycetozoan found in tobacco plants with mosaic-symptoms*, « Botanical Gazette », 81 (1926), pp. 446-459, 4 tavv.; A. TROTTER, *Nostre conoscenze sulle virosi del Tabacco ed in particolare sul « mosaico »*, « Boll. tecnico Ist. Sper. Tabacchi di Scafati », 26 pp. (1933).

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *L'inversione di un sistema di funzioni analitiche mediante serie di Lie.* Nota (*) di WOLFGANG GRÖBNER, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Consideriamo il sistema

$$(1) \quad X_i = \varphi_i(Y_1, \dots, Y_n), \quad i = 1, \dots, n$$

che esprime le variabili complesse X_1, \dots, X_n come funzioni olomorfe delle variabili complesse Y_1, \dots, Y_n . Sia $\{y_1, \dots, y_n\}$ un punto nel campo di olografia delle funzioni φ_i nel quale il determinante jacobiano

$$(2) \quad \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(Y_1, \dots, Y_n)} = |\varphi_{ik}|, \quad \text{con } \varphi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_k},$$

non è nullo. Allora esiste la matrice inversa $(\check{\varphi}_{ik})$ alla (φ_{ik}) soddisfacente alle relazioni

$$(3) \quad \Sigma \varphi_{ij} \check{\varphi}_{jl} = \Sigma \check{\varphi}_{ij} \varphi_{jl} = \delta_{il},$$

cioè $= 0$ oppure $= 1$ secondoché $i \neq l$ oppure $i = l$; tutte le sommatorie si intendono estese da 1 ad n . Gli elementi $\check{\varphi}_{ik}$ sono funzioni olomorfe delle variabili Y_1, \dots, Y_n nell'intorno del punto considerato $\{y_1, \dots, y_n\}$.

Introdotti gli operatori differenziali lineari

$$(4) \quad D_k = \Sigma \check{\varphi}_{jk}(y) \frac{\partial}{\partial y_j}, \quad k = 1, \dots, n;$$

per le (3) si ha

$$(5) \quad D_k \varphi_i(y) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Vogliamo dimostrare che gli operatori D_k sono commutabili fra di loro:

$$(6) \quad D_k D_l = D_l D_k, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Infatti si verificano facilmente, tenendo conto delle (3), le eguaglianze:

$$(7) \quad \Sigma \varphi_{la} \frac{\partial \check{\varphi}_{il}}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \Sigma \check{\varphi}_{il} \varphi_{la} - \Sigma \check{\varphi}_{il} \frac{\partial \varphi_{la}}{\partial y_j} = - \Sigma \check{\varphi}_{il} \frac{\partial \varphi_{lj}}{\partial y_a},$$

e similmente

$$(8) \quad \Sigma \check{\varphi}_{jk} \frac{\partial \varphi_{lj}}{\partial y_a} = - \Sigma \varphi_{lj} \frac{\partial \check{\varphi}_{jk}}{\partial y_a}.$$

(*) Oggetto di una conferenza tenuta dall'autore il 5 dicembre 1957 all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

Pertanto si trova

$$\begin{aligned}\Sigma \varphi_{l\alpha} (D_k D_l - D_l D_k) &= \Sigma \varphi_{l\alpha} \left(\check{\varphi}_{jk} \frac{\partial \check{\varphi}_{il}}{\partial y_j} - \check{\varphi}_{jl} \frac{\partial \check{\varphi}_{ik}}{\partial y_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_i} = \\ &= \Sigma \varphi_{l\alpha} \check{\varphi}_{jk} \frac{\partial \check{\varphi}_{il}}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} - \Sigma \frac{\partial \check{\varphi}_{ik}}{\partial y_\alpha} \frac{\partial}{\partial y_i};\end{aligned}$$

per le (7) e (8) la prima sommatoria si trasforma nella seguente:

$$\Sigma \varphi_{l\alpha} \check{\varphi}_{jk} \frac{\partial \check{\varphi}_{il}}{\partial y_j} = - \Sigma \check{\varphi}_{il} \check{\varphi}_{jk} \frac{\partial \varphi_{lj}}{\partial y_\alpha} = \Sigma \check{\varphi}_{il} \varphi_{lj} \frac{\partial \check{\varphi}_{jk}}{\partial y_\alpha} = \frac{\partial \check{\varphi}_{ik}}{\partial y_\alpha}$$

e ne risulta

$$\Sigma \varphi_{l\alpha} (D_k D_l - D_l D_k) = 0 \quad \text{per } \alpha, k = 1, \dots, n,$$

e quindi, essendo il determinante (2) non nullo, seguono le (6).

Sono dunque legittime le serie di Lie ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned}(9) \quad Y_j &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} [(X_1 - x_1) D_1 + \dots + (X_n - x_n) D_n]^v y_j = \\ &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \dots \sum_{v_n=0}^{\infty} \frac{(X_1 - x_1)^{v_1} \dots (X_n - x_n)^{v_n}}{v_1! \dots v_n!} D_1^{v_1} \dots D_n^{v_n} y_j, \quad j = 1, \dots, n;\end{aligned}$$

che convergono assolutamente e uniformemente in un determinato intorno del punto $\{y_1, \dots, y_n\}$ e del punto corrispondente $\{x_1, \dots, x_n\}$, avendo posto

$$(10) \quad x_i = \varphi_i(y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Inoltre, per la nota commutabilità del simbolo funzionale con quello della sommatoria di Lie, si ha

$$(11) \quad \varphi_i(Y) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} [(X_1 - x_1) D_1 + \dots + (X_n - x_n) D_n]^v \varphi_i(y),$$

e quindi, tenendo conto delle (5) e (10):

$$(12) \quad \varphi_i(Y) = \varphi_i(y) + X_i - x_i = X_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Ciò dimostra che le funzioni (9), costruite mediante serie di Lie, soddisfano identicamente al sistema dato (1), e quindi rappresentano le funzioni del sistema inverso.

2. CALCOLO DELLE SOLUZIONI DI SISTEMI DI EQUAZIONI. — Consideriamo ora, al posto del sistema (1), un sistema di equazioni

$$(13) \quad \varphi_i(Y_1, \dots, Y_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

e cerchiamo di determinarne le soluzioni $\{Y_1, \dots, Y_n\}$. Sia noto un punto $\{y_1, \dots, y_n\}$ approssimante la soluzione cercata; la soluzione sarà allora for-

(1) In riguardo alla serie di Lie e delle loro qualità caratteristiche si veda la mia Nota: *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi di equazioni differenziali nel campo analitico*, questi « Rendiconti », Vol. XXIII (1957) pp. 375-379.

nita dalle serie (9), quando in esse si pone $X_i = 0$, $x_i = \varphi_i(y)$, cioè dalle seguenti serie, supposte convergenti:

$$(14) \quad Y_j = \sum_{v_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{v_n=0}^{\infty} \frac{(-\varphi_1(y))^{v_1} \cdots (-\varphi_n(y))^{v_n}}{v_1! \cdots v_n!} D_1^{v_1} \cdots D_n^{v_n} y_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Non è facile dare un criterio generale sufficiente per la convergenza di queste serie; infatti la loro convergenza dipenderà dall'esistenza della soluzione nell'interno di un campo circolare confinante il punto approssimante $\{y_1, \dots, y_n\}$ in cui sono soddisfatte le ipotesi che le funzioni φ_i siano olomorfe e lo jacobiano (2) non sia nullo.

Il risultato ora ottenuto nel caso particolare $n = 1$ fornisce la soluzione dell'equazione

$$\varphi(Y) = 0;$$

se y è un valore approssimante la soluzione cercata ed è $\varphi'(y) \neq 0$, si trova

$$(15) \quad Y = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{[-\varphi(y)]^v}{v!} \left[\frac{1}{\varphi'(y)} \frac{\partial}{\partial y} \right]^v y = \\ = y - \frac{\varphi(y)}{\varphi'(y)} - \frac{\varphi^2(y) \varphi''(y)}{2 [\varphi'(y)]^3} + \frac{\varphi^3(y) [\varphi'(y) \varphi'''(y) - 3 (\varphi''(y))^2]}{6 [\varphi'(y)]^5} + \dots$$

I primi due termini di questa serie costituiscono la nota formola di approssimazione detta di Newton.

3. DETERMINAZIONE DELLE CARATTERISTICHE DEI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI. - Dato un sistema di equazioni differenziali

$$(16) \quad \frac{dX_i}{dt} = \vartheta_i(X_1, \dots, X_n), \quad i = 1, \dots, n$$

con funzioni olomorfe $\vartheta_i(X)$, le soluzioni soddisfacenti alle condizioni iniziali

$$(17) \quad (X_i)_{t=0} = \varphi_i(x; 0) = x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

sono fornite dalle serie di Lie

$$(18) \quad X_i = \varphi_i(x; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} D^v x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

nelle quali appare l'operatore aggiunto al sistema (16):

$$(19) \quad D = \sum \vartheta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Chiamiamo *caratteristica* del sistema (16) qualunque funzione analitica $F(x)$ delle variazioni x_1, \dots, x_n la quale è annullata dall'operatore D

$$(20) \quad DF(x) = 0,$$

relazione ovviamente equivalente alla

$$(20') \quad \frac{d}{dt} F(X) = 0$$

da cui segue il fatto che la funzione caratteristica $F(X)$ conserva il valore iniziale $F(x)$ lungo la curva definita dalle (18). Per assicurare la conver-

genza delle serie (18) si è supposto che il punto iniziale $\{x_1, \dots, x_n\}$ appartenga al campo di olomorfia delle funzioni $\vartheta_i(x)$ e non sia uno zero simultaneo per tutti i $\vartheta_i(x)$; perciò supponiamo $\vartheta_1(x) \neq 0$.

Se le funzioni $F_1(x), \dots, F_r(x)$ sono caratteristiche e $G(y_1, \dots, y_r)$ è una funzione arbitraria, olomorfa nella vicinanza del punto $y_i = F_i(x)$, anche la funzione

$$G(F_1(x), \dots, F_r(x))$$

risulta caratteristica. Quindi per avere tutte le caratteristiche basta determinare un sistema fondamentale $F_1(x), \dots, F_r(x)$ di caratteristiche analiticamente indipendenti, generatrici del corpo di tutte le caratteristiche.

Per ottenere un sistema fondamentale di caratteristiche ci proponiamo di invertire il seguente sistema rispetto alle variabili $t_1 = t, t_2, \dots, t_n$

$$(21) \quad \begin{cases} X_1 = \varphi_1(x; t_1) \\ X_i = \varphi_i(x; t_1) + t_i, \end{cases} \quad i = 2, \dots, n.$$

La matrice funzionale è

$$(22) \quad \frac{\partial(X_1, \dots, X_n)}{\partial(t_1, \dots, t_n)} = \begin{pmatrix} \varphi'_1, 0, \dots, 0 \\ \varphi'_2, 1, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \\ \varphi'_n, 0, \dots, 1 \end{pmatrix}$$

con

$$\varphi'_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1} = \vartheta_i(x).$$

Essendo, per ipotesi, $\varphi'_1 \neq 0$, è facile calcolare la matrice inversa:

$$(23) \quad \frac{\partial(t_1, \dots, t_n)}{\partial(X_1, \dots, X_n)} = \begin{pmatrix} 1/\varphi'_1, 0, \dots, 0 \\ -\varphi'_2/\varphi'_1, 1, \dots, 0 \\ \dots \dots \dots \\ -\varphi'_n/\varphi'_1, 0, \dots, 1 \end{pmatrix}.$$

Sono associati i seguenti operatori, scritti nelle variabili $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ al posto delle t_1, t_2, \dots, t_n :

$$(24) \quad \begin{cases} D_1 = \frac{1}{\varphi'_1} \frac{\partial}{\partial \tau_1} - \frac{\varphi'_2}{\varphi'_1} \frac{\partial}{\partial \tau_2} - \dots - \frac{\varphi'_n}{\varphi'_1} \frac{\partial}{\partial \tau_n}, \\ D_j = \frac{\partial}{\partial \tau_j}, \end{cases} \quad j = 2, \dots, n.$$

Visto che le funzioni φ_i non dipendono che della sola variabile τ_1 , facilmente si verifica la commutabilità (6). Si costruiscono ora, secondo il metodo esposto nel n. 1 le funzioni inverse mediante le serie di Lie

$$(25) \quad t_j = \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} [(X_1 - x_1) D_1 + \dots + (X_n - x_n) D_n]^v \tau_j \right]_{\tau_1 = \dots = \tau_n = 0}.$$

Ora dalle (24) segue

$$D_j \tau_I = 0, \quad j = 2, \dots, n$$

e perciò si possono semplificare le serie (25) nelle seguenti:

$$t_I = \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_I - x_I)^v}{v!} \left[\frac{1}{\varphi'_I} \frac{\partial}{\partial \tau_I} \right]^v \tau_I \right]_{\tau_I=0},$$

e tenendo conto delle relazioni

$$\varphi'_I(x; \tau_I) = \frac{\partial \varphi_I}{\partial \tau_I} = \vartheta_I(X),$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_I} = \sum \frac{\partial X_j}{\partial \tau_I} \frac{\partial}{\partial X_j} = \sum \vartheta_j(X) \frac{\partial}{\partial X_j}$$

e delle (17) e (19) risulta

$$(26) \quad t = t_I = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_I - x_I)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{\vartheta_I(x)} D \right]^v \frac{1}{\vartheta_I(x)},$$

e similmente

$$t_k = (X_k - x_k) + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_I - x_I)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{\vartheta_I(x)} D \right]^v \left(\frac{-\vartheta_k(x)}{\vartheta_I(x)} \right);$$

ma per ottenere le caratteristiche si dovrà porre $t_2 = \dots = t_n = 0$, e perciò si ricava finalmente

$$(27) \quad X_k = x_k + \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X_I - x_I)^{v+1}}{(v+1)!} \left[\frac{1}{\vartheta_I(x)} D \right]^v \frac{\vartheta_k(x)}{\vartheta_I(x)}, \quad k = 2, \dots, n.$$

Queste serie convergono se $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un punto *regolare*, cioè un punto del campo di olomorfia delle funzioni $\vartheta_I(x)$, $\vartheta_k(x) \neq 0$, e $|X_I - x_I| < \rho$, dove ρ significa il valore $|X_I^* - x_I|$ del più vicino punto non regolare $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$.

Le (27) forniscono le caratteristiche delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali (16) che passano per il punto iniziale $\{x_1, \dots, x_n\}$, supposto regolare rispetto alle (16); cioè tutte le relazioni analitiche, esistenti fra le soluzioni (18), sono conseguenze delle (27), che determinano una semplice falda analitica.

Anche il parametro t che non entra nelle formule (27) è una funzione olomorfa di X_I , rappresentata dalla (26).

Esempio: Si abbia $\dot{X} = X$; ne risulta $D = x \frac{\partial}{\partial x}$ e $X = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!} \left[x \frac{\partial}{\partial x} \right]^v x = xe^t$; d'altra parte, secondo la (26), si trova:

$$t = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(X - x)^{v+1}}{(v+1)!} \frac{\partial^v}{\partial x^v} \frac{1}{x} = \log \left(\frac{X}{x} \right).$$

Topologia. — *Sur la caractérisation des variétés différentiables à base dénombrable.* Nota di N. BOBOC, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. On doit à N. Steenrod [1] le résultat suivant:

(A) *Sur toute variété différentiable à base dénombrable de classe C^r , on peut construire un tenseur a_{ij} positivement défini, de classe C^s , $s \leq r - 1$.*

La proposition réciproque est vraie; c'est-à-dire:

(A*) *Si on peut construire sur une variété différentiable (qu'on ne suppose pas à base dénombrable) un tenseur symétrique a_{ij} , positivement défini, en chaque point de la variété, alors cette variété est à base dénombrable.*

Ce théorème résulte aisément d'un résultat de P. S. Alexandroff et de P. S. Urysohn [2]:

(B) *Un espace topologique Hausdorff, localement compact est métrisable, si et seulement s'il est à base dénombrable.*

Par une variété différentiable de classe C^r , V , nous entendrons un espace topologique:

- a) connexe,
- b) séparé T_2 (Hausdorff),
- c) localement euclidien.

Cette dernière condition signifie qu'à chaque point P , correspond un voisinage du point, homéomorphe à l'intérieur de la sphère euclidienne n -dimensionnelle (n -sphère) $\sum_{i=1}^n x^i x^i < 1$, tel que l'image de P soit le centre de la n -sphère. Si un point Q de la variété est intérieur à l'intersection de deux voisinages « distingués » et si $x = (x^1, \dots, x^n)$ et $y = (y^1, \dots, y^n)$ sont les images de Q par les homéomorphismes correspondants à ces deux voisinages dans les n -sphères $\sum_{i=1}^n x^i x^i < 1$ et $\sum_{i=1}^n y^i y^i < 1$, alors y^i considéré comme fonction de x^i , doit être de classe C^r et le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(y)}{D(x)} = \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^i} \right| \neq 0.$$

Les propriétés a), b), c), sont indépendantes. Si V possède ces propriétés, alors elle est localement compacte.

Nous allons montrer (théorème I) qu'une variété différentiable sur laquelle il y a un tenseur a_{ij} positivement défini, est métrisable. Étant localement compacte il résultera, par (B), qu'elle est à base dénombrable. De cette manière, le théorème (A*) énoncé au début est démontré, mais on a utilisé le résultat (B) dont la démonstration nécessite un certain nombre de constructions qui la rendent assez longue.

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

Aussi donnerons-nous au théorème (A) une seconde démonstration, de nature fonctionnelle, à caractère intrinsèque, ne faisant pas appel au théorème (B).

Le schéma de la démonstration est le suivant:

L'existence d'un tenseur a_{ij} , positivement défini, implique le fait que la variété est métrisable. L'existence de a_{ij} , positivement défini conduit à une équation $a^{ij} u_{ij} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij} \sqrt{a} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) = 0$ invariante sur la variété. En utilisant ce fait, on obtient, en employant une méthode qui en essence, appartient à R. Nevanlinna [3], un ensemble dénombrable, dense sur la variété.

En réunissant ces deux résultats, on obtient la démonstration du théorème.

On verra au cours de la démonstration que l'orientabilité ne joue aucun rôle dans ce type de théorèmes. En plus, remarquons, encore, l'impossibilité de construire un tenseur a_{ij} positivement défini sur les variétés de Pruffer.

Je suis reconnaissant à M.le professeur M. Nicolesco pour les conseils qu'il a bien voulu me donner, pendant la rédaction de ce travail.

2. THÉORÈME I. - Soit V une variété différentiable n -dimensionnelle de classe C^r et a_{ij} un tenseur positivement défini de classe C^p , $p \geq 1$, défini sur V . Alors il y a une métrique $\rho(P, Q)$ qui rend la variété métrisable.

Démonstration. - Soit

$$\rho(P, Q) = \inf_{\lambda_{PQ}} \int_{\lambda_{PQ}} \sqrt{a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt$$

où λ_{PQ} est une courbe à tangente continue qui unit les points P et Q . De la définition de la fonction $\rho(P, Q)$ il résulte immédiatement:

$$\rho(P, Q) = \rho(Q, P) \quad (\text{la symétrie}),$$

$$\rho(P, Q) \leq \rho(P, R) + \rho(R, Q) \quad (\text{l'inégalité de triangle}).$$

Soit P un point de V et K_P un voisinage distingué associé à P . On peut trouver un K_P tel que le tenseur a_{ij} ait dans K_P le développement:

$$a_{ij} = \delta_{ij} + C_{ijk}(\theta x) x^k.$$

Soit S_P l'image réciproque par φ_P^{-1} d'une n -sphère concentrique à $\varphi_P(K_P)$, de rayon $r < 1$. Alors

$$a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j + C_{ijk}(\theta x) x^k \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Soit $|C_{ijk}(x)| < M$ pour $x \in S_P$ et $|x^k| < r$. Alors

$$|a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j| > \sum_1^n \dot{x}^i \dot{x}^i - M^* r \left(\sum_1^n \dot{x}^i \dot{x}^i \right)$$

où $M^* = M \frac{n+1}{2}$. Donc

$$\sqrt{a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} > \sqrt{\left(\sum_1^n \dot{x}^i \dot{x}^i \right) (1 - M^* r)}$$

où r est choisi suffisamment petit pour que l'on ait $M^* r < 1$. Alors

$$(1) \quad \rho(P, Q) = \inf_{\substack{\lambda_{PQ} \\ \lambda_{PQ}}} \int \sqrt{a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} dt > r \sqrt{1 - M^* r}$$

pour $Q \in \tilde{S}_P$.

Comme il existe un M^{**} tel que:

$$a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j < M^{**} \left(\sum_1^n \dot{x}^i \dot{x}^i \right) = M^{**} r^2$$

il résulte

$$(2) \quad \rho(P, Q) < \sqrt{M^{**} r}$$

où r est la distance entre P et Q dans la représentation euclidienne réalisée par l'homéomorphisme φ_P dans la sphère $\varphi_P(K_P)$.

On déduit des inégalités (1) et (2) que dans chaque voisinage de P , dans la topologie donnée, il existe une sphère dans la métrique ρ et réciproquement.

Donc $\rho(P, Q) = 0$, quand $P = Q$ et seulement dans ce cas. La topologie induite par la métrique $\rho(P, Q)$ coïncide donc avec la topologie initiale de la variété différentiable V .

THÉORÈME II. — Soit V une variété différentiable n -dimensionnelle définie par les conditions (a), (b), (c) de classe C^r , $r \geq 2$ et a_{ij} un tenseur de classe C^r positivement défini sur V . Alors V est un espace séparable.

Démonstration. — On associe au tenseur a_{ij} l'équation aux dérivées partielles, de type elliptique

$$(3) \quad L(u) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij} \sqrt{a} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right) = 0$$

où $a = |a^{ij}|$, $a^{ij} = \frac{\text{mineur}(a_{ij})}{a}$; (3) a un sens sur la variété V , car si on suppose qu'une telle fonction u existe, $L(u)$ est un invariant.

Les solutions de l'équation (3) satisfont au principe de maximum et au principe de Harnack; on peut donc appliquer le procédé alterné de Schwarz. Nous noterons avec \mathfrak{M} l'ensemble de ces solutions et tout $u \in \mathfrak{M}$ solution du problème de Dirichlet relatif à un domaine D de V , sera noté u_D . Soit P_0 un point de V , K_{P_0} un voisinage distingué, φ_{P_0} l'homéomorphisme qui applique K_{P_0} dans l'intérieur de la n -sphère S_{P_0} : $\sum_1^n x^i x^i < 1$. Soient x_1 et x_2 deux points intérieurs de la sphère S_{P_0} , S_{x_1} et S_{x_2} deux n -sphères ayant pour centres x_1 , respectivement x_2 , de rayon r et telles que $\bar{S}_{x_1} \cap \bar{S}_{x_2} = \emptyset$ et $\bar{S}_{x_1} \cup \bar{S}_{x_2} \subset S_{P_0}$.

Soit $(S_{x_1}^*, S_{x_2}^*)$ une autre paire de n -sphères centrées en x_1 et x_2 , de rayon r^* , $r < r^* < 1$, telles que $\bar{S}_{x_1}^* \cap \bar{S}_{x_2}^* = 0$ et $\bar{S}_{x_1}^* \cup \bar{S}_{x_2}^* \subset S_{P_0}$. Soient $I_1 = S_{x_1}^* - \bar{S}_{x_2}^*$ et $I_2 = S_{x_2}^* - \bar{S}_{x_1}^*$.

Considérons, dans K_P , l'image par $\varphi_{P_0}^{-1}$ de cette construction. Nous allons garder dans H_{P_0} les mêmes notations que dans S_{P_0} .

Soit $V_0 = V - \bar{S}_{x_1}^* - \bar{S}_{x_2}^*$. V_0 est une sous-variété connexe de V . Il suffit de montrer que sur V_0 on peut trouver un ensemble dénombrable dense. Considérons une classe \mathfrak{D} de domaines D , définie de la manière suivante:

$D \in \mathfrak{D}$, s'il est une réunion finie de voisinages distingués de la V_0 , dont l'adhérence est homéomorphe à une sphère euclidienne et si, de plus, D contient la réunion $I_1 \cup I_2$.

Chaque D a comme frontière $\mathfrak{F}_D = \tilde{S}_{x_1} \cup \tilde{S}_{x_2} \cup \tilde{S}_D$ où \tilde{S}_D est la partie de la frontière disjointe de \tilde{S}_{x_1} et \tilde{S}_{x_2} ($\tilde{S} = \bar{S} - S$).

Pour chaque $D \in \mathfrak{D}$ on résout le problème de Dirichlet pour l'équation (3) avec les données suivantes: u_n sur \tilde{S}_{x_1} et zéro sur $\tilde{S}_{x_2} \cup \tilde{S}_D$.

On obtient ainsi une solution de l'équation (3) donc un élément $u_D \in \mathfrak{M}$, $0 < u_D < 1$.

Soit $u(P) = \sup_{D \in \mathfrak{D}} u_D(P)$ dans l'ensemble de toutes les fonctions u_D correspondant aux domaines D qui contiennent le point P . Nous allons montrer que $u(P) \in \mathfrak{M}$. Soit $A \in V_0$. En A on a

$$u(A) = \sup_{D \in \mathfrak{D}} u_D(A),$$

Il existe donc une suite $D_n \in \mathfrak{D}$ telle que $u(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{D_n}(A)$. Soit $\Delta_n = \bigcup_0^n D_n$; les domaines Δ_n forment une suite croissante, donc u_{Δ_n} est une suite croissante d'éléments appartenant à \mathfrak{M} et par suite du principe de maximum, $u_0(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\Delta_n}(P)$ appartient à \mathfrak{M} pour $P \in D_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

D'autre part,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{\Delta_n}(A) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} u_{D_n}(A) = u(A).$$

Donc

$$u_0(A) = u(A).$$

Nous allons montrer que $u_0(P) = u(P)$ pour chaque $P \in D_0$. Soit M un point intérieur de D_0 et 0D un domaine appartenant à \mathfrak{D} tel que M soit un point intérieur de 0D .

Considérons la suite $T_n = \Delta_n \cup {}^0D$; c'est une suite croissante. La suite $\{u_{T_n}\}$ est croissante et définit dans $\bigcup T_n = \Delta \cup {}^0D = T$ une fonction $u_T(P) \in \mathfrak{M}$.

Nous avons

$$u(A) \geq u_T(A) \geq u_0(A) = u(A) \rightarrow u_T(A) = u_0(A)$$

et

$$u_1(P) > u_0(P) \quad \text{pour } P \in D_0, \quad \text{d'où } u_1(P) = u_0(P) \quad \text{pour } P \in D_0.$$

Donc

$$(4) \quad u_1(P) = u_0(P) \quad , \quad P \in D_0.$$

Mais pour $M \in D_0 \cap {}^oD$

$$\begin{aligned} u_{{}^oD}(M) &\leq u_1(M) = u_0(M) \rightarrow \sup_{{}^oD \in \mathfrak{D}} u_{{}^oD}(M) \leq u_0(M) \\ &\rightarrow u(M) \leq u_0(M), \quad M \in D_0 \rightarrow u(M) = u_0(M), \quad M \in D_0 \\ &\rightarrow u(M) = u_0(M), \quad M \in D_0. \end{aligned}$$

Comme $u_0(P) \in \mathfrak{A}$ il en résulte, finalement, $u(P) \in \mathfrak{A}$.

Nous allons montrer que $D_0 = \cup \Delta_n$ est dense dans V_0 . En cas contraire, $V_0^{D_0} = V_0 - \bar{D}_0$ aurait des points intérieurs. Soit N un tel point et S_N un voisinage distingué de N , tels que \bar{S}_N soit homéomorphe à une n -sphère et, de plus, $\bar{S}_N \subset V_0^{D_0}$. Soit, encore, S_N^* un voisinage distingué de N , homéomorphe à une n -sphère et contenu dans S_N . Posons $I_3 = S_N - \bar{S}_N^*$, $W_0 = V_0 - \bar{S}_N^*$.

Considérons la classe \mathfrak{D}^* de domaines, définie comme suit:

$D \in \mathfrak{D}^*$ si: 1° D^* est une réunion finie de voisinages distingués dans W_0 ; 2° D^* contient I_3 et la réunion $I_1 \cup I_2$.

Chaque D^* a une frontière

$$\mathfrak{F}_{D^*} = \tilde{S}_{x_1} \cup (\mathfrak{F}_{D^*} - \tilde{S}_{x_1}).$$

Soit M un point de W_0 et

$$v(M) = \sup_{D^* \in \mathfrak{D}^*} u_{D^*}(M),$$

où u_D prend la valeur *un* sur S_{x_1} et la valeur *zero* sur $\mathfrak{F}_{D^*} - S_{x_1}$. D'après le raisonnement fait plus haut, $v(M) \in \mathfrak{A}$. Il en résulte

$$v(M) \leq u(M) \quad , \quad \text{si } M \in W_0.$$

Mais, A étant un point de W_0 , on a

$$u_{\Delta_n}(A) \leq u_{\Delta_n \cup D^*}(A) \leq v(A).$$

$\{\Delta_n\}$ étant la suite engendrée, de la manière précisée plus haut par le point A . À la limite, on obtient

$$u_0(A) = u(A) \leq v(A),$$

d'où $v(M) = u(M)$.

Mais $u(P)$ n'est pas nulle sur S_N , tandis que $v(M)$ y est nulle. La contradiction obtenue démontre la proposition.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. STEENROD, *Theory of fibre bundles*.
- [2] P. C. URYSOHN, *Trudy po topologhii i droughim oblastiam matematiki*, tom. II, p. 955 (1951).
- [3] R. NEVANLINNA, *Uniformisierung*, C. IV, § 3. Berlin (1953).

Geometria. — *Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche.* Nota I di ERMANNO MARCHIONNA, presentata (*) dal Socio O. CHISINI.

1. In uno spazio proiettivo complesso si consideri una varietà algebrica V_d a d dimensioni, che qui e nel seguito sarà sempre supposta *non singolare*, cioè irriducibile e priva di punti multipli. Sia A_{d-1} una ipersuperficie pura - effettiva o virtuale ⁽¹⁾ - tracciata su V_d . Severi ha definito in [9] i caratteri virtuali di A , precisamente i generi aritmetici virtuali $p_a(A), p_a(A^2), \dots, p_a(A^d)$ ⁽²⁾ delle varietà A, A^2, \dots, A^d ⁽³⁾.

Egli ha chiamato *dimensione virtuale* di A l'espressione numerativa

$$(1_1)^{(4)} \quad \delta(A) = d + (-1)^d p_a(V_d) + \sum_{\alpha=1}^d (-1)^{d-\alpha} p_a(A^\alpha)$$

ove $p_a(V_d)$ è il genere aritmetico virtuale di V_d ⁽⁵⁾.

Se si indica con Z lo *zero* $A \sim A$ dell'equivalenza ipersuperficiale e con K una varietà del sistema canonico (effettivo o virtuale) di V_d , si ha

$$(2_1) \quad \delta(Z) = (-1)^d p_a(V_d) \quad (6)$$

$$(3_1) \quad \delta(K) = P_a(V_d) - 1 + (-1)^d \quad (7)$$

ove $P_a(V_d)$ è il secondo genere aritmetico di V_d ⁽⁸⁾.

Severi ha inoltre dimostrato che se A, B, C sono tre ipersuperficie pure (effettive o virtuali) di V_d , tali che $C = A + B$, sussiste la relazione

$$(4_1) \quad \delta(C) = \delta(A) + \delta(B, C) + 1 \quad (9)$$

(*) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) SEVERI ha dimostrato in [9], n. 17, che su V_d ogni ipersuperficie virtuale pura, anche dotata di componenti multiple, può sempre rappresentarsi come differenza $C - B$ di due ipersuperficie effettive, non singolari, suscettibili di variare entro sistemi lineari completamente irriducibili e privi di punti base.

(2) Questi caratteri virtuali (che SEVERI in [9] indica con $g(A), g(A^2), \dots$) sono stati successivamente definiti da ZARISKI [12] per varietà algebriche più generali di quelle « classiche » qui considerate. Occorre ricordare tuttavia anche i lavori di TODD (« Proc. of the London Math. Soc. », 1937) e di ROTH (« Proc. of the Cambridge Phil. Soc. », 1937).

(3) Con A^h s'indica al solito l'intersezione di h varietà linearmente equivalenti ad A .

(4) Il numero che contrassegna una certa relazione è affetto da un indice che indica il paragrafo in cui la relazione è contenuta.

(5) Che SEVERI in [8], [9] indica con p_d .

(6) Ciò segue dal fatto che $p_a(Z^\alpha) = (-1)^{d-\alpha+1}$. Per questo cfr. SEVERI [9], n. 18.

(7) SEVERI [9], n. 24.

(8) Che SEVERI in [8] indica con P_a ed in [9] con P_d^a ; qui si preferisce seguire una successiva nomenclatura dovuta a Zariski. Avvertiamo che quest'ultimo Autore definisce formalmente $P_a(V_d)$ con una relazione equivalente alla (3₁). Ricordiamo che $p_a(V_d) = P_a(V_d)$; tale uguaglianza, enunciata da SEVERI in [8] e nota per $d < 3$, è stata poi dimostrata per d qualsiasi in [5] da KODAIRA-SPENCER.

(9) Cfr. [9], n. 19.

(l'asterisco sopra B significa che la varietà $(\overset{*}{B}, C)$ intersezione di B e C deve essere considerata sopra B).

Consideriamo ora il sistema lineare *completo* $|A|$ virtualmente privo di punti base individuato su V_d da una sua ipersuperficie A . Indicheremo con $\dim |A|$ ed $j|A|$ rispettivamente la *dimensione effettiva*⁽¹⁰⁾ e l'*indice di specialità* di $|A|$ ⁽¹¹⁾, e con $s|A|$ la cosiddetta *sovraabbondanza* di $|A|$, vale a dire il numero

$$(5_1) \quad s|A| = \dim |A| - \delta(A) + (-1)^d j|A|.$$

Il sistema $|A|$ verrà detto *regolare* se la sua sovraabbondanza è nulla⁽¹²⁾. La determinazione di $s|A|$ costituisce sostanzialmente l'oggetto del teorema di Riemann-Roch.

Per le curve è notoriamente $s|A| = 0$; per le superficie $s|A| \geq 0$ (Enriques-Castelnuovo-Severi). Per le V_3 i primi risultati sono dovuti a Severi [8], ed a B. Segre [6]. Successivamente Severi ha stabilito con mezzi esclusivamente algebrici il seguente teorema valido per una V_d di dimensione qualsiasi:

I) *Il sistema $|K + D|$ aggiunto ad un multiplo $|D|$ abbastanza elevato del sistema delle sezioni iperpiane di V_d è regolare*⁽¹³⁾.

Si noti che la circostanza che un sistema non speciale $|K + D|$ aggiunto ad un'ipersuperficie D non singolare sia regolare equivale al fatto che

$$(6_1) \quad \dim |K + D| = P_a(V_d) + P_a(D) - 1 \quad (14).$$

Ulteriori progressi relativi ai sistemi aggiunti sono stati conseguiti da Kodaira [4] mediante la teoria degli integrali armonici; tra i numerosi risultati del predetto Autore riportiamo soltanto quelli che più interessano la presente Nota.

(10) Cioè il numero, diminuito di un'unità, delle ipersuperficie *effettive* linearmente indipendenti appartenenti ad $|A|$.

(11) Che è il numero delle ipersuperficie effettive linearmente indipendenti appartenenti al sistema $|K - A|$, residuo di $|A|$ rispetto al sistema canonico $|K|$ di V_d ; in altri termini $j|A| = \dim |K - A| + 1$.

Se il sistema $|A|$ è virtuale, il sistema $|K - A|$ può risultare effettivo e più ampio di $|K|$, cosicché $j|A|$ può superare il genere geometrico $P_g(V_d)$ di V_d .

(12) In verità alcuni trattatisti definiscono regolare un sistema $|A|$ per il quale si abbia non solo $s|A| = 0$ ma anche $j|A| = 0$. Qui ci atteniamo alla definizione che ENRIQUES ha adottato per le superficie (cfr. ad esempio [1], p. 133).

(13) Cfr. [9], n. 24; cfr. anche ZARISKI [12], p. 589.

(14) Infatti per le (3₁), (4₁) è

$$\delta(K) = P_a(V_d) - 1 + (-1)^d \quad ; \quad \delta(K + D) = \delta(K) + \delta(\overset{*}{D}, K + D) + 1.$$

Ma il sistema $|\overset{*}{D}, K + D|$, tagliato sulla varietà $(d-1)$ -dimensionale D dal sistema aggiunto $|K + D|$, è il sistema canonico di D ; per cui

$$\delta(\overset{*}{D}, K + D) = P_a(D) - 1 + (-1)^{d-1},$$

e

$$\delta(K + D) = P_a(V_d) + P_a(D) - 1.$$

Ora un sistema $|K + D|$ non speciale ($j|K + D| = 0$) risulta regolare ($s|K + D| = 0$) se, e solo se, $\dim |K + D| = \delta(K + D)$. Di qui l'asserto.

Ricordiamo innanzitutto che un sistema lineare $|X|$ tracciato su V_d si dice *ampio*, se esiste una varietà V_d - non singolare ed in corrispondenza birazionale regolare con V_d - tale che le sue sezioni iperpiane corrispondano a varietà del sistema $|X|$.

Inoltre un sistema $|S|$ si dice *sufficientemente ampio* rispetto ad un sistema $|T|$ se il sistema $|S - T|$ è ampio. Ciò posto i teoremi di Kodaira che qui interessano si enunciano come segue:

II) *La dimensione di un sistema $|K + D|$ aggiunto ad un sistema « ampio » $|D|$ è data dalla (6₁). In altre parole il sistema $|K + D|$, ovviamente non speciale, risulta regolare⁽¹⁵⁾.*

III) Lemma di ENRIQUES-SEVERI-ZARISKI generalizzato. - *Se un sistema $|S|$ è sufficientemente ampio rispetto ad un sistema completo $|T|$, quest'ultimo taglia sopra una generica varietà di $|S|$ un sistema lineare completo⁽¹⁶⁾.*

Il teorema generale di Riemann-Roch è scaturito in forma topologica dai risultati di vari Autori⁽¹⁷⁾, ottenuti per lo più con la moderna teoria dei « faisceaux » (stacks). L'enunciato topologico del teorema è stato successivamente tradotto nel linguaggio della Geometria Algebrica classica da Hodge, nel modo che segue.

IV) *Su V_d si considerino un arbitrario sistema lineare $|D|$ ed un sistema lineare ampio $|X|$, tale che $|X + D - K|$ sia ampio. Si indichi con X^i l'intersezione di i generiche varietà appartenenti ad $|X|$, con $|D + iX| \cdot X^i$ il sistema (eventualmente incompleto) tagliato su X^i dal sistema completo $|D + iX|$, con $\text{def } |D + iX| \cdot X^i$ la deficienza del sistema $|D + iX| \cdot X^i$. Si ha allora*

$$\dim |D| = \delta(D) + (-1)^{d+1} j |D| + \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{def } |D + iX| \cdot X^i,$$

cioè

$$s |D| = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{def } |D + iX| \cdot X^i \quad (18).$$

(15) Cfr. [4], p. 107. Il teorema II di Kodaira costituisce un miglioramento del teorema I di Severi. Esso afferma tra l'altro che sono regolari l'aggiunto al sistema delle sezioni iperpiane e l'aggiunto ad un qualsiasi *multiplo* di detto sistema. I teoremi I e II generalizzano classici risultati della Geometria sulla superficie dovuti ad Enriques e Picard.

(16) Cfr. KODAIRA [4], p. 115. Il lemma di Enriques-Severi-Zariski, che estende note proprietà delle superficie algebriche dovute a Severi ed Enriques, è stato dimostrato in [12] da ZARISKI per varietà assolutamente normali sopra un campo di caratteristica qualsiasi.

(17) Ci limitiamo a ricordare Spencer, Kodaira, Serre, Hirzebruch. Per più ampie informazioni bibliografiche rimandiamo ad HIRZEBRUCH [2].

(18) Cfr. HODGE [3]. L'enunciato di Hodge è leggermente diverso da quello riportato nel testo, perché invece di un solo sistema ausiliario X compaiono più sistemi ampi X_1, X_2, \dots, X_{d-1} . Qui si è semplificato l'enunciato ponendo $X_1 = X_2 = \dots = X_{d-1} = X$, d'accordo col resoconto che ne fa BALDASSARRI in « Algebraic Varieties » Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 12, p. 160 (1956).

La via che ha condotto a questo risultato è completamente diversa da quella seguita dai Geometri italiani per stabilire il teorema di Riemann-Roch relativo alle superficie. Ad esempio nella trattazione di Severi ⁽¹⁹⁾ (successiva a quelle originali di Enriques e di Castelnuovo) giocavano essenzialmente tre proposizioni, di cui due sono contenute come caso particolare nei teoremi II, III di Kodaira, e la terza è data dalla nota relazione di Enriques

$$(7_1) \quad s|A| - j|A| = s|C| - j|C| + \text{def}|C| \cdot B - j||C| \cdot B|$$

che lega le sovrabbondanze e gli indici di specialità di due sistemi lineari $|C|$ ed $|A|$ alla loro differenza $|B|$ ⁽²⁰⁾.

Vedremo nel n. 2 che la (7_1) rientra nella relazione più generale

$$(8_1) \quad (-1)^{d+1} (j|C| - j|A| + j||C| \cdot B|) = s|A| - s|C| + s||C| \cdot B| - \text{def}|C| \cdot B|$$

valida per tre sistemi $|C|$, $|A|$, $|B| = |C - A|$ tracciati sopra una V_d di dimensione $d \geq 2$.

Orbene, uno degli scopi del presente lavoro è quello di mostrare che il teorema generale di Riemann-Roch per le varietà algebriche classiche (e più precisamente l' enunciato IV di Hodge) si può ottenere indipendentemente dalla teoria dei « faisceaux » sfruttando la (8_1) ed i teoremi II, III di Kodaira; cioè per una via che in un certo senso è analoga a quella seguita dai Geometri italiani nel caso delle superficie.

Il lavoro contiene tra l'altro (nei nn. 4, 5) alcune osservazioni sui legami delle irregolarità di V_d con le deficienze e le sovrabbondanze di certi suoi sistemi lineari.

2. Indicheremo come al solito con una lettera maiuscola fra due sbarrette, ad esempio $|X|$, un sistema lineare *completo* di ipersuperficie tracciato su V_d ; con $|X| \cdot Y$ il sistema lineare segato da $|X|$ sopra una varietà Y di V_d (Y irriducibile, h -dimensionale, con $0 < h < d$), con $||X| \cdot Y|$ il sistema completo individuato sopra Y da una varietà del sistema $|X| \cdot Y$, con $\text{def}|X| \cdot Y$ la deficienza del sistema $|X| \cdot Y$, cioè

$$(1_2) \quad \text{def}|X| \cdot Y = \dim ||X| \cdot Y| - \dim |X| \cdot Y.$$

I sistemi lineari completi che considereremo nel seguito saranno sempre supposti *virtualmente privi di punti base*.

Consideriamo ora su V_d ($d \geq 2$) un sistema completo $|C|$ effettivo o virtuale, un'ipersuperficie effettiva irriducibile B , ed il sistema differenza $|A| = |C - B|$. Dimostriamo che sussiste la (8_1) .

(19) Cfr. SEVERI, *Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica*, « Rend. Acc. Torino » (1905).

(20) Cfr. ENRIQUES, *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche*, « Mem. Acc. Torino » (1893).

Si ha ovviamente

$$\dim |A| = \dim |C| - \dim |C| \cdot B - 1$$

ed essendo

$$\dim |C| \cdot B = \dim ||C| \cdot B| - \operatorname{def} |C| \cdot B$$

si ottiene

$$(2_2) \quad \dim |C| = \dim |A| + \dim ||C| \cdot B| - \operatorname{def} |C| \cdot B + 1.$$

Per la definizione di sovrabbondanza data dalla (5_r) si ha

$$\dim |C| = \delta(C) + (-1)^{d+1} j|C| + s|C|,$$

$$\dim |A| = \delta(A) + (-1)^{d+1} j|A| + s|A|,$$

$$\dim ||C| \cdot B| = \delta(\dot{B}, C) + (-1)^d j||C| \cdot B| + s||C| \cdot B|.$$

Sostituendo nella (2₂) e tenendo conto della relazione (4_r) di Severi, si ottiene appunto la

$$(8_r) \quad \begin{aligned} & (-1)^{d+1} (j|C| - j|A| + j||C| \cdot B|) = \\ & = s|A| - s|C| + s||C| \cdot B| - \operatorname{def} |C| \cdot B \quad (2_1). \end{aligned}$$

3. Sia $|D|$ un sistema lineare (eventualmente virtuale) tracciato su V_d e $|K|$ il sistema canonico di V_d .

Indichiamo con $|X|$ un sistema lineare ausiliario *ampio*, con X^i la varietà a $d-i$ dimensioni intersezione di i ipersuperficie generiche del sistema $|X|$; con $K(X^i)$ il sistema canonico di X^i . Per $1 \leq i \leq d-1$ la varietà X^i è non singolare, perché $|X|$ è ampio.

Supponiamo inoltre di aver scelto il sistema ausiliario X in modo che $|X + D - K|$ sia *ampio* (e con esso siano ampi tutti i sistemi $|hX + D - K|$ con $h > 1$).

Dimostreremo che

$$(I_3) \quad s|D| = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \operatorname{def} |D + iX| \cdot X^i$$

(teorema di Riemann-Roch nell'enunciato di Hodge).

La dimostrazione è basata sulle seguenti osservazioni:

a) Le ipersuperficie del sistema $|K + iX|$ di V_d tagliano X^i secondo varietà del suo sistema canonico, cioè

$$||K + iX| \cdot X^i| = |K(X^i)|.$$

(2₁) Per $d = 2$, $s||C| \cdot B|$ è una sovrabbondanza relativa ad una serie lineare tracciata sopra una *curva* B ; pertanto $s||C| \cdot B| = 0$. Si ottiene così la (7_r) di Enriques.

b) Il sistema $|hX + D - K| \cdot X^i$, ($h \geq 1$), segato su X^i dal sistema $|hX + D - K|$ di V_d , è *ampio* sopra X^i ⁽²²⁾.

c) Per il teorema II di Kodaira ricordato nel n. 1, il sistema $|hX + D|$ di V_d ($h \geq 1$) è non speciale e regolare, perché aggiunto al sistema ampio $|hX + D - K|$.

d) Analogamente, sopra X^i il sistema $|(i+h)X + D| \cdot X^i = |K(X^i) + |hX + D - K| \cdot X^i|$ è non speciale e regolare, perché aggiunto al sistema ampio $|hX + D - K| \cdot X^i$.

e) Per $h > 1$ il sistema $|hX + D| \cdot X$ coincide col sistema completo $|hX + D| \cdot X|$, cioè $\text{def } |hX + D| \cdot X = 0$.

Per la verifica ci serviamo della relazione (8₁) che lega due sistemi C, B alla loro differenza A. Se $j|C| = j|A| = j||C| \cdot B| = 0$, si ricava

$$(2_3) \quad \text{def } |C| \cdot B = s|A| - s|C| + s||C| \cdot B|.$$

Esaminiamo ora i tre sistemi

$$|C| = |D + hX|, \quad B = X, \quad |A| = |C - B| = |D + (h-1)X|.$$

Per il comma c) si ha

$$(3_3) \quad j|C| = s|C| = 0; \quad j|A| = s|A| = 0;$$

per il comma d)

$$(4_3) \quad j||C| \cdot B| = s||C| \cdot B| = 0.$$

Dalla (2₃) segue $\text{def } |C| \cdot B = 0$, cioè appunto $\text{def } |hX + D| \cdot X = 0$.

f) Più in generale, per $h \geq 1$ il sistema $|D + (i+h)X| \cdot X^i$ è completo, cioè

$$|D + (i+h)X| \cdot X^i = ||D + (i+h)X| \cdot X^i|.$$

Abbiamo visto in e) che la proprietà è vera per $i = 1$; ammessa quindi vera per l'apice $i-1$, la si dimostrerà per l'apice i .

A tale scopo si considerino sulla varietà X^{i-1} ($i > 1$) i tre sistemi

$$|C| = |D + (i+h)X| \cdot X^{i-1}, \quad B = |X| \cdot X^{i-1} (B = X^i), \quad |A| = |C - B|.$$

Per il comma d) sussistono ancora le (3₃), (4₃), per cui si ha come sopra $\text{def } |C| \cdot B = 0$, cioè

$$\text{def } |D + (i+h)X| \cdot X^i = 0.$$

g) Sussiste l'uguaglianza

$$(5_3) \quad j|D| = j||D + X| \cdot X|.$$

(22) Ciò segue dal fatto che il sistema $|hX + D - K|$ è ampio su V_d . Infatti poiché esiste un modello birazionale di V_d (in corrispondenza regolare con V_d) sul quale gli iperpiani tagliano varietà del sistema $|hX + D - K|$, accade che, prendendo X^i sul suddetto modello, gli iperpiani tagliano su di essa varietà del sistema $|hX + D - K| \cdot X^i$.

Infatti

$$j | D | = \dim | K - D | + 1;$$

e poiché

$$| K(X) | = || K + X | \cdot X |,$$

risulta

$$j || D + X | \cdot X | = \dim || K - D | \cdot X | + 1.$$

Inoltre il sistema $| X |$ è sufficientemente ampio rispetto al sistema $| K - D |$ (poiché su V_d il sistema differenza $| X + D - K |$ è ampio per ipotesi). Segue dal teorema III di Kodaira riportato nel n. 1 che il sistema $| K - D |$ taglia su X un sistema completo, e poiché le varietà di $| K - D |$ non possono contenere X , si ha

$$\dim | K - D | = \dim | K - D | \cdot X |,$$

il che prova l'asserto.

h) Analogamente si dimostra che

$$(6_3) \quad j || D + iX | \cdot X^i | = j || D + (i + 1) X | \cdot X^{i+1} |.$$

Infatti, per il comma *a)* è

$$| K(X^i) | = || K + iX | \cdot X^i | \quad ; \quad | K(X^{i+1}) | = || K + (i + 1) X | \cdot X^{i+1} |,$$

per cui

$$j || D + iX | \cdot X^i | = \dim || K - D | \cdot X^i | + 1$$

$$j || D + (i + 1) X | \cdot X^{i+1} | = \dim || K - D | \cdot X^{i+1} | + 1.$$

Si noti poi che sopra X^i il sistema $| X | \cdot X^i$ è sufficientemente ampio rispetto a $| K - D | \cdot X^i$; infatti la loro differenza $| X + D - K | \cdot X^i$ è un sistema ampio sopra X^i (comma *b*). Ne segue che le varietà del sistema $|| K - D | \cdot X^i |$ tagliano sopra la generica varietà X^{i+1} del sistema $| X | \cdot X^i$ un sistema completo; e poiché nessuna varietà di $|| K - D | \cdot X^i |$ contiene X^{i+1} , si ha

$$\dim | K - D | \cdot X^i | = \dim || K - D | \cdot X^{i+1} |.$$

Di qui l'asserto.

i) Verifichiamo che

$$(7_3) \quad s | D | = \text{def} | D + X | \cdot X - s || D + X | \cdot X |.$$

A tale scopo poniamo nella (8₁)

$$C = D + X \quad B = X \quad A = C - B = D;$$

otteniamo

$$(8_3) \quad \begin{aligned} & (-1)^{d+1} (j | D + X | - j | D | + j || D + X | \cdot X |) = \\ & = s | D | - s | D + X | + s | D + X | \cdot X | - \text{def} | D + X | \cdot X. \end{aligned}$$

Per il comma *c*) il sistema $|D + X|$ è non speciale e regolare, cioè

$$j|D + X| = s|D + X| = 0;$$

inoltre per il comma *g*) si ha $j|D| = j||D + X| \cdot X|$.

Sostituendo il tutto nella (8₃), si ottiene la (7₃).

ℓ) Analogamente si dimostra che

$$(9_3) \quad s||D + iX| \cdot X^i| = \text{def} |D + (i+1)X| \cdot X^{i+1} - s||D + (i+1)X| \cdot X^{i+1}|.$$

Si considerino sulla varietà X^i i tre sistemi lineari

$$C = ||D + (i+1)X| \cdot X^i| \quad ; \quad |B| = |X| \cdot X^i|, (B = X^{i+1});$$

$$|A| = |C - B| = ||D + iX| \cdot X^i|.$$

Per il comma *f*) si ha $|C| = |D + (i+1)X| \cdot X^i$, quindi

$$|C| \cdot B = |D + (i+1)X| \cdot X^{i+1}.$$

Inoltre

$$j|C| = s|C| = 0 \quad (\text{comma } d),$$

$$j|A| = j|C| \cdot B \quad (\text{comma } h).$$

Applichiamo ora la (8_r) alla varietà $(d-i)$ -dimensionale X^i . Si ha

$$(-1)^{d-i+1} (j|C| - j|A| + j||C| \cdot B|) =$$

$$= s|A| - s|C| + s||C| \cdot B| - \text{def} |C| \cdot B,$$

ed in virtù delle relazioni sopra scritte si ottiene la (9₃).

m) Da quanto è stato detto si deduce il teorema di Riemann-Roch nella forma di Hodge.

Infatti per la (7₃)

$$s|D| = \text{def} |D + X| \cdot X - s||D + X| \cdot X|,$$

e scrivendo la (9₃) per $i = 1, 2, \dots, d-2$ di ottiene

$$s||D + X| \cdot X| = \text{def} |D + 2X| \cdot X^2 - s||D + 2X| \cdot X^2|,$$

$$s||D + 2X| \cdot X^2| = \text{def} |D + 3X| \cdot X^3 - s||D + 3X| \cdot X^3|,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$s||D + (d-2)X| \cdot X^{d-2}| = \text{def} |D + (d-1)X| \cdot X^{d-1} -$$

$$- s||D + (d-1)X| \cdot X^{d-1}| = \text{def} |D + (d-1)X| \cdot X^{d-1} \quad (23).$$

Le relazioni soprascritte mostrano appunto che sussiste la

$$(1_3) \quad s|D| = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{def} |D + iX| \cdot X^i.$$

(23) L'ultima sovrabbondanza $s||D + (d-1)X| \cdot X^{d-1}|$ è nulla perché relativa ad una serie lineare tracciata sopra una curva X^{d-1} .

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1948.
- [2] F. HIRZEBRUCH, *Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, 9 (1956).
- [3] W. V. D. HODGE, *A note on the Riemann-Roch theorem*, « Journ. London Math. Soc. », 30 (1955).
- [4] K. KODAIRA, *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, « Ann. of Mathem. », 59 (1954).
- [5] K. KODAIRA e D. C. SPENCER, *On arithmetic genera of algebraic varieties*, « Proc. Nat. Acad. U.S.A. », 39 (1953).
- [6] B. SEGRE, *Quelques résultats nouveaux dans la géométrie sur une V_3 algébrique*, « Mem. Acad. Roy. Belgique » (2), 14 (1936).
- [7] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité*, « Comm. Math. Helvet. », 29 (1955).
- [8] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, « Rend. Circ. Matem. Palermo », 28 (1909).
- [9] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (2^a memoria) « Annali di Matem. » (4), 32 (1951).
- [10] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (3^a memoria) « Annali di Matem. » (4), 41 (1956).
- [11] D. C. SPENCER, *Cohomologie and the Riemann-Roch theorem*, « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », 39 (1953).
- [12] O. ZARISKI, *Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi*, « Ann. of Math. », 55 (1952).

Geometria algebrica. — *Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geq 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7$. Nota II di POL BURNIAT, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.*

5. I risultati ottenuti nella precedente Nota I⁽¹⁾ e quelli che qui ci proponiamo di stabilire possono venire riassunti nella seguente proposizione:

a) *Esistono superficie algebriche regolari aventi i generi*

$$p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7 \quad , \quad p_g \geq 4 \text{ qualunque,}$$

il valore $p^{(1)} = 8p_g + 2$ forse eccettuato per certi valori pari di p_g .

Tra queste superficie, se ne trovano aventi

b) *Il sistema canonico irriducibile per i valori*

$$p^{(1)} = 2p_g - 3, \dots, 3p_g - 7 \quad , \quad p_g \geq 4 \text{ qualunque.}$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) « Rend. Acc. Nazionale dei Lincei », fasc. 3, pp. 276-281 (1958).

c) Il sistema canonico irriducibile e semplice per i valori

$$p^{(1)} = 3p_g - 6, \dots, 8p_g - 4, \quad p_g \geq 4 \text{ qualunque,}$$

$$p^{(1)} = 8p_g - 3, \dots, 8p_g + 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} p_g \geq 5 \text{ impari qualunque} \\ p_g = rs + st + tr, r \geq s \geq t \geq 1, r \geq 2 \end{array} \right.$$

$$p^{(1)} = 8p_g + 7 - 2s - 2t, \dots, 8p_g - 1, \dots, 8p_g + 7,$$

$$p_g = rs + st + tr - r - s - t, r \geq s \geq t \geq 2.$$

I punti a) e b) e il punto c) fino al valore $4p_g - 3$ di $p^{(1)}$ sono già stati ottenuti ⁽¹⁾, sicché basterà dimostrare l'asserzione c) per $p^{(1)} \geq 4p_g - 2$.

Notiamo i valori $p_g = rs + st + tr = 4(r + 1)$ per $s = 2, t = 1$ e i valori $p_g = rs + st + tr - r - s - t = 3r$ per $s = t = 2$.

6. Premettiamo alcune osservazioni.

Dalla struttura del sistema canonico delle superficie considerate si trae subito quella del sistema bicanonico. Questo risulta combinazione lineare di quelli fra i sistemi lineari di curve

$$|E''|^0 \text{ e } \frac{1}{2}(E_s^0 + E_t^0) + |(E - e_r)''|^0,$$

$$r = s = t = 1, 2, 3, \quad 2e_r \equiv E_s + E_t, \quad E = E_1 + E_2 + E_3$$

che sono effettivi.

Dalla irriducibilità del sistema lineare di curve $|E''|$ segue quella del sistema bicanonico $|2k_0|$.

La regolarità dei piani quadrupli considerati potrà venire stabilita come sopra (n. 3).

7. Poniamo $r = 2 + 2t + e$, $e = 0, 1$, $t \geq s \geq 0$ e siano X, Y, Z tre punti del piano F non giacenti sopra una stessa retta. Consideriamo i piani quadrupli $4F$ provvisti rispettivamente delle curve di diramazione

$$(1) \quad E_1 = C_{2r-4s+2}(X^{2r-4s+2}), \quad E_2 = C_{2s+4}(X^{2s} + Y^4), \quad E_3 = C_4(Z^4);$$

$$(2) \quad E_1 = C_{2r-4s}(X^{2r-4s}) + Y + Z, \quad E_2 = C_{2s+4}(X^{2s} + Y^3 + Z), \quad E_3 = C_4(Y + Z^3);$$

$$(3) \quad E_1 = C_{2r-4s}(X^{2r-4s} + Y), \quad E_2 = C_{2s+4}(X^{2s} + Y^3), \quad E_3 = C_4(Y);$$

$$(4) \quad E_1 = C_{2r-4s-2}(X^{2r-4s-2}), \quad E_2 = C_{2s+4}(X^{2s}), \quad E_3 = C_4.$$

Si trova senza difficoltà che i sistemi lineari di curve $|e'_i|$, $i = 1, 2, 3$, corrispondenti posseggono le dimensioni rispettive q_i date da:

$$q_1 = 3s, \quad q_2 = r - 2s - 1, \quad q_3 = r - s - 1;$$

$$q_1 = 3s, \quad q_2 = r - 2s - 1, \quad q_3 = r - s - 1;$$

$$q_1 = 3s + 1, \quad q_2 = r - 2s - 1, \quad q_3 = r - s - 2;$$

$$q_1 = 3s + 2, \quad q_2 = r - 2s - 2, \quad q_3 = r - s - 2.$$

Si ha sempre $q_i \geq 0$. Le superficie $4F$ corrispondenti posseggono quindi il sistema canonico $|k_0|$ semplice e irriducibile (n. 2, 3°). La loro regolarità si dimostra agevolmente (n. 6). Si ottiene inoltre $p_g = \sum q_i + 3 = 2r + 1$.

Le curve E'' risultanti di questi tripli di curve E_1, E_2, E_3 sono rispettivamente

$$\begin{aligned} E'' &\equiv C_{2r-2s+4}(X^{2r-2s} + Y^2 + Z^2) & , & & E'' &\equiv C_{2r-2s+2}(X^{2r-2s-2} + Y + Z), \\ E'' &\equiv C_{2r-2s+2}(X^{2r-2s-2} + Y^3) & , & & E'' &\equiv C_{2r-2s}(X^{2r-2s-4}). \end{aligned}$$

Poiché $p^{(1)} = E'' \cdot E' + 1$, da queste relazioni si trae subito, rispettivamente nei quattro casi suddetti:

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= 8p_g + 1 - 16s & , & & p^{(1)} &= 8p_g - 9 - 16s, \\ p^{(1)} &= 8p_g - 16 - 16s & , & & p^{(1)} &= 8p_g - 23 - 16s. \end{aligned}$$

Nel caso (1), la curva E_1 contiene almeno 6 rette per X e la curva $E_2 + E_3$ possiede almeno 16 punti doppi fuori di X . Possiamo evidentemente prendere due curve E_2 e E_3 secantesi in 1, 2, 3, 4 punti situati sopra una retta di E_1 . Di più, possiamo scegliere $m = 1, 2, \dots, 5$ delle rette rimanenti di E_1 di guisa che ciascuna di esse passi per un altro punto doppio della curva $E_2 + E_3$. Otteniamo così curve E_r che danno luogo a curve E provviste di $n = 1, 2, \dots, 9$ punti tripli, cioè a superficie $4F$ di genere lineare

$$p^{(1)} = 8p_g + 1 - 16s, \quad 8p_g - 16s, \dots, 8p_g - 8 - 16s.$$

Nel caso (2), la curva $E_2 + E_3$ possiede $E_2 \cdot E_3 \geq 12$ punti doppi. Prendendo per esempio il punto X allineato su due coppie di tali punti doppi (non allineati con Y e Z) e disponendo opportunamente delle 4 rette componenti di E_1 , possiamo dotare la curva E corrispondente di $n = 1, 2, \dots, 6$ punti tripli. Vengono così costruite superficie $4F$ di genere lineare:

$$p^{(1)} = 8p_g - 9 - 16s, 8p_g - 10 - 16s, \dots, 8p_g - 15 - 16s.$$

Nel caso (3), la curva E_1 ammette una componente E_1^* formata coll'aiuto di tre rette per X distinte dalla retta C_1 ($X + Y$). La curva $E_1^* + E_2$ possiede almeno 9 punti doppi e il sistema di curve $|E_3|$ risulta almeno ∞^{13} . Nel sistema lineare $|E_3|$ si può certamente scegliere una curva $E_3 \neq E_2$ irriducibile passante per $n = 1, 2, \dots, 6$ di questi punti doppi. La curva E risultante viene così dotata di n punti tripli. Rimane quindi stabilita l'esistenza di superficie $4F$ di genere lineare:

$$p^{(1)} = 8p_g - 16 - 16s, \dots, 8p_g - 22 - 16s.$$

Nel caso (4), la curva E_1 comprende una parte $C_2(X^2)$. I sistemi lineari di curve $|E_2|, |E_3|$ sono almeno ∞^{14} . Si possono ovviamente trovare due curve E_2 e E_3 irriducibili con $n = 1, 2, \dots, 7$ punti d'intersezione situati sopra la curva $C_2(X^2)$. Esistono quindi superficie $4F$ con

$$p^{(1)} = 8p_g - 23 - 16s, \dots, 8p_g - 30 - 16s.$$

Facciamo ora $s = 0, 1, 2, \dots, t$ nei risultati precedenti. Troviamo subito che le superficie $4F$ ottenute posseggono il genere lineare

$$p^{(1)} = 8p_g + 1, 8p_g, \dots, 8p_g - 30 - 16t,$$

cioè, poiché

$$16t = 8r - 16s - 8e, \quad 8p_g - 30 - 16t = 4p_g - 10 + 8e \geq 4p_g - 2,$$

il genere

$$p^{(1)} = 8p_g + 1, 8p_g, \dots, 4p_g - 2.$$

8. Con gli stessi dati r, s, t, e , prendiamo i tripli delle curve

- (1) $E_1 = C_{2r-4s}(X^{2r-4s}) + Z$, $E_2 = C_{2s+4}(X^{2s} + Y^4 + Z)$, $E_3 = C_4(Z^3)$,
- (2) $E_1 = C_{2r-4s}(X^{2r-4s} + Y) + Z$, $E_2 = C_{2s+4}(X^{2s} + Y^3 + Z)$, $E_3 = C_4(Y + Z^3)$;
- (3) $E_1 = C_{2r-4s}(X^{2r-4s} + Y)$, $E_2 = C_{2s+4}(X^{2s} + Y^3 + Z^2)$, $E_3 = C_4(Y + Z^2)$;
- (4) $E_1 = C_{2r-4s-2}(X^{2r-4s-2}) + Y$, $E_2 = C_{2s+4}(X^{2s} + Y^3)$, $E_3 = C_4(Y)$;
- (5) $E_1 = C_{2r-4s-2}(X^{2r-4s-2})$, $E_2 = C_{2s+4}(X^{2s} + Y^2)$, $E_3 = C_4(Y^2)$.

Nei due primi casi e nei due ultimi, questi tripli danno rispettivamente

$$q_1 = 3s, \quad q_2 = r - 2s - 1, \quad q_3 = r - s - 2,$$

$$q_1 = 3s + 1, \quad q_2 = r - 2s - 2, \quad q_3 = r - s - 2.$$

Conseguentemente troviamo $p_g = \sum q_i + 3 = 2r$.

Abbiamo sempre $q_i \geq 0$ (perché $r = 2s \geq 2$). I sistemi canonici $|k_0|$ corrispondenti sono quindi irriducibili e semplici ($n, 2, 2^0, 3^0$).

Per i tripli di curve E_r finora considerati, troviamo rispettivamente

$$E'' \equiv C_{2r-2s+2}(X^{2r-2s-2} + Y^2 + Z), \quad E'' \equiv C_{2r+2s+2}(X^{2r+2s-2} + Y^3 + Z),$$

$$E'' \equiv C_{2r-2s+2}(X^{2r-2s-2} + Y^3 + Z^2), \quad E'' \equiv C_{2r-2s}(X^{2r-2s-4} + Y),$$

$$E'' \equiv C_{2r-2s}(X^{2r-2s-4} + Y^2)$$

e, conseguentemente, perché $p^{(1)} = E'' \cdot E'' + 1$,

$$p^{(1)} = 8p_g - 4 - 16s, \quad p^{(1)} = 8p_g - 9 - 16s, \quad p^{(1)} = 8p_g - 12 - 16s,$$

$$p^{(1)} = 8p_g - 16 - 16s, \quad p^{(1)} = 8p_g - 19 - 16s.$$

Ora, essendo $2r - 4s \geq 4$, le curve E considerate contengono rispettivamente almeno $n = 4, 3, 3, 2$ rette, libere per il punto X . Disponiamo di queste n rette per imporre $1, 2, \dots, n$ punti tripli alle curve E corrispondenti. Questo risulta possibile perché le curve $E_2 + E_3$ associate posseggono $E_2 \cdot E_3 \geq 4$ punti doppi fuori dei punti X, Y, Z . Le superficie $4F$ così ottenute hanno i generi

$$p_g = 2r \geq 4, \quad p^{(1)} = 8p_g - 4 - 16s, \dots, 8p_g - 19 - 16s.$$

Nel caso (5), le curve E_2, E_3 sono almeno ∞^1 . Possiamo quindi scegliere due tali curve secantesi in $n \leq 7$ punti distribuiti sopra due delle rette libere

della curva E_1 . Le curve E corrispondenti vengono dotate di $n = 1, 2, \dots, 7$ punti tripli. Vi sono dunque, effettivamente, superficie $4F$ di genere lineare $p^{(1)} = 8p_g - 20 - 16s, \dots, 8p_g - 26 - 16s$.

Insomma, abbiamo costruito superficie $4F$ dei generi

$$p_g = 2r \geq 4, \quad p^{(1)} = 8p_g - 4 - 16s, 8p_g - 5 - 16s, \dots, 8p_g - 26 - 16s, \\ s = 0, 1, \dots, t,$$

cioè dei generi

$$p_g = 2r \geq 4, \quad p^{(1)} = 8p_g - 4, 8p_g - 5, \dots, 8p_g - 26 - 16t.$$

Ora, poiché $r = 2 + 2t + e, e = 0, 1, t \geq s \geq 0$, troviamo

$$16t = 4p_g - 16 - 8e, \quad 8p_g - 26 - 16t = 4p_g - 10 + 8e \leq 4p_g - 2.$$

Esistono conseguentemente superficie algebriche regolari dei generi $p_g = 2r \geq 4, p^{(1)} = 8p_g - 4, \dots, 4p_g - 2$ aventi il sistema canonico irriducibile e semplice.

9. Consideriamo una superficie $4F$ caratterizzata dalle curve

$$E_1 = C_{2r+2}(X^{2r+2}), \quad E_2 = C_{2s+2}(Y^{2s+2}), \quad E_3 = C_{2t+2}(Z^{2t+2})$$

e prendiamo $r \geq s \geq 1, t \geq 0$. Queste curve forniscono

$$e'_1 \equiv C_{s+t-1}(Y^s + Z^t), \quad e'_2 \equiv C_{t+r-1}(Z^t + X^r), \quad e'_3 \equiv C_{r+s-1}(X^r + Y^s), \\ q_1 = st - 1, \quad q_2 = tr - 1, \quad q_3 = rs - 1, \quad p_g = \sum q_i + 3 = rs + st + tr, \\ E'' = C_{2r+2s+2t}(X^{2r} + Y^{2s} + Z^{2t}), \quad E'' \cdot E'' + 1 = 8p_g + 7.$$

La curva E_1 contiene almeno 4 rette libere nel fascio di centro X . La curva $E_2 + E_3$ porta almeno 8 punti doppi fuori di Z . Possiamo quindi scegliere la curva E_1 di guisa che la curva E corrispondente acquisti $n = 1, 2, 3, 4$ punti tripli P . Il sistema lineare $|E''|$ associato a questa curva E risulta ovviamente irriducibile. Da questo fatto si deduce l'irriducibilità del sistema bicanonico $|2k_0|$ (n. 6), ed anche il carattere pure del sistema canonico $|k_0|$, onde si trae il valore del genere lineare:

$$p^{(1)} = E'' \cdot E'' + 1 - n = 8p_g + 1, \dots, 8p_g - 3.$$

Per $r \geq s \geq t \geq 1, p_g \geq 4$, abbiamo $q_i \geq 0, i = 1, 2, 3$ e il sistema $|k_0|$ risulta irriducibile e semplice n. 2, $2^\circ, 3^\circ$.

Per $r \geq 2, s = 2, t = 0$, troviamo $q_1 = q_2 = -1, q_3 = 2r - 1, p_g = 2r$ e il sistema canonico della superficie $4F$ considerata si riduce al sistema degenere $|k_0| = (1/2)E_3^0 + |e'_3|^0$.

Vengono così stabiliti i due primi punti dell'asserzione c), nella proposizione formulata al principio di questa Nota.

10. Prendiamo ora $r \geq s \geq t \geq 1$ e il triplo delle curve di diramazione

$$E_1 = C_{2r+1}(X^{2r+1} + Y) + Z, \quad E_2 = C_{2s+1}(Y^{2s+1} + Z) + X, \quad E_3 = C_{2t+1}(Z^{2t+1} + X) + Y.$$

Queste curve danno

$$e'_1 \equiv C_{s+t-2}(Y^{s-1} + Z^t) \quad , \quad e'_2 \equiv C_{t+r-2}(Z^{t-1} + X^r) \quad , \quad e'_3 \equiv C_{r+s-2}(X^{r-1} + Y^s),$$

$$q_1 \equiv t(s-1) - 1 \quad , \quad q_2 \equiv r(t-1) - 1 \quad , \quad q_3 \equiv s(r-1) - 1 \quad ,$$

$$p_g = \Sigma q_i + 3 = rs + st + tr - r - s - t \quad ,$$

$$E'' \equiv C_{2r+2s+2t-3}(X^{2r-1} + Y^{2s-1} + Z^{2t-1}) \quad , \quad E'' \cdot E'' + 1 = 8 p_g + 7.$$

Le curve E_1, E_2, E_3 contengono rispettivamente parti E_1^*, E_2^*, E_3^* composte con $2r, 2s, 2t$ rette libere per i punti X, Y, Z . La curva $E_1^* + E_2^*$ possiede $4rs \geq 2s + 2t$ punti doppi distinti di X e Y . Prendiamo due curve E_1^* e E_2^* possedenti $1, 2, \dots, 2s$ punti d'intersezione giacenti sopra una data retta a di E_3^* , poi scegliamo come punto Z un punto di a allineato con due altri punti doppi della curva $E_1^* + E_2^*$. Si vede subito che, disponendo convenientemente delle $2t - 2$ rette rimanenti di E_3^* , si può fare acquisire alla curva E risultante $n = 1, 2, \dots, 2s + 2t$ punti tripli.

Il sistema lineare $|E''|$, associato ad una tale curva E , risulta ovviamente irriducibile. Come sopra, ne deduciamo che il sistema $|k_0|$ coincide col sistema canonico puro della superficie $4F$ considerata, e che questa possiede i generi.

$$p_g = rs + st + tr - r - s - t \quad , \quad p^{(1)} = 8 p_g + 7, 8 p_g + 6, \dots, 8 p_g + 7 - 2s - 2t.$$

Per $r \geq s \geq t \geq 2$, tutti i sistemi $|e'_i|$ sono effettivi. Se ne trae la semplicità e l'irriducibilità del sistema canonico $|k_0|$ ($n, 2, 2^\circ, 3^\circ$).

Prendiamo successivamente $s = 2, t = 1$, poi $s = t = 1$ e cambiamo r in $r + 1, r \geq 2$. Otteniamo, secondo i casi,

$$q_1 = 0, q_2 = -1, q_3 = 2r - 1, p_g = \Sigma q_i + 3 = 2r + 1, p^{(1)} = 8 p_g + 7, \dots, 8 p_g + 1,$$

$$q_1 = q_2 = -1, q_3 = 2r - 1, p_g = \Sigma q_i + 3 = 2r, p^{(1)} = 8 p_g + 7, \dots, 8 p_g + 3.$$

La nostra proposizione risulta così completamente stabilita.

Nell'ultimo caso, il sistema canonico si riduce al sistema $1/2 E_3^\circ + |e'_3|^\circ$. Si trova senza difficoltà che la sua parte variabile viene composta con curve del fascio $|C_1(X)|^\circ$, le quali sono di genere 3.

11. I risultati numerici sopra esposti si estendono alle superficie di genere geometrico $p_g = 0, 1, 2, 3$. Per $p_g = 0$, per esempio, si costruiscono superficie di genere lineare $p^{(1)} = 3, 4, \dots, 7$ aventi il sistema bicanonico irriducibile ed il sistema tricanonico irriducibile e semplice.

In base alla struttura del sistema bicanonico, si dimostra agevolmente che le superficie qui costruite hanno il sistema bicanonico irriducibile e semplice.

Geometria. — *Teorema di Desargues ed omologie speciali in un piano grafico proiettivo.* Nota di CARMELO LONGO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. OGGETTO DELLA NOTA. — In un piano grafico proiettivo ⁽¹⁾ (p. g. p.) π , introdotta l'operazione ternaria di M. Hall ⁽²⁾, si può definire per i punti di una retta una struttura algebrica la quale verifichi le proprietà che caratterizzano rispettivamente i sistemi cartesiani o i quasicorpi secondo che π ammette le omologie speciali di dati centro e asse ovvero di dato asse.

Viceversa le proprietà algebriche delle dette strutture permettono di dimostrare l'esistenza in π delle dette omologie.

Ci si rende però facilmente conto che le dette proprietà algebriche equivalgono all'esistenza in π di particolari insiemi di triangoli che verificano la *condizione di Desargues*.

Nella presente Nota, indipendentemente dall'introduzione di qualsiasi struttura algebrica, dimostro due nuovi Teoremi che assicurano rispettivamente l'esistenza in π di omologie speciali di dato centro ed asse ovvero di dato asse nelle ipotesi che la condizione di Desargues sia verificata da particolari insiemi di triangoli.

È noto che per l'esistenza delle omologie speciali di dato asse u è sufficiente l'esistenza delle omologie aventi centri rispettivamente in due punti U e V , appartenenti ad u .

Il secondo dei due detti Teoremi alleggerisce notevolmente tali condizioni.

Introdotte alcune necessarie notazioni enuncio (n. 2) i due teoremi che dimostro ai nn. 3 e 4. Ricordata poi l'operazione ternaria (n. 5) accenno (n. 6) all'applicazione dei due teoremi per la caratterizzazione dei sistemi cartesiani e dei quasicorpi e alla dimostrazione che di essi si può dedurre dalle già note caratterizzazioni algebriche dei piani grafici.

2. NOTAZIONI. — Considerati in un p. g. p. due triangoli (trilateri) si dice che essi ammettono *centro* V (asse u) se i vertici (lati) sono distinti ed esiste tra questi una corrispondenza tale che le rette congiungenti vertici corrispondenti passano per V (i punti comuni a lati corrispondenti appartengono ad u). Due triangoli soddisfano la *condizione di Desargues* se i due fatti:

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) P. g. p. è un insieme composto di elementi «punti» e «rette» per i quali sono verificati i seguenti assiomi: *a*) per due punti passa una retta ed una soltanto; *b*) due rette hanno in comune un punto; *c*) esistono quattro punti a tre a tre non allineati.

Cfr. G. PICKERT, *Projective Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin, p. 7, (1955). Nel seguito citeremo questo libro con la notazione: G. P.

(2) M. HALL, *Projectives planes*, «Trans. Amer. Math. Soc.», 54 (1943). Cfr. anche, G. P., pp. 35-36.

a) i triangoli hanno centro V ;

b) i trilateri associati hanno asse u ;

sono una conseguenza dell'altro.

Od anche, indicati con A_i, A'_i ($i = 1, 2, 3$) vertici corrispondenti; $A_i A_k, A'_i A'_k$ lati corrispondenti e posto ⁽³⁾

$$C_j = A_i A_k \cap A'_i A'_k$$

(ove i, k, j è una disposizione di $1, 2, 3$) i triangoli verificano la doppia implicazione

$$\overline{A_1 A'_1 V}, \overline{A_2 A'_2 V}, \overline{A_3 A'_3 V} \longleftrightarrow \overline{C_1 C_2 C_3}.$$

Un piano si dirà $(V, u; a_i; C_i)$ -argusiano se considerati due qualsiasi triangoli di centro V , per i quali siano assegnati la retta a_i congiungente i due vertici A_i, A'_i ed il punto C_i ($\in u$), si ha $C_2 \in u \longleftrightarrow C_3 \in u$ ⁽⁴⁾.

Un piano π si dirà (V, u) -transitivo se esso ammette tutte le omologie di centro V ed asse u ; si dirà (v, u) -transitivo se ammette tutte le omologie di centro $V \in v$ ed asse u .

Ciò posto i due nuovi teoremi che dimostreremo sono i seguenti:

TEOREMA 1. - *Dati in un piano grafico proiettivo tre punti allineati e distinti U, V, W se il piano è*

I: $(V, UV; a_1; C_1 \equiv U)$ -argusiano,

II: $(V, UV; a_2; C_2 \equiv W)$ -argusiano,

il piano è (V, UV) -transitivo ⁽⁵⁾.

TEOREMA 2. - *Se un piano è (V, UV) -transitivo ed inoltre è*

III: $(U, UV; a_1; C_1 \equiv V)$ -argusiano,

il piano è (UV, UV) -transitivo.

Come già si è accennato (n. 1) quest'ultimo teorema implica il noto Teorema:

Se un piano è (V, UV) -transitivo e (U, UV) -transitivo il piano è (UV, UV) -transitivo ⁽⁶⁾.

(3) Indicheremo con $a \cap b$ il punto comune alle due rette a, b ; con \overline{ABC} tre punti allineati.

(4) Si dimostra facilmente che, se un piano è $(V, u; a_i; C_i)$ -argusiano considerati due triangoli di vertici A_i e A'_i ($i = 1, 2, 3$) di centro V , (con $\overline{A_i A'_i V} = a_i$) le condizioni $C_2 \in u, C_3 \in u, \overline{A_2 A_3 C_1}$ implicano $\overline{A'_2 A'_3 C_1}$.

(5) Le ipotesi del teorema si possono alleggerire. Si dimostrano infatti senza alcuna difficoltà le seguenti proprietà:

1° Se la condizione di Desargues è verificata per due triangoli di centro V e per i quali siano assegnati il vertice A_1 ed i due punti C_1, C_2 , essa è verificata qualunque sia C_2 sulla retta $u = C_1 C_2$; ossia un piano $(V, u; A_1; C_1, C_2)$ -argusiano è anche $(V, u; A_1; C_1)$ -argusiano.

2° Se un piano è $(V, u; A_1; C_1)$ -argusiano esso è anche $(V, u; a_1; C_1)$ -argusiano (con $a_1 \equiv VA_1$).

(6) Cfr. G. P., p. 67. Per altri teoremi che assicurano l'esistenza di omologie quando sia verificata la condizione di Desargues per particolari insiemi di triangoli si veda, G. P., pp. 73-86.

3. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. - Dimostriamo che nelle ipotesi I e II del Teorema 1, scelti due qualsiasi punti A_1, A'_1 , distinti da V ed appartenenti alla retta $a_1 \in V$, esiste un'omologia speciale di centro V , asse $u \equiv UV$ e portante A_1 in A'_1 .

Definiamo tra i punti di π la seguente applicazione ω (nel seguito si è posto $P^\omega = P'$):

- 1) se $P \in u$, è $P' = P$;
- 2) se $A_2 \in A_1 W$, è $A'_2 = VA_2 \cap A'_1 W$;
- 3) se $A_3 \in u$, $A_1 W$, è $A'_3 = VA_3 \cap A'_2 U$, ove A'_2 è il corrispondente del punto $A_2 = A_3 U \cap A_1 W$.

Dalla definizione segue che ω è biunivoca, ha uniti i punti della retta u e perciò è un'omologia (di centro V) se e solo se è biunivoca tra le rette. A questo scopo osserviamo che:

- a) le rette per V sono unite;
- b) a rette per U corrispondono rette per U ;
- c) a rette per A_1 corrispondono rette per A'_1 .

La c) è conseguenza del fatto che, considerati i punti A_3, A'_3 ed i punti A_2, A'_2 che intervengono nella costruzione di A'_3 , i triangoli di vertici A_i, A'_i ($i = 1, 2, 3$) verificano, per l'ipotesi I, la condizione di Desargues e quindi $A_1 A_3 \cap A'_1 A'_3 \in u$ qualunque sia la retta per A_1 ed il punto A_3 su di essa.

Per dimostrare che ad una retta r , non appartenente alle dette categorie a), b), c), corrisponde una retta r' , dimostreremo che, considerato un qualsiasi punto $\bar{A}_1 \in a_1$ ed il suo corrispondente in ω , \bar{A}'_1 , la corrispondenza $\bar{\omega}$, definita allo stesso modo della ω a partire dalla coppia \bar{A}_1, \bar{A}'_1 , coincide con la ω . Indicheremo con \bar{P}' il corrispondente di P nella $\bar{\omega}$.

Cominciamo a dimostrare che ω e $\bar{\omega}$ coincidono per i punti di $\bar{A}_1 W$. Considerato un punto $Q \in \bar{A}_1 W$ dimostriamo che $Q' = \bar{Q}'$.

Si ha: 1) $\bar{Q}' = QV \cap \bar{A}'_1 W$; 2) posto $A_2 = QU \cap A_1 W$ è $A'_2 = A_2 V \cap A'_1 W$, e quindi, $Q' = A'_2 U \cap QV$.

Supposto da prima $Q \neq M = A_1 U \cap \bar{A}_1 W$, è $A_1 \neq A_2$.

Posto $B = A_1 W \cap \bar{A}_1 U$ si ha $B' = A'_1 W \cap BV$, e quindi, per la definizione della ω , è $\bar{A}'_1 B' U$. Considerati ora i triangoli $\bar{A}_1 B A_2, \bar{A}'_1 B' A'_2$, per l'ipotesi II, si ha $\bar{A}_1 A_2 \cap \bar{A}'_1 A'_2 \in u$.

Considerati poi i triangoli $\bar{A}_1 A_2 Q, \bar{A}'_1 A'_2 \bar{Q}'$, per l'ipotesi I, (tenuto presente la proprietà data in ⁽⁴⁾) si ha $\bar{Q}' \bar{A}'_1 U$ e da qui segue $\bar{Q}' = Q'$.

La dimostrazione cade in difetto se e solo se $Q = M$.

In questo caso considerato su $\bar{A}_1 W$ un qualsiasi punto Q distinto da \bar{A}_1 , M e W ⁽⁷⁾ e considerati i triangoli $A_1 Q M, A'_1 Q' \bar{M}'$, per l'ipotesi II, si ha $\bar{A}'_1 \bar{M}' U$, da cui segue $\bar{M}' = M$.

Considerato ora un qualsiasi punto A_3 del piano si costruiscano i punti $Q = A_3 U \cap \bar{A}_1 W$ e $A'_2 = A_3 U \cap A_1 W$. Si ha: $A'_3 = A_3 V \cap A'_2 U = A_3 V \cap A'_2 Q' = A_3 V \cap A'_2 \bar{Q}' = A_3 V \cap \bar{Q}' U = \bar{A}'_3$, ossia, $A'_3 = \bar{A}'_3$ e quindi $\omega = \bar{\omega}$.

(7) Si suppone che la retta $\bar{A}_1 W$ contenga almeno quattro punti. È noto che se ogni retta del piano contiene tre punti il piano è argusiano.

Osservazione. — I due quadrangoli $\bar{A}_1 BA_2 Q$ e $\bar{A}'_1 B' A'_2 \bar{Q}'$ soddisfano le condizioni: 1) $\bar{A}_1 \bar{A}'_1 V$, $\bar{B} \bar{B}' V$, $\bar{A}_2 \bar{A}'_2 V$, $\bar{Q} \bar{Q}' V$; 2) $\bar{A}_1 QW$, $\bar{B} A_2 W$, $\bar{A}'_1 \bar{Q}' W$, $\bar{B}' A'_2 W$; 3) $\bar{A}_1 BU$, $\bar{Q} A_2 U$, $\bar{A}'_1 B' U$. Si dice che nel piano è verificata la *condizione di Reidemeister*, se dalle precedenti segue $\bar{Q} A'_2 U$. La dimostrazione data del Teorema I pone in evidenza che l'ipotesi II si può sostituire con la condizione di *Reidemeister*.

4. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. — Dati A_1 e A'_1 (su $a_1 = A_1 U$) l'ipotesi III, analoga all'ipotesi I, permette di definire, come già si è visto, una corrispondenza ω tra i punti del piano. Dalla dimostrazione data al numero precedente si ha che per dimostrare che ω è un'omologia basta dimostrare che, considerata la corrispondenza $\bar{\omega}$ definita da una coppia di punti \bar{A}_1 e \bar{A}'_1 di a_1 e corrispondenti nella ω , la ω e la $\bar{\omega}$ subordinano sulle rette $\bar{A}_1 W$ e $\bar{A}'_1 W$ la stessa corrispondenza.

Per questo considerati i punti $Q' \in \bar{A}'_1 W$, $A'_2 = Q' V \cap A'_1 W$, $A_2 = A'_2 U \cap A_1 W$, $Q = A_2 V \cap Q' U$, si deve dimostrare che $Q \in \bar{A}_1 W$.

Sia ω_1 l'omologia (speciale) di centro V , asse UV e portante \bar{A}_1 in $B = \bar{A}_1 V \cap A_1 W$.

Si ha:

- 1) $(\bar{A}'_1)^{\omega_1} = B' = \bar{A}'_1 V \cap A'_1 W$ (per definizione di \bar{A}'_1);
- 2) $Q'^{\omega_1} = A'_2$ (per definizione di A'_2);
- 3) $Q^{\omega_1} = A_2$ (per definizione di A_2).

Ne segue $(\bar{A}_1 Q)^{\omega_1} = BA_2$ e quindi $\bar{A}_1 Q = \bar{A}_1 W$.

5. L'OPERAZIONE TERNARIA ED ALCUNE SUE CONSEGUENZE. — Considerati in un p. g. p. quattro punti O, U, V, E a tre a tre non allineati, ad un punto P , non appartenente alla retta UV , si possono associare i due punti x, y della retta OV ,

$$x = (VP \cap OE) U \cap OV, \quad y = UP \cap OV.$$

I punti x, y presi in quest'ordine si chiamano le coordinate di P e vi è corrispondenza biunivoca tra le coppie ordinate x, y ed i punti del piano (non sulla retta UV) i quali costituiscono i punti del piano grafico affine dedotto dal piano grafico proiettivo asportandone i punti della retta UV . Si usa la ordinaria notazione cartesiana $P(x, y)$ e, in generale, si estende il linguaggio relativo alle coordinate cartesiane ordinarie, (così per esempio, i punti O, U, V, E costituiscono un riferimento di « origine » O ed « assi » OU, OV ; ai punti O e $OV \cap EU$ si associano rispettivamente i simboli o e i ; la retta UV si chiama retta impropria o all'« infinito » e due rette che s'incontrano sulle UV si dicono « parallele »; ecc.). Una retta per V ha l'equazione $x = a$; analogamente l'equazione di « una parallela all'asse » è $y = b$.

Una retta (propria) r non parallela ad uno degli assi è individuata dai due elementi o punti (propri) di OV : 1) m « ordinata » del punto d'intersezione della parallela ad r per O con la retta $x = i$; 2) b , ordinata del punto

$r \cap OV$. Si può allora introdurre un'operazione ternaria tra gli elementi propri di OV ,

$$y = (m, x, b)$$

con il seguente significato: « y è l'ordinata del punto di ascissa x sulla retta individuata dai parametri m, b ». Al variare di x la retta r è allora il luogo dei punti (x, y) per i quali $y = (m, x, b)$ e questa si dirà l'equazione della retta r , di parametri m, b .

L'operazione ternaria determina le due operazioni binarie

$$(1, a, b) = a + b, \quad (a, b, 0) = ab,$$

che si dicono rispettivamente addizione e moltiplicazione.

Queste operazioni in conseguenza dei postulati grafici del piano godono di alcune proprietà; in particolare rispetto all'operazione di addizione gli elementi formano un *loop*, ossia godono delle proprietà gruppali ad eccezione della proprietà associativa; che è soddisfatta se e solo se, rispetto al riferimento, nel piano è verificata la condizione di *Reidemeister*.

Si ha inoltre ⁽⁸⁾ che l'operazione ternaria verifica la *prima condizione di decomposizione* (*die erste Zerlegbarkeitsbedingung*)

$$(a, b, c) = ab + c,$$

se e solo se il piano è $(V, UV; OV; U)$ -argusiano; e verifica la *seconda condizione di decomposizione*,

$$(m, a, mb) = m(a + b)$$

se e solo se il piano è $(U, UV; OU, V)$ -argusiano.

6. APPLICAZIONE DEI TEOREMI 1 E 2. - Se l'operazione ternaria verifica la prima condizione di decomposizione e rispetto all'operazione di addizione si ha un gruppo, le proprietà che di conseguenza godono le due operazioni di addizione e di moltiplicazione caratterizzano i *sistemi cartesiani*.

Da quanto si è detto al numero precedente si ha:

1) *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'operazione ternaria rispetto al riferimento O, U, V , E determini un sistema cartesiano è che il piano sia $(V, UV; OV; U)$ -argusiano e che sia verificata la condizione di Reidemeister.*

Tenuta presente l'osservazione del n. 3 si ha di conseguenza che il piano è anche $(V, UV; OV, W)$ -argusiano (ove $\overline{OE\overline{W}}$) e quindi per il Teorema 1, si ha:

2) *Se l'operazione ternaria rispetto al riferimento O, U, V , E determina un sistema cartesiano il piano è (V, UV) -transitivo.*

Seguendo il Pickert ⁽⁹⁾ la precedente proposizione (e di conseguenza il Teorema 1) si può dimostrare nel seguente modo. Si consideri l'applicazione

(8) Cfr. G. P., pp. 98-99, nn. 33-34.

(9) Cfr. G. P., p. 100, Teor. 36.

$(x, y) \rightarrow (x, y + a)$ che porta O in a . Da $y = (m, x, b) = mx + b$ segue $y + a = (mx + b) + a = mx + (b + a)$ e quindi la detta applicazione trasforma rette in rette parallele e perciò è un'omologia (traslazione).

Supposto ora che sia soddisfatta anche la seconda condizione di decomposizione, ne segue la proprietà distributiva a destra (cioè $a(b + c) = ab + ac$), e di conseguenza si dimostra che la somma è commutativa.

Queste ultime proprietà insieme a quelle dei sistemi cartesiani caratterizzano i *quasicorpi* e quindi da quanto si è detto al numero precedente si ha:

3) *Condizione necessaria e sufficiente affinché l'operazione ternaria rispetto ad un riferimento O, U, V, E determini un quasicorpo e che il piano sia (V, UV) -transitivo e $(U, UV; OU; V)$ -argusiano, e quindi (per il Teorema 2) il piano è (UV, UV) -transitivo⁽¹⁰⁾.*

In particolare, per il Teorema 1, si ha:

4) *Se l'operazione ternaria rispetto al riferimento O, U, V, E verifica la seconda condizione di decomposizione e l'addizione è associativa, il piano è (U, UV) -transitivo.*

Seguendo il Pickert⁽¹¹⁾ la precedente proposizione è anche conseguenza del fatto che, per le ipotesi dette, $y = u(x + w) \leftrightarrow y = u((x + a) + (-a + w))$ e quindi l'applicazione $(x, y) \rightarrow (x + a, y)$ è un'omologia.

Dalla precedente proposizione, dalla 2) e dall'ultimo enunciato del n. 2 segue la proposizione 3) e quindi il Teorema 2.

Meccanica. — *Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite.* Nota I di FRANCA GRAIFF, presentata (*) dal Corrisp. BRUNO FINZI.

INTRODUZIONE.

Si cercano le condizioni alle quali deve soddisfare, in una generica V_n un tensore doppio simmetrico ξ_{ik} per poter provenire da un vettore s nel seguente modo:

$$(**) \quad \xi_{ik} = s_{i|k} + s_{k|i} + s_{j|i} s^j_{|k}.$$

Queste condizioni rivestono un particolare interesse meccanico nei seguenti due casi (nei quali esse sono dette condizioni di congruenza).

1) Nel caso che la V_n sia euclidea, e quindi s possa interpretarsi come vettore spostamento finito e ξ_{ik} come conseguente tensore di deformazione: le corrispondenti condizioni di congruenza sono note solo in coordinate cartesiane⁽¹⁾.

(10) Cfr. G. P., p. 101, Teor. 38.

(11) Cfr. G. P., p. 100, Teorema 37.

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) Cfr., ad esempio, U. CRUDELI, *Sopra le deformazioni finite*, questi « Rend. », vol. XX, 1911.

2) Nel caso che la V_n sia generica e ξ_{ik} infinitesimo con \mathbf{s} ; allora \mathbf{s} può interpretarsi ancora come spostamento (infinitesimo) e ξ_{ik} (ove nella (**)) si trascurino gli infinitesimi di ordine superiore al I°), come conseguente tensore di deformazione: le corrispondenti condizioni di congruenza sono note per $n = 2$ ⁽²⁾ e per $n = 3$ ⁽³⁾. Due ricerche di C. Agostinelli e A. Palatini ⁽⁴⁾ riguardano le condizioni di congruenza in una generica V_n .

In questa Nota si riprende il problema, applicando il seguente metodo:

a) si considera ξ_{ik} come variazione finita del tensore fondamentale della V_n ;

b) si considerano le variazioni conseguenti del tensore di Riemann, nel caso di ξ_{ik} generico e nel caso che ξ_{ik} sia del tipo (**);

c) si eguagliano queste variazioni, ricavando così delle condizioni necessarie di integrabilità delle (**).

Queste condizioni, però, sono in forma implicita, perché in esse compare il vettore \mathbf{s} che deve pensarsi sostituito con le soluzioni delle (**). Si dimostra che è possibile eliminare \mathbf{s} proprio nei due casi sopra considerati, e precisamente:

1) Se la V_n è euclidea, \mathbf{s} si elimina automaticamente e si ricavano quindi le condizioni di congruenza in coordinate generali espresse da equazioni differenziali del II° ordine in ξ_{ik} .

2) Per deformazioni infinitesime:

Per varietà a curvatura nulla o costante, ancora \mathbf{s} si elimina automaticamente e si trovano così le corrispondenti condizioni di congruenza differenziali del II° ordine in ξ_{ik} .

Per varietà generiche si dimostra in che modo è sempre possibile ricavare \mathbf{s} ; sostituendolo quindi nelle condizioni implicite di congruenza, si possono avere le stesse in forma esplicita.

Si può osservare così una differenza essenziale tra il caso $n > 2$ ed il caso $n = 2$: mentre nel primo queste condizioni risultano, in generale, del III° ordine, nel secondo caso esse risultano (sempre in generale) del IV° ordine.

I. VARIAZIONI FINITE DEL TENSORE DI RIEMANN PER VARIAZIONI FINITE DEL TENSORE FONDAMENTALE. - Siano date due varietà riemanniane V_n e V'_n , riferite agli stessi parametri x^i , e di metriche rispettivamente:

$$(1) \quad ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k$$

$$(2) \quad ds'^2 = a'_{ik} dx^i dx^k$$

(2) B. FINZI, *Sopra il tensore di deformazione di un velo*, questi « Rend. », vol. LXIII, 1930.

(3) A. PALATINI, *Sulle quadriche di deformazione per gli spazi S_3* , « Atti Ist. Veneto », vol. LXXVI, 1916.

(4) C. AGOSTINELLI, *Le condizioni di Saint-Venant per le deformazioni di una varietà riemanniana generica*, questi « Rend. », vol. XVIII, 1933 e vol. XIX, 1934; A. PALATINI, *Sulle condizioni di Saint-Venant in una V_n qualsiasi*, questi « Rend. », vol. XIX, 1934.

con:

$$(3) \quad a'_{ik} = a_{ik} + \xi_{ik}$$

essendo ξ_{ik} un tensore doppio simmetrico, generico, funzione del posto.

La differenza tra i simboli di Christoffel di seconda specie della (1) e della (2) è un tensore triplo ⁽⁵⁾ che indicheremo con ρ_{ik}^j ; questo tensore è esprimibile mediante ξ_{ik} e le sue derivate eseguite nella V_n : se si indica con una barra (/) la derivazione rispetto alla (1) e con due barre (//) la derivazione rispetto alla (2), dalle identità:

$$a'_{ik|/r} \equiv 0 \quad \text{e} \quad a_{ik|/r} \equiv 0$$

si trova infatti:

$$(4) \quad a'_{jk} \rho_{ir}^j \equiv \rho_{ir}(k) = \frac{1}{2} (\xi_{ik|/r} + \xi_{rk|/i} - \xi_{ir|/k}).$$

Se con a'^{ks} si indica il reciproco di a'_{ks} rispetto a $\|a'_{ik}\|$, si ha ⁽⁶⁾:

$$(5) \quad \rho_{ir}^s = \frac{1}{2} a'^{ks} (\xi_{ik|/r} + \xi_{rk|/i} - \xi_{ir|/k}).$$

La differenza tra i tensori di Riemann di due varietà riferite agli stessi parametri è ⁽⁷⁾:

$$(6) \quad \Delta R_{i h k}^j \equiv \rho_{ik|/h}^j - \rho_{ih|/k}^j + \rho_{lk}^j \rho_{ih}^l - \rho_{lh}^j \rho_{ik}^l$$

che può anche scriversi:

$$(6') \quad \Delta R_{i h k}^j \equiv a'^{js} [\rho_{ih(s)/h} - \rho_{ih(s)/h}] + a'^{tq} (\rho_{sh(q)} \rho_{ik(t)} - \rho_{sh(q)} \rho_{ih(t)}).$$

In definitiva, per le (4), questa differenza può essere così espressa mediante ξ_{ik} e le sue derivate:

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta R_{i h k}^j &\equiv \\ &\equiv \frac{a'^{js}}{2} \left\{ \xi_{is|/hk} - \xi_{is|/kh} + \xi_{hs|/ik} - \xi_{hs|/ih} + \xi_{ik|/sh} - \xi_{ih|/sk} \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} a'^{tq} [(\xi_{sq|/h} + \xi_{hq|/s} - \xi_{sh|/q})(\xi_{it|/k} + \xi_{kt|/i} - \xi_{ik|/t}) - \\ &\quad \left. - (\xi_{sq|/k} + \xi_{kq|/s} - \xi_{sk|/q})(\xi_{it|/h} + \xi_{ht|/i} - \xi_{ih|/t})] \right\}. \end{aligned}$$

2. IDENTITÀ. — Analogamente al tensore di Riemann, il tensore (6) soddisfa ad alcune identità, finite e differenziali. E precisamente, essendo identicamente:

$$\Delta R_{i h k}^j \equiv R_{i h k}^{'j} - R_{i h k}^j$$

(5) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma 1925, p. 228.

(6) L'espressione esplicita di a'^{ks} mediante ξ_{ik} dipende dalle dimensioni della V_n .

(7) T. LEVI-CIVITA, loco citato, p. 236.

tenendo conto dell'emisimmetria dei tensori di Riemann rispetto agli indici h e k , e della loro proprietà ciclica rispetto ai tre indici i, h, k , si avrà:

$$a) \quad \Delta R_{i\ hk}^j \equiv -\Delta R_{i\ kh}^j$$

$$b) \quad \Delta R_{i\ hk}^j + \Delta R_{h\ ki}^j + \Delta R_{k\ ih}^j \equiv 0.$$

Essendo inoltre:

$$R'_{is\ hk} - R_{is\ hk} = a'_{js} \Delta R_{i\ hk}^j + \xi_{js} R_{i\ hk}^j$$

tenendo conto dell'emisimmetria di $R_{is\ hk}$ rispetto agli indici i e s , e della sua simmetria rispetto alle coppie $is; hk$, si avrà ancora:

$$c) \quad a'_{js} \Delta R_{i\ hk}^j + \xi_{js} R_{i\ hk}^j \equiv -a'_{ji} \Delta R_{s\ hk}^j - \xi_{ji} R_{s\ hk}^j$$

$$d) \quad a'_{js} \Delta R_{i\ hk}^j + \xi_{js} R_{i\ hk}^j \equiv a'_{jk} \Delta R_{h\ is}^j + \xi_{jk} R_{h\ is}^j.$$

Le identità differenziali alle quali soddisfa il tensore (6) sono conseguenze delle identità del Bianchi, che, con le solite notazioni, sono:

$$(R_{i\ hk}^j + \Delta R_{i\ hk}^j)_{||r} + (R_{i\ kr}^j + \Delta R_{i\ kr}^j)_{||h} + (R_{i\ rh}^j + \Delta R_{i\ rh}^j)_{||k} \equiv 0$$

$$R_{i\ hk|r}^j + R_{i\ kr|h}^j + R_{i\ rh|k}^j \equiv 0.$$

Facendo sistema di queste identità e ricordando che è, ad esempio ⁽⁸⁾

$$R_{i\ hk||r}^j = R_{i\ hk|r}^j - R_{i\ hk}^j \varphi_{ir}^t + R_{i\ hk}^t \varphi_{tr}^j - R_{i\ tk}^j \varphi_{hr}^t - R_{i\ ht}^j \varphi_{kr}^t$$

si possono ricavare delle identità per il tensore (6) e le sue derivate. Ad esempio, se la V_n è euclidea, queste identità risultano:

$$(\Delta R_{i\ hk}^j)_{||r} + (\Delta R_{i\ kr}^j)_{||h} + (\Delta R_{i\ rh}^j)_{||k} \equiv 0.$$

3. VARIAZIONI FINITE DEL TENSORE DI RIEMANN IN RELAZIONE AD UNO SPOSTAMENTO. - Se:

$$(8) \quad \xi_{ik} = s_{i|k} + s_{k|i} + s_{j|i} s_{j|k}^j$$

dove s_i è un vettore della V_n , si trova:

$$(4') \quad \varphi_{ir(k)} = s_{j|ri}^j (a_{jk} + s_{j|k}) - s^j R_{ji\ rk} -$$

$$- \frac{1}{2} s^p [s_{j|k}^j R_{jp\ ir} + s_{j|i}^j R_{jp\ kr} + s_{j|r}^j R_{jp\ ki}].$$

La variazione del tensore di Riemann risulta, in questo caso:

$$(7') \quad \Delta R_{i\ hk}^j = a'^{js} [-\xi_{qs} R_{i\ hk}^q + s^q_{|i} R_{qs\ hk} + s^q_{|s} R_{iq\ hk} +$$

$$+ s^q_{|h} R_{is\ qk} + s^q_{|k} R_{is\ hq} + s^q R_{is\ hq|q} + \dots]$$

dove con dei puntini si sono indicati termini contenenti tutti il tensore di Riemann e non lineari in s_i e nelle sue derivate.

(8) T. LEVI-CIVITA, loco citato, p. 229.

4. CONDIZIONI DI INTEGRABILITÀ. — Se si considera la (8) come equazione differenziale nel vettore incognito s_i , eguagliando i secondi membri delle (7) e (7'), si ottengono delle condizioni necessarie di integrabilità della (8) stessa, espresse implicitamente, perché in esse compare il vettore incognito s_i . E cioè:

$$(9) \quad \frac{a'^{js}}{2} \left\{ \xi_{is/hk} - \xi_{is/kh} + \xi_{hs/ik} - \xi_{hs/ih} + \xi_{ik/sh} - \xi_{ih/sk} + \right. \\ \left. + \frac{a'^{iq}}{2} [(\xi_{sq/h} + \xi_{hq/s} - \xi_{sh/q})(\xi_{it/k} + \xi_{kt/i} - \xi_{ik/t}) - \right. \\ \left. - (\xi_{sq/k} + \xi_{kq/s} - \xi_{ks/q})(\xi_{it/h} + \xi_{ht/i} - \xi_{ih/t})] \right\} = \\ = a'^{js} [-\xi_{qs} R_{i/hk}^q + s^q_{/i} R_{qshk} + s^q_{/s} R_{iqhk} + \\ + s^q_{/h} R_{isqk} + s^q_{/k} R_{ishq} + s^q R_{is hk/q} + \dots].$$

5. CONDIZIONI DI CONGRUENZA PER DEFORMAZIONI FINITE IN UNA VARIETÀ EUCLIDEA. — Particolare interesse assumono queste condizioni di integrabilità quando la V_n sia euclidea: il loro secondo membro risulta infatti identicamente nullo, ed esse, tenuto conto che in spazi euclidei le derivate seconde sono commutabili, si possono scrivere (in forma completamente covariante):

$$(10) \quad \xi_{hs/ik} - \xi_{ks/ih} + \xi_{ik/sh} - \xi_{ih/sk} + \\ + \frac{a'^{iq}}{2} [(\xi_{sq/h} + \xi_{hq/s} - \xi_{sh/q})(\xi_{it/k} + \xi_{kt/i} - \xi_{ik/t}) - \\ - (\xi_{sq/k} + \xi_{kq/s} - \xi_{ks/q})(\xi_{it/h} + \xi_{ht/i} - \xi_{ih/t})] = 0.$$

Non comparendo più in queste condizioni di integrabilità il vettore incognito s_i , il sistema (8) è, in questo caso, illimitatamente integrabile, o completo. Dato ξ_{ik} , il vettore s non risulta quindi univocamente determinato. Le (10) inoltre non sono altro che le condizioni di congruenza (in coordinate generali), le condizioni cioè necessarie e sufficienti alle quali deve soddisfare un tensore doppio simmetrico ξ_{ik} per poter essere interpretato come tensore di deformazione (finita), in una varietà euclidea: infatti, in questo caso, il vettore s può interpretarsi come spostamento.

6. VARIAZIONI INFINITESIME DEL TENSORE DI RIEMANN IN VARIETÀ GENERICHE. — Se il tensore ξ_{ik} è generico, ma infinitesimo, risulta, trascurando infinitesimi di ordine superiore al I°:

$$(11) \quad a'^{ik} = a^{ik} - \xi^{ik}$$

$$(12) \quad \rho^s_{ir} = \frac{1}{2} a^{sk} (\xi_{ik/r} + \xi_{rk/i} - \xi_{ri/k})$$

$$\delta R^j_{ikh} = \rho^j_{ih/k} - \rho^j_{ik/h}$$

e, per la (12)

$$(13) \quad \delta R^j_{ikh} = \frac{1}{2} a'^{js} (\xi_{is/hk} - \xi_{is/kh} + \xi_{hs/ik} - \xi_{hs/ih} + \xi_{ik/sh} - \xi_{ih/sk}).$$

Contraendo gli indici j e h , si trova la variazione del tensore di Riemann contratto:

$$\delta R_{ik} = \rho_{ij|k}^{j'} - \rho_{ik|j}^j$$

cioè:

$$(14) \quad \delta R_{ik} = \frac{1}{2} (\theta_{|ik} + \xi_{ik|s}^s - \xi_{is|k}^s - \xi_{ks|i}^s)$$

avendo posto: $\theta = \xi_{ik} a^{ik}$.

E ancora, se $R = R_{ik} a^{ik}$:

$$\delta R = \delta R_{ik} a^{ik} + R_{ik} \delta a^{ik} = \delta R_{ik} a^{ik} - R_{ik} \xi_{ik}^i$$

cioè:

$$(15) \quad \delta R = \Delta_s \theta - \xi_{ik}^{i|k} - R_{ik} \xi_{ik}^i.$$

7. IDENTITÀ PER VARIAZIONI INFINITESIME. - Ancora il tensore $\delta R_{i|_{hk}}^j$ soddisfa alle identità finite $a)$, $b)$, $c)$, $d)$, già trovate per le deformazioni finite, ed a identità differenziali, conseguenze delle identità del Bianchi, e precisamente:

$$(16) \quad \begin{aligned} & \delta R_{i|_{hk}}^j + \delta R_{i|_{kr|h}}^j + \delta R_{i|_{rh|k}}^j \equiv \\ & \equiv R_{p|_{hk}}^j \rho_{ir}^p + R_{p|_{kr}}^j \rho_{ih}^p + R_{p|_{rh}}^j \rho_{ik}^p - R_{i|_{hk}}^p \rho_{pr}^j - R_{i|_{kr}}^p \rho_{ph}^j - R_{i|_{rh}}^p \rho_{pk}^j. \end{aligned}$$

In varietà a curvatura costante, per le quali si ha: $R_{i|_{hk}}^j = K (a_{ih} \delta_k^j - a_{ik} \delta_h^j)$ le (16) diventano:

$$(16') \quad \begin{aligned} & [\delta R_{i|_{hk}}^j - K (\delta_h^j \xi_{ik}^i - \delta_k^j \xi_{ih}^i)]_{|r} + [\delta R_{i|_{kr|h}}^j - K (\delta_r^j \xi_{ik}^i - \delta_k^j \xi_{ir}^i)]_{|h} + \\ & + [\delta R_{i|_{rh|k}}^j - K (\delta_h^j \xi_{ir}^i - \delta_r^j \xi_{ik}^i)]_{|k} \equiv 0. \end{aligned}$$

Le corrispondenti identità per varietà euclidee sono ovvie.

Particolare interesse acquistano le identità differenziali alle quali soddisfa il tensore δR_{ik} , che possono ricavarsi tanto facendo delle combinazioni lineari delle (16), quanto direttamente, dalle note identità:

$$R_{ik}^{i|k} \equiv \frac{1}{2} R_{,i}.$$

Sarà, infatti, con le solite notazioni:

$$(R_{ik} + \delta R_{ik})^{i|k} = \frac{1}{2} (R + \delta R)_{,i},$$

$$R_{ik}^{i|k} = \frac{1}{2} R_{,i}.$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al I° si trova:

$$(17) \quad (\delta R_{ik})^{i|k} \equiv \frac{1}{2} (\delta R)_{,i} + \frac{1}{2} (R_{jk} \xi_{ik}^{jk} - R_{ij} \theta^j) + (R_{ij} \xi_{i,k}^j)^k$$

che si può anche scrivere:

$$(17') \quad \left(\delta R_{ik} - \frac{1}{2} \delta R a_{ik} - R_{ij} \xi_{i,k}^j \right)^{i|k} \equiv \frac{1}{2} (R_{jk} \xi_{ik}^{jk} - R_{ij} \theta^j).$$

Si può osservare che, per varietà a curvatura costante, come per una generica V_2 , è:

$$R_{ik} = -(n-1)K a_{ik}.$$

Il secondo membro delle (17') risulta allora identicamente nullo. Per varietà a curvatura costante e per una generica V_2 il tensore doppio simmetrico:

$$\delta R_{ik} - \frac{1}{2} \delta R a_{ik} + (n-1) K \xi_{ik}'$$

che scritto esplicitamente, per le (14), (15) è:

$$(18) \quad \frac{1}{2} (\theta_{|ik} + \xi_{ik|s}^s - \xi_{is|k}^s - \xi_{ks|i}^s) - \frac{1}{2} (\Delta_2 \theta - \xi_{ik}^{'|ik} + (n-1) K \theta) a_{ik} + (n-1) K \xi_{ik}'$$

ha dunque divergenza nulla. In particolare, per varietà euclidee, avrà divergenza nulla il tensore:

$$(19) \quad \theta_{|ik} + \xi_{ik|s}^s - \xi_{is|k}^s - \xi_{ks|i}^s - (\Delta_2 \theta - \xi_{ik}^{'|ik}) a_{ik}.$$

8. VARIAZIONI INFINITESIME DEL TENSORE DI RIEMANN, CORRISPONDENTI AD UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO. — Nel caso che il vettore s sia infinitesimo, la (8) diventa:

$$(20) \quad \xi_{ik} = s_{i,k} + s_{k|i}.$$

E la variazione conseguente del tensore di Riemann risulta, per la (7'), trascurando infinitesimi di ordine superiore al 1°:

$$(13') \quad \delta R_{i,hk}^j = a^{js} [-\xi_{qs} R_{i,hk}^q + s_{q|i}^q R_{qs,hk} + s_{q/s}^q R_{iq,hk} + s_{q/h}^q R_{is,qk} + s_{q/k}^q R_{is,hq} + s^q R_{is,hk|q}]$$

contraendo gli indici j e h si trova la variazione di R_{ik} :

$$(14') \quad \delta R_{ik} = R_{jk} s_{j|i}^j + R_{ij} s_{j|k}^j + R_{ik|j}^j s^j$$

e, saturando con il tensore fondamentale: (per le 11)

$$(15') \quad \delta R = R_{ij} s^i.$$

Queste variazioni potevano anche ottenersi direttamente, osservando che la variazione (20) del tensore fondamentale può considerarsi dovuta anche ad un cambiamento infinitesimo delle coordinate ⁽⁹⁾:

$$\bar{x}^i = x^i - s^i.$$

Si può inoltre rilevare che un invariante, funzione del posto, avrà in questo caso una variazione sempre del tipo (15').

9. CONDIZIONI DI INTEGRABILITÀ PER DEFORMAZIONI INFINITESIME. — Le condizioni necessarie di integrabilità della (20), considerata come equa-

(9) H. WEYL, *Space, time, matter*, New York, 1950, p. 233.

zione differenziale nel vettore incognito \mathbf{s} , si ottengono quindi eguagliando i secondi membri delle (13) e (13'); (14') e (14'); (15) e (15'). Si ottiene rispettivamente:

$$(21) \quad \frac{1}{2} a^{js} (\xi_{is/hk} - \xi_{is/kh} + \xi_{hs/ik} - \xi_{hs/ih} + \xi_{ik/sh} - \xi_{ih/sk}) = \\ = a^{js} (-\xi_{qs} R_{i/hk} + s^q_{/i} R_{qs/hk} + s^q_{/s} R_{iq/hk} + s^q_{/h} R_{is/qk} + s^q_{/k} R_{ishq} + s^q R_{ishk/q})$$

$$(22) \quad \frac{1}{2} (\theta_{/ik} + \xi_{ik/s} - \xi_{is/k} - \xi_{ks/i}) = R_{jk} s^j_{/i} + R_{ij} s^j_{/k} + R_{ik/j} s^j$$

$$(23) \quad \Delta_2 \theta - \xi_{ik}{}^{/ik} - R_{ik} \xi^{ik} = R_{/i} s^i.$$

Anche queste condizioni di integrabilità, compatibili tra loro in quanto ciascuna delle ultime due è combinazione lineare delle relazioni compendiate nella precedente, sono in forma implicita: al posto di s_i deve pensarsi la soluzione delle (20).

Astronomia. — *Il calcolo della posizione e della velocità nel problema della determinazione di un'orbita.* Nota di PASQUALE SCONZO, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. Nella presente Nota espongo una rielaborazione di un mio metodo per la risoluzione del problema della determinazione di un'orbita di un corpo che si muove attorno al Sole, obbedendo alla legge di attrazione newtoniana ⁽¹⁾.

Le modifiche sostanziali apportate al metodo originario servono a caratterizzare l'aspetto puramente algebrico del problema ed hanno lo scopo di presentarlo, dal punto di vista del calcolo numerico, sotto uno schema che si presti alle esigenze d'impiego delle calcolatrici rapide moderne.

Lo scopo fondamentale prefissomi è quello di conseguire il più rapidamente possibile l'elaborazione numerica, con un procedimento di approssimazione successiva, delle relazioni che intercedono tra i dati forniti dall'osservazione e le equazioni del moto.

2. Ricordiamo che un'orbita planetaria è univocamente determinata se si conoscono i valori delle coordinate x_0, y_0, z_0 e delle componenti della velocità $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ del pianeta, corrispondenti ad un istante fissato t_0 , ciò che si consegue quando si hanno a disposizione tre osservazioni complete del pianeta, opportunamente distanziate nel tempo. Il riferimento è quello delle coordinate equatoriali e l'istante t_0 si può far coincidere con quello in cui si realizza la seconda osservazione.

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) P. SCONZO, *Cálculo numerico de una órbita a partir de una solución aproximada*, « Publ. Obs. Astr. », La Plata, vol. XXVII, 2 (1951).

Per arrivare allo scopo prefissoci faremo uso delle relazioni:

$$(1) \quad u = fu_0 + g\dot{u}_0 \quad (u = x, y, z),$$

che sono facilmente deducibili dalle equazioni cartesiane del moto e dove f e g sono le note serie di potenze dell'intervallo di tempo $t - t_0$, conosciute sotto il nome di serie di Lagrange. Cambiando la variabile t nell'altra $\tau = k(t - t_0)$, dove k è la costante di Gauss, si ha:

$$(2) \quad \begin{cases} f = 1 + \sum_{r=2}^{\infty} F_r \tau^r \\ g = \tau + \sum_{r=3}^{\infty} G_r \tau^r. \end{cases}$$

Per i coefficienti F_r e G_r , sino ai termini corrispondenti alle quinte potenze di τ , segnaliamo le seguenti comode espressioni:

$$F_2 = -\frac{1}{2} r_0^{-3} \quad (r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)$$

$$F_3 = -F_2 \sigma_0 \quad ; \quad G_3 = \frac{1}{3} F_2$$

$$F_4 = -\frac{1}{12} F_2 A_0 \quad ; \quad G_4 = \frac{1}{2} F_3$$

$$F_5 = -\frac{1}{4} F_3 (A_0 + 8\sigma_0^2) \quad ; \quad G_5 = -\frac{1}{60} F_2 (A_0 + 6\eta_0 - 24\sigma_0^2)$$

con

$$\sigma_0 = \frac{\dot{r}_0}{r_0} = \frac{x_0 \dot{x}_0 + y_0 \dot{y}_0 + z_0 \dot{z}_0}{r_0^2} \quad ; \quad \eta_0 = \frac{\ddot{r}_0}{r_0} = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}{r_0^2} - r_0^{-3} - \sigma_0^2$$

$$A_0 = r_0^{-3} + 3\eta_0 - 12\sigma_0^2.$$

D'altra parte le coordinate sferiche α e δ del pianeta, fornite dalle osservazioni, sono legate a quelle cartesiane x, y, z del pianeta stesso ed X, Y, Z del Sole, per mezzo delle relazioni:

$$(3) \quad \begin{cases} \rho \cos \delta \cos \alpha = x + X \\ \rho \cos \delta \sin \alpha = y + Y \\ \rho \sin \delta = z + Z, \end{cases}$$

dove ρ è la cosiddetta distanza geocentrica del pianeta, che al pari delle coordinate cartesiane, si esprime nell'unità astroomica delle distanze.

È da tener presente però che mentre le coordinate α, δ ed X, Y, Z si riferiscono ad un determinato istante t , le x, y, z vanno riferite invece ad un istante $\bar{t} = t - A\rho$, con A costante il cui valore è 0.0057706 , per tener conto del tempo necessario alla luce per arrivare dal pianeta all'osservatore.

È pure da tener presente che le coordinate dal Sole X, Y, Z , che sono note a priori se riferite al centro della Terra, nelle relazioni (3) debbono intendersi riferite ad un sistema la cui origine si trova nel luogo di osservazione, debbono cioè essere corrette dell'effetto di parallasse.

3. Ciò premesso, assumiamo ora come incognite le x_o, y_o, z_o e le $\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o$ e siano t_1, t_o, t_3 , rispettivamente, gli istanti relativi alla prima, seconda e terza osservazione. Corrispondentemente siano α_i, δ_i ($i = 1, 0, 3$) le coordinate sferiche (topocentriche) del pianeta.

Per la relazione fondamentale (1), le (3) daranno:

$$(4) \quad \begin{cases} \rho \cos \delta_i \cos \alpha_i = f_i x_o + g_i \dot{x}_o + X_i \\ \rho \cos \delta_i \sin \alpha_i = f_i y_o + g_i \dot{y}_o + Y_i \\ \rho \sin \delta_i = f_i z_o + g_i \dot{z}_o + Z_i, \end{cases} \quad (i = 1, 3)$$

dove f_i e g_i sono le espressioni (2), quando vi si ponga $\tau = k(t_i - t_o)$; per la 2^a osservazione si ha inoltre, direttamente:

$$(5) \quad \begin{cases} \rho_o \cos \delta_o \cos \alpha_o = x_o + X_o \\ \rho_o \cos \delta_o \sin \alpha_o = y_o + Y_o \\ \rho_o \sin \delta_o = z_o + Z_o. \end{cases}$$

Se poniamo:

$$(6) \quad \begin{cases} l_i = \cos \delta_i \cos \alpha_i \\ m_i = \cos \delta_i \sin \alpha_i \\ n_i = \sin \delta_i \end{cases} \quad (i = 1, 0, 3)$$

$$(7) \quad \begin{cases} L_o = n_1 m_3 - m_1 n_3 & N_1 = m_2 l_3 - l_2 m_3 & v_1 = \frac{g_3}{f_1 g_3 - f_3 g_1} \\ M_o = l_1 n_3 - n_1 l_3 & N_3 = m_1 l_2 - l_1 m_2 & v_3 = \frac{-g_1}{f_1 g_3 - f_3 g_1} \\ N_o = m_1 l_3 - l_1 m_3 \end{cases}$$

$$(8) \quad D = n_1 N_1 - n_o N_o + n_3 N_3,$$

dal sistema complessivo formato dalle (4) e (5), con la condizione che risultino identici i valori di $\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o$ per $i = 1$ ed $i = 3$, non sarà allora difficile dedurre dapprima:

$$(9) \quad \rho_o = \frac{1}{D} \{ (L_o X_1 + M_o Y_1 + N_o Z_1) v_1 + \\ + (L_o X_3 + M_o Y_3 + N_o Z_3) v_3 - (L_o X_o + M_o Y_o + N_o Z_o) \}$$

e poi:

$$(10) \quad \begin{cases} x_o = l_o \rho_o - X_o \\ y_o = m_o \rho_o - Y_o \\ z_o = n_o \rho_o - Z_o. \end{cases}$$

In seguito si ricavano le espressioni di ρ_1 e ρ_2 e si ottiene:

$$(11) \quad \rho_1 = \frac{1}{v_1 N_o} \{ (l_3 Y_1 - m_3 X_1) v_1 + (l_3 Y_3 - m_3 X_3) v_3 + (l_3 y_o - m_3 x_o) \}$$

$$(12) \quad \rho_3 = - \frac{1}{v_3 N_o} \{ (l_1 Y_1 - m_1 X_1) v_1 + (l_1 Y_3 - m_1 X_3) v_3 + (l_1 y_o - m_1 x_o) \},$$

Queste ultime espressioni servono infine per la deduzione di $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$; dalle (4) si ha infatti:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{x}_0 &= \frac{1}{g_i} (l_i \rho_i - f_i x_0 - X_i) \\ \dot{y}_0 &= \frac{1}{g_i} (m_i \rho_i - f_i y_0 - Y_i) \\ \dot{z}_0 &= \frac{1}{g_i} (n_i \rho_i - f_i z_0 - Z_i). \end{aligned} \right. \quad (i = 1, 3)$$

4. Il calcolo della posizione $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e della velocità $V_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ è impernato quindi sulle formule che vanno dalla (9) alla (13); poiché in tali formule si presuppone la conoscenza di v_1 e v_3 e quindi di f_1, f_3, g_1 e g_3 , siamo costretti ad impiegare un procedimento di approssimazione successiva, in quanto i coefficienti delle serie f_i e g_i , oltre che dipendere dalla distanza eliocentrica r_0 , dipendono anche, come abbiamo visto, da \dot{r}_0/r_0 e da \ddot{r}_0/r_0 e quindi in definitiva da P_0 e V_0 .

La prima approssimazione può farsi cominciare dal valore ρ_0 che si ottiene dalla (9) facendovi $f_i = 1, g_i = \tau_i$. Prima di procedere al calcolo della seconda approssimazione, si può migliorare notevolmente il valore di ρ_0 , includendo in f_i e g_i , rispettivamente, i termini di 2° e 3° ordine in τ , approfittando della circostanza che tanto F_2 quanto G_3 dipendono soltanto da r_0 e non dalla velocità. Nel calcolo susseguente di $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ naturalmente si otterranno valori leggermente diversi tra loro a secondo che si usi il valore di ρ_1 o quello di ρ_3 ; ciò si spiega con il fatto che dette distanze sono soltanto approssimate. Nel proseguimento del calcolo, dalla 2ª approssimazione in poi, è consigliabile quindi, di volta in volta, di prendere le medie dei valori che si ottengono per $i = 1$ ed $i = 3$. La formazione delle differenze $\Delta\dot{x}_0, \Delta\dot{y}_0, \Delta\dot{z}_0$ ci darà un criterio sull'andamento della convergenza del processo calcolativo; dette differenze risulteranno nulle soltanto quando le componenti della velocità raggiungeranno valori « stabili », tali cioè da poter considerare concluso il processo di approssimazione.

Non tralasciamo di far notare che nel calcolo di un'orbita preliminare, quando gli intervalli di tempo non superano i 20-30 giorni ed inoltre l'orbita non possiede un'eccentricità notevole, è superfluo considerare, nelle serie f e g , termini le cui potenze di τ superino la quinta. In caso diverso, per dette serie si possono utilizzare le espressioni finite di Kühnert, nel modo come ho indicato in un altro mio lavoro ⁽²⁾.

Infine facciamo rilevare che la correzione dovuta al tempo-luce, cioè l'uso di \bar{t} invece di t , si può applicare già a partire dal calcolo della 2ª approssimazione, ovvero quando il calcolatore lo stimi opportuno.

5. I vantaggi del metodo avanti esposto risiedono principalmente nella estrema semplicità delle formule impiegate.

(2) P. SCONZO, *Una notevole applicazione delle espressioni di Kühnert, ecc.* «Mem. Soc. Astr. Ital.», vol. XXIV, 4 (1953).

Durante l'elaborazione del calcolo delle approssimazioni successive non si fa ricorso all'uso di tavole numeriche speciali; quelle dei valori naturali delle funzioni trigonometriche vengono impiegate soltanto nel calcolo preliminare delle formule (6).

La bontà e l'efficienza del metodo sono state comprovate nei numerosi calcoli di orbite che sto eseguendo per incarico affidatomi dall'Astronomisches Rechnen-Institut di Heidelberg. Per la materiale realizzazione di questi calcoli sento il dovere di porgere un vivo ringraziamento al prof. M. Picone, Direttore dell'Istituto Naz. per le Applicazioni del Calcolo (del C. N. R.), per avermi gentilmente messo a disposizione i mezzi di cui dispone il predetto Istituto.

A solo titolo illustrativo mi limito qui a riportare i punti salienti del calcolo relativo all'orbita del pianeta 1950 LO, del quale esistono osservazioni realizzate negli Osservatori di Bloomington, Heidelberg ed Uccle ⁽³⁾. Il caso è particolarmente notevole per l'asimmetria delle osservazioni estreme rispetto a quella centrale ($\tau_1 = -0.0985953$, $\tau_3 = +0.4159595$), ciò che tende a rallentare il processo di convergenza.

Le formule impiegate per il calcolo delle approssimazioni successive sono le seguenti:

$$D\rho_0 = -0.0375710 + 0.0339219 v_1 + 0.0487399 v_3$$

$$D = -0.00049761$$

$$\begin{cases} x_0 = -0.4691318 \rho_0 - 0.6132396 \\ y_0 = -0.8830412 \rho_0 - 0.7371112 \\ z_0 = +0.0123930 \rho_0 - 0.3196763 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_1 = \frac{1}{0.1187189 v_1} \{0.1975275 v_1 - 0.2925363 v_3 + (0.5526948 y_0 - 0.8333791 x_0)\} \\ \rho_3 = -\frac{1}{0.1187189 v_3} \{0.3083306 v_1 - 0.1848545 v_3 - (0.4498233 y_0 - 0.8930679 x_0)\} \end{cases}$$

ed i risultati conclusivi ottenuti sono contenuti nel quadro seguente:

Approssimazione	1 ^a	2 ^a	3 ^a	4 ^a
v_1	0.809100	0.809179	0.809189	0.809191
v_3	0.192082	0.192142	0.192150	0.192150
ρ_0	1.5328	1.521332	1.520065	1.520065
x_0	-1.3323	-1.326944	-1.326350	—
y_0	-2.0906	-2.080510	-2.079390	—
z_0	-0.3006	-0.300790	-0.300806	—

(3) «Minor Planets Circulars» (Cincinnati Observatory), nn. 450, 482 e 1472.

Le componenti della velocità in corrispondenza della 4^a ed ultima approssimazione risultarono:

$$\dot{x}_0 = + 0.526595 (+ 3)$$

$$\dot{y}_0 = - 0.290542 (- 4)$$

$$\dot{z}_0 = - 0.212520 (- 4).$$

In parentesi sono stati indicati gli scarti sull'ultima cifra, ottenuti con la ripetizione del calcolo con $i = 3$.

Astrofisica. — *Fatti sperimentali ed ipotesi solare*^(*), Nota di GIORGIO PICCARDI, presentata^(**) dal Corrisp. G. RIGHINI.

In una precedente Nota⁽¹⁾ avevo accennato ai fatti sperimentali che mi avevano suggerito l'ipotesi solare. Ritengo utile oggi il dare una notizia più precisa sulla relazione che passa fra i fatti in parola e l'ipotesi avanzata.

Nell'ambito delle ricerche sul comportamento dei miei tests chimici, ho in corso, dal 1° marzo 1951, una serie di esperienze condotte senza interruzione, cimentando i miei tests ogni giorno, più volte, a delle ore fissate, secondo modalità standard. Una parte di queste esperienze viene effettuata all'aria libera (test F) ed una parte entro ad una camera schermata con lastre di rame (test D). Al 1° marzo 1958 avevo raccolto 50.425 risposte numeriche F e 50.427 risposte D.

Sia le risposte F che quelle D vennero attentamente studiate da vari specialisti nel campo o dell'Astrofisica, o della Geofisica o della Chimica fisica, sia secondo moderni procedimenti statistici, sia in base all'analisi periodale (Becker, Berg, Boute, Burkard, Mosetti, Piccardi⁽²⁾). Da questi studi apparve senza ombra di dubbio che le risposte F e D stavano in correlazione coi fenomeni solari. In particolare, quelle D erano in correlazione con R, numero delle macchie solari, cioè, in definitiva coll'attività solare.

La corrispondenza fra D ed R è chiaramente mostrata dal grafico *a* della figura 1. In ascisse i tempi, in anni. In ordinate i valori di D (scala a sinistra) ed i valori di log R (scala a destra). La curva superiore è quella delle medie annuali di D. La curva inferiore è quella del logaritmo delle medie annuali di R.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) G. PICCARDI, questi « Rendiconti », vol. XXIII (1957) pp. 419-421.

(2) U. BECKER, « Archiv. fuer Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie », Serie B, 6, 511 (1955); H. BERG, *Solar-terrestrische Beziehungen in Meteorologie und Biologie*, Probleme der Kosmischen Physik, Leipzig 1957; C. BOUTE, « Archiv. fuer Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie », Serie B, 7, 146 (1955); O. BURKARD, id., 6, 506 (1955); F. MOSETTI, id., 6, 517 (1955); G. PICCARDI e U. BECKER, « Geofisica e Meteorologia », 4, n. 4-5 (1956).

I valori di R che ho usato sono quelli pubblicati a Zurigo dal prof. Waldmeyer. Mi son servito del $\log R$ e non di R , considerando che, se l'attività solare fosse stata effettivamente la *causa* della fluttuazione generale mostrata dal test D , l'*effetto* prodotto avrebbe dovuto variare come il logaritmo dell'attività stessa.

Il parallelismo delle due curve può dirsi perfetto. Io riporto oggi, per semplicità, il caso delle medie annuali, ma tengo a far notare che, già da tempo, il Becker aveva minuziosamente ed esaurientemente studiato la corrispondenza in parola sulle medie di rotazione.



Fig. 1.

Il test D , oltre alla variazione secolare di cui ho detto, presenta anche una variazione annuale, segnata da un profondo minimo a marzo. Vedi figura 1, grafico b , relativo alle medie mensili di 7 anni, curva superiore. Sulla reale esistenza di questo minimo dal punto di vista statistico oggi non esiste più dubbio. Questo minimo *non* è casuale.

Il $\log R$, invece, non mostra alcuna variazione annuale, come appare dallo stesso grafico b , curva inferiore. L'andamento medio risulta leggermente ascendente in virtù del rapido aumento dell'attività solare dopo il 1954, aumento che ha superato il lento decadere dell'attività solare durante gli anni precedenti il 1954.

Durante l'anno il $\log R$ segue un decorso completamente differente da quello del test D . Il profondo minimo del test D *non* è dunque da porre in relazione colla attività solare.

A che cosa può esser dovuto questo minimo costantemente ricorrente ogni anno, all'incirca alla stessa epoca? Il minimo è comparso per ben 7 anni consecutivi; chiaro e marcato durante gli ultimi anni del vecchio ciclo solare, quando l'attività del Sole era molto ridotta, più o meno deformato durante i primi anni del nuovo ciclo solare, quando l'attività del Sole era imponentissima e tumultuosa. Ciò doveva necessariamente accadere, visto l'interdipendenza fra D ed R.

Non vi è dubbio che *la variazione annuale del test D* dev'esser considerata come un fenomeno a sé stante, indipendente dall'attività solare. A che cosa attribuirlo allora? L'ipotesi solare ci potrebbe indicare la via da seguire per giungere ad una spiegazione molto generale, considerando le ricorrenti singolarità del moto della Terra entro alla Galassia.

Chimica. — *Spettroscopia I. R. nel campo di vibrazione del —CH₃ su alcuni derivati pirrolici* (*). Nota di MARISA SCROCCO e LUCIANO CAGLIOTI, presentata (**) dal Socio V. CAGLIOTI.

In una precedente Nota ⁽¹⁾ trattante gli effetti che l'introduzione di un metile ha sull'assetto elettronico dei monoacidi e dei monoesteri pirrolici, sono stati osservati dei fenomeni di perturbazione nel sistema che abbiamo studiato riferendoci in particolare alle diverse condizioni del C=O carbossilico e dell'NH pirrolico.

In seguito è stato preso in esame l'effetto che l'introduzione di un gruppo metile ha sull'anello pirrolico senza altri sostituenti ⁽²⁾.

Nella presente Nota, a completamento delle precedenti osservazioni, sono state esaminate le vibrazioni di stretching del gruppo —CH₃, nei diversi sistemi e cioè di metili sia in anelli pirrolici non sostituiti che in anelli pirrolici con un gruppo carbossilico in α o in β .

A tale scopo riportiamo gli spettri I. R. dei pirroli mono e bimetil-sostituiti, confrontando i dati con la precedente letteratura Raman (Tabella I). Sono stati inoltre registrati gli spettri degli acidi α e β pirrolici metil sostituiti nella zona di stretching del —CH₃.

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Nella fig. 1 abbiamo riportato separatamente gli spettri osservati nella zona 3,2–3,5 μ delle sostanze di partenza e cioè dei due acido monobasici e dei due composti monometilici sostituiti in α e in β .

(*) Lavoro eseguito presso gli Istituti di Chimica Generale ed Inorganica e di Chimica Organica dell'Università di Roma.

(**) Presentata nella seduta dell'8 marzo 1958.

(1) M. SCROCCO e R. NICOLAUS, « Rend. Acc. Naz. Lincei », XXII, 311 (1957).

(2) M. SCROCCO e L. CAGLIOTI, questi « Rendiconti », in corso di stampa.

TABELLA I.

α -metil pirrolo			α -etil pirrolo			I. R. puro
I. R. puro	I. R. soluz. CCl_4	R (*)	I. R. puro	I. R. soluz. CCl_4	R (**)	
—	3496 <i>f</i>	3378	3400 <i>f</i>	3496 <i>f</i>	3385	3400
3400 <i>f</i>	3405 <i>f</i>			3412 <i>f</i>		
3127 <i>m</i>	—	3120	3134 <i>d</i>	—	3119	3134
3100 <i>f</i>	3105 <i>mf</i>	2918	3105 <i>m</i>	3090 <i>m</i>	3099	3095
2979 <i>f</i>	2984 <i>mf</i>		—	—	3044	—
2945 <i>f</i>	2942 <i>mf</i>	2865	2973 <i>f</i>	2975 <i>f</i>	2968	2970
2923 <i>f</i>	2922 <i>f</i>		2941 <i>f</i>	2941 <i>mf</i>	2934	2932
—	—	2865	2905 <i>m</i>	2902 <i>mf</i>	2900	2873
2865 <i>f</i>	2865 <i>m</i>		2880 <i>f</i>	2880 <i>mf</i>	2872	
2744 <i>m</i>	2744 <i>d</i>	1571	2865 <i>f</i>	2865 <i>mf</i>	1566	2747
2684 <i>m</i>	—		2732 <i>dd</i>	—		2688
2531 <i>m</i>	—	1469	2667 <i>dd</i>	—	1513	2631
2509 <i>m</i>	—		2534 <i>md</i>	—		2574
2267 <i>d</i>	—	1435	—	—	1470	2210
2227 <i>d</i>	—		—	—		—
2150 <i>dd</i>	—	1435	1562 <i>f</i>	—	1438	2136
2136	—		—	—		
2057 <i>d</i>	—	1381	1466 <i>f</i>	—	1402	1457
1697 <i>f</i>	—		1449 <i>f</i>	—		
1564 <i>f</i>	—	1376	1422 <i>f</i>	—	1330	1433
—	—		1373 <i>mf</i>	—		
1414 <i>f</i>	1414 <i>f</i>	1230	1335 <i>f</i>	—	1287	1256
—	—		1326 <i>f</i>	—		
1270 <i>f</i>	1267 <i>f</i>	1089	1287 <i>d</i>	1284 <i>d</i>	1227	1215
1234 <i>f</i>	1236 <i>f</i>		1215 <i>d</i>	—		
1118 <i>f</i>	1116 <i>f</i>	1087	1114 <i>f</i>	1112 <i>m</i>	1118	1162
1095 <i>f</i>	1090 <i>f</i>		1096 <i>f</i>	1092 <i>f</i>		
—	—	973	1063 <i>f</i>	1063 <i>m</i>	1094	1138
1023 <i>f</i>	1024 <i>f</i>		1045 <i>f</i>	1046 <i>m</i>		
978 <i>mf</i>	977 <i>m</i>	881	1020 <i>f</i>	1020 <i>f</i>	1065	1113
951 <i>f</i>	946 <i>m</i>		983 <i>m</i>	986 <i>m</i>		
885 <i>f</i>	884 <i>m</i>	782	930 <i>f</i>	928 <i>mf</i>	993	985
787 <i>ff</i>	—		883 <i>f</i>	881 <i>mf</i>		
720 <i>ff</i>	—	710	—	—	934	954
640 <i>m</i>	—		785 <i>f</i>	—		
—	—	648	716 <i>ff</i>	—	882	900
522 <i>m</i>	—		—	—		
—	—	596	—	—	853	888
—	—		—	—		
—	—	678	—	—	789	830
—	—		—	—		
—	—	628	—	—	721	780
—	—		—	—		
—	—	706	—	—	636	631
—	—		—	—		

(*) G. B. BONINO, A. MANZONI-ANSIDEI e P. PRATESI, «Zeits. f. Phys. Chem.», 22, 21 (1933).

(**) A. STERN e K. THALMAYER, «Zeits. f. Phys. Chem.», 31, 403 (1936).

(***) G. B. BONINO, A. MANZONI-ANSIDEI e P. PRATESI, «Zeits. f. Phys. Chem.», 25, 348 (1934).

		α - α' -dimetil pirrolo			α - β' -dimetil pirrolo		
R. CCl ₄	R (**)	I. R. puro	I. R. soluz. CCl ₄	R (***)	I. R. puro	I. R. soluz. CCl ₄	R (***)
<i>f</i>	3392	3400 <i>f</i>	3480 <i>f</i> 3400 <i>f</i>	3379	3400 <i>f</i>	3492 <i>f</i> 3403 <i>f</i>	3373
<i>f</i>	3128	3190 <i>d</i> 3110 <i>mf</i>	3110 <i>d</i>	3107	3180 <i>dd</i> 3125 <i>d</i>		
<i>f</i>	3095	3086 <i>m</i>	3086 <i>d</i>		3080 <i>m</i>	3084 <i>f</i>	3090
	3034	—	2989 <i>d</i>				
<i>m</i>	2973	2970 <i>f</i>	2976 <i>m</i>	2977			
<i>m</i>		2933 <i>f</i>	2928 <i>f</i>	2927	2912 <i>f</i>	2930 <i>f</i>	2918
<i>f</i>	2920	2906 <i>f</i>	2906 <i>mf</i>	2902		2906 <i>mf</i>	
<i>m</i>	2892	2868 <i>f</i>	2869 <i>m</i>		2870 <i>f</i>	2875 <i>mf</i>	2865
<i>m</i>	2862						
	2822						
	2740	2772 <i>d</i> 2730 <i>m</i> 2676 <i>m</i> 2652 <i>d</i> 2606 <i>d</i> 2450 <i>md</i>	2739 <i>d</i>		2742 <i>m</i> 2670 <i>d</i> 2630 <i>dd</i> 2535 <i>d</i> 2410 <i>d</i>	2743 <i>m</i>	
				1605	1703 <i>f</i> 1600 <i>f</i>		1565
	1559	1512 <i>f</i>		1514	1515 <i>f</i>		1510
	1481						
	1456	1460 <i>mf</i>		1458	1459 <i>f</i>		
	1427	1446 <i>mf</i>			1453 <i>f</i>		1452
	1381	1416 <i>f</i>			1418 <i>f</i>		1413
	1363	1395 <i>f</i>		1367	1392 <i>f</i>		1385
	1313				1293 <i>mf</i>	1289 <i>mf</i>	1286
	1282						
<i>m</i>	1260	1260 <i>mf</i>	1260 <i>f</i>	1258	1253 <i>m</i>	1252 <i>m</i>	1245
	1206						
		1188 <i>f</i>	1183 <i>f</i>	1187			
<i>dd</i>	1137				1149 <i>f</i> 1112 <i>f</i>	1149 <i>m</i> 1108 <i>f</i>	1155 1099
<i>d</i>	1060						
<i>f</i>		1036 <i>f</i>	1038 <i>f</i>	1034	1040 <i>m</i>	1039 <i>d</i>	
<i>m</i>	982	993 <i>f</i>	1000 <i>m</i>	991	986 <i>mf</i>	985 <i>m</i>	987
<i>m</i>	953	978 <i>m</i> 957 <i>d</i>			971 <i>d</i> 956 <i>mf</i>		
	885						
<i>m</i>	863						
	841				790 <i>f</i>		
	772	769 <i>f</i>		765	735 <i>f</i>		
	702	692 <i>d</i>		690	714 <i>m</i>		706
	637	649 <i>f</i>		649	650 <i>f</i>		
	615	564 <i>f</i>		623	620 <i>m</i>		
	581			603	556 <i>mf</i>		571
				485			

I due acidi presentano entrambi degli assorbimenti nella zona che ci interessa dovuti con ogni probabilità a vibrazioni di valenza dell'OH carbossilico associato ⁽³⁾. L'acido β ha in particolare uno spettro abbastanza complicato di cui va tenuto conto per le inevitabili interferenze con lo spettro del $-\text{CH}_3$.

I due pirroli monometilici presentano spettri diversi a seconda che il gruppo $-\text{CH}_3$ sia in α o in β , ed anche in questi composti la sostituzione in β origina uno spettro più complesso che non quella in α .

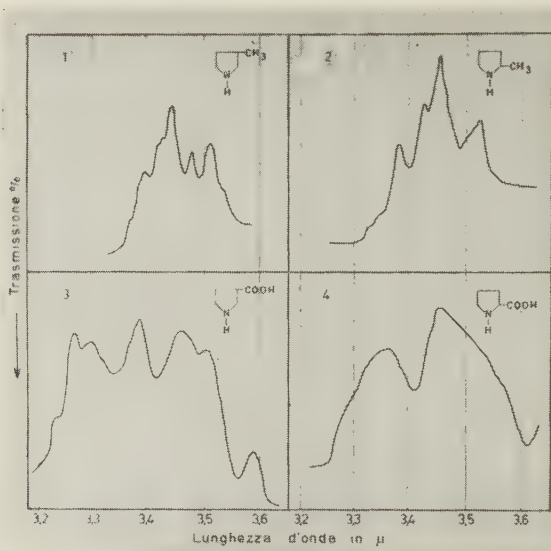


Fig. 1.

Sulla base di questi dati possiamo ad osservare i composti nei quali nell'anello pirrolico sono presenti entrambi i sostituenti, il $-\text{CH}_3$ e il $-\text{COOH}$ (fig. 2).

È evidente che gli spettri che si osservano non sono una sovrapposizione esatta di quelli di partenza, ma subiscono modificazioni più o meno profonde, al variare delle posizioni dei sostituenti, sia per quel che riguarda la posizione delle bande, sia per quel che riguarda le loro intensità relative.

Tra i vari composti studiati, quello che presenta maggiore analogia spettroscopica con i composti di partenza è l'acido diagonale 3-metil-5-pirrolcarbonico. Di questo composto risultavano poco perturbati anche la $\Delta\nu$ ed il pK_a carbossilico osservati in un altro lavoro ⁽⁴⁾.

Parallelamente, anche se in misura minore, nell'isomero 2-metil-4-pirrolcarbonico sono ancora riconoscibili le bande dei sostituenti.

(3) Questi assorbimenti prospettano, per questi acidi, la possibilità di formazione di dimeri con chelazioni intermolecolari dello stesso tipo di quelle osservate per l'acido formico.

Questi due composti, da quanto si era osservato sugli schemi di risonanza proposti, sono quelli che dovrebbero risentire meno dell'introduzione di un metile nell'anello.

Tenuto conto delle sovrapposizioni ed interferenze dovute allo spettro dell'OH carbossilico negli acidi, nella Tabella II si è cercato di individuare

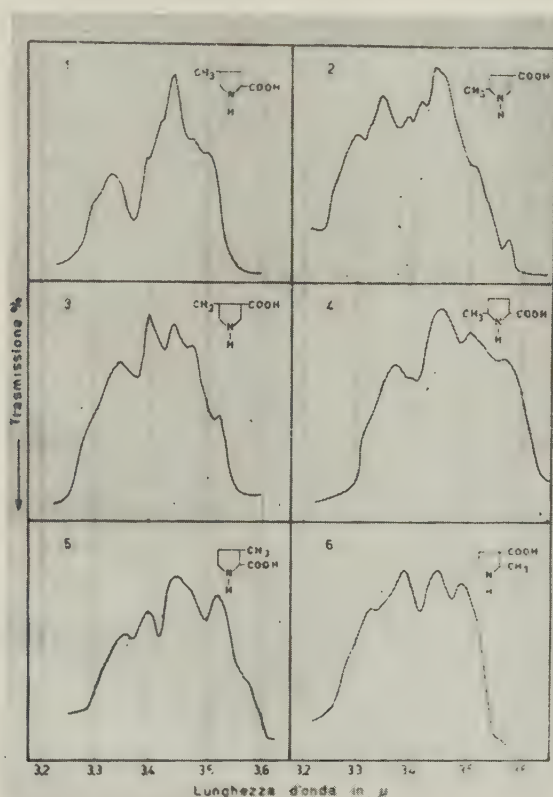


Fig. 2.

le posizioni approssimate delle bande assegnabili, secondo Fox e Martin ⁽⁴⁾ alle frequenze di stretching del $-\text{CH}_3$.

Fox e Martin assegnano al gruppo $-\text{CH}_3$, in accordo anche con la precedente letteratura, due frequenze principali di stretching corrispondenti rispettivamente ad una vibrazione simmetrica e ad una vibrazione antisimmetrica e che cadono, quando il gruppo metilico è attaccato ad un atomo di carbonio, l'una a 2962 cm^{-1} e l'altra a 2872 cm^{-1} .

Tra queste due bande principali sono osservabili, in genere, altre due bande.

(4) FOX e MARTIN, « Proc. Roy. Soc. », 175, 208 (1940).

TABELLA II.

2-metil pirrolo	2984	2942	2922	—	2865
3-metil pirrolo	2971	2949-2942	2930	2902	2874
2-metil-4-carbos. pirrolo	2974	2954	2932	—	2873
2-metil-5-carbos. pirrolo	2972 *	—	2923	—	2881
5-metil-4-carbos. pirrolo	2976	—	2928	—	2890
3-metil-5-carbos. pirrolo	2971	2945	2928	(2900)	2881
4-metil-5-carbos. pirrolo	2971	—	2925	2906	2845
3-metil-4-carbos. pirrolo	2971	—	2932	2906	2869

* massimo coperto

Questi Autori hanno inoltre osservato che nei composti saturi le bande metiliche conservano una posizione ed una intensità circa costante, mentre quando il gruppo metilico è adiacente ad un doppio legame, la posizione e l'intensità delle sue bande varia, per piccoli cambiamenti nella molecola, in maniera notevolissima.

Inoltre la banda a frequenza più bassa, che corrisponde ad una vibrazione simmetrica, nei composti insaturi si sdoppia, restando la frequenza media a circa 2872 cm^{-1} . Gli Autori attribuiscono questo sdoppiamento ad un fenomeno di risonanza simile a quello che hanno osservato per il $=\text{CH}_2$.

Tra i dati riportati in Tabella II si possono individuare con una certa approssimazione le due bande fondamentali delle quali l'antisimmetrica conserva dei valori abbastanza costanti, mentre la simmetrica presenta, nei vari composti, delle oscillazioni sensibili intorno al valore assegnato da Fox e Martin e che possono essere in parte attribuite ad interferenza con le vibrazioni dell'OH carbossilico.

Per le bande intermedie si osserva che quella intorno a $2940\text{--}2950\text{ cm}^{-1}$, la quale si trova in entrambi i composti metilici del pirrolo, scompare nei composti metilici degli acidi pirrolici restando solo nei due composti diagonali i quali, come abbiamo già osservato altrove, hanno il metile meno perturbato. Sembrerebbe quindi che questa banda scompaia con la coniugazione.

Nei composti β metil sostituiti compare e si conserva una banda intorno a 2900 cm^{-1} .

Fox e Martin hanno stabilito, quale criterio di differenza tra un $-\text{CH}_3$ legato ad un sistema di legami semplici ed un $-\text{CH}_3$ legato ad un sistema con doppi legami, lo sdoppiamento della banda simmetrica a 2872 cm^{-1} .

Nei nostri composti questo sdoppiamento non si osserva nei due pirroli α e β metilsostituiti misurati in soluzione di CCl_4 . Tale assenza potrebbe essere

attribuita ad un contributo trascurabile della forma iperconiugata alle forme di risonanza del pirrolo e questo sarebbe in accordo con i valori di $\Delta\nu$ osservati, i quali non mostrano sensibili differenze con quelli del pirrolo non sostituito.

Non è altrettanto spiegabile, invece, la scomparsa del doppietto nei composti acidi, in alcuni dei quali l'iperconiugazione dovrebbe essere sufficientemente sentita. Questo sdoppiamento può essere nascosto da interferenza con le bande dell'acido e dal fatto che queste sostanze si sono dovute misurare allo stato solido, cosa che può aver diminuito la risoluzione delle bande.

Si potrebbe considerare come una delle frequenze sdoppiate quella che si osserva verso 2900 cm^{-1} , ma tale assegnazione sembra poco probabile dato che questa banda compare nei soli composti β metilici.

Il valore di questi dati rimane necessariamente molto approssimato perché non è facile stabilire in qual misura le bande dell'OH carbossilico associato interferiscano con le bande di valenza del $-\text{CH}_3$.

PARTE SPERIMENTALE.

Le misure I. R. sono state eseguite con uno spettrofotometro Perkin-Elmer 112 sulle sostanze pure ed in soluzione di CCl_4 per i pirroli α -metilici e sulle sostanze solide sospese in pastiglie di KBr per gli acidi pirrolici α -metilici.

Chimica. — *Sullo spettro infrarosso dell'urea in una serie di complessi del tipo urea-cetano* (*). Nota di GABRIELLO ILLUMINATI, GIULIANA GRASSINI e MARISA SCROCCO, presentata (**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

La struttura del complesso urea-cetano è stata recentemente chiarita in modo particolare ^(1,2). L'analisi roentgenografica ha mostrato che il reticolo tetragonale dell'urea si riordina a reticolo esagonale nel complesso per permettere la sistemazione della catena alifatica normale nell'interno di canali. Alla stabilità del complesso concorrono sia forze di Van der Waals sia i legami idrogeno $\text{N}-\text{H}\cdots\text{O}$.

Nel reticolo dell'urea vi sono due tipi di legame idrogeno, l'uno « corto » con $\text{N}\cdots\text{O}$ di $2,99\text{ \AA}$ e l'altro « lungo » con $\text{N}\cdots\text{O}$ di $3,04\text{ \AA}$. Solo il primo cambia sensibilmente nel complesso con un rafforzamento che riduce la distanza $\text{N}\cdots\text{O}$ a $2,93\text{ \AA}$. In accordo con questi dati cristallografici, all'infrarosso si notano spostamenti delle bande di « stretching » del gruppo NH_2 .

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Inorganica dell'Università di Roma e Centro di Chimica Generale del C.N.R.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) A. E. SMITH, « Acta Crystall. », 5, 234 (1952).

(2) A. A. VERRIJN STUART, « Rec. trav. chim. », 75, 906 (1956).

dell'urea che corrispondono a un rafforzamento dei legami idrogeno nel complesso.

Il ruolo dei legami idrogeno $N-H \cdots O$ è pertanto ben acquisito nel complesso urea-cetano. È stato già proposto da Schlenk ⁽³⁾ che la struttura di tale complesso non è specifica per il cetano ma è comune a un intero gruppo di sostanze a lunga catena alifatica, siano esse idrocarburi o loro derivati con gruppi polari, come alcoli, acidi carbossilici ed esteri. La stabilità di tali complessi sembra essere regolata dalla lunghezza e dalla conformazione delle catene ^(3,4), ma la struttura è essenzialmente costante come dimostra l'identità degli spettri di polvere per tutti i complessi esaminati appartenenti a tale struttura.

Alla luce degli studi su citati riguardanti il complesso urea-cetano, gli spettri I. R. offrono la possibilità di accertare se tali analogie corrispondano ad analogie rispetto a uno degli elementi strutturali più caratteristici, il legame idrogeno $N-H \cdots O$, capaci di contribuire alla stabilizzazione del reticolo a canali dell'urea in questi complessi. A tal fine è stata considerata una serie di idrocarburi dal C_{12} al C_{28} e loro derivati con gruppi polari vari e sono state esaminate le bande di stretching del gruppo NH_2 nella regione di 3μ .

Tutti i complessi furono preparati essenzialmente secondo uno dei metodi descritti da Schlenk ⁽³⁾. Il componente alifatico (0,5-1 g) veniva mescolato a temperatura ambiente con 20-40 ml di una soluzione satura di urea in alcool metilico e il prodotto che così precipitava veniva trasferito in un mortaio e trattato con due successive porzioni di una soluzione metanolica satura di urea di pochi ml ciascuna e intimamente mescolato per assicurare completa reazione. La formazione del prodotto in generale è immediata, ma in alcuni casi richiede un po' di tempo e l'aiuto del raffreddamento a $5-10^\circ$ (dodecano). Le misure spettrofotometriche sono state eseguite con un apparecchio Perkin-Elmer 12 montato con prisma di fluorite. Il campione polverizzato veniva stratificato senza l'aiuto di olio disperdente sulle lastre di fluorite onde evitare ogni eventuale interazione tra l'olio (di natura idrocarbonica) e il complesso in esame.

Nell'urea vi sono due coppie di bande corrispondenti allo stretching $N-H$, la prima a 3449 e 3436 cm^{-1} e la seconda a 3362 e 3342 cm^{-1} ⁽²⁾. Nel complesso del cetano la prima coppia si sposta leggermente allargandosi mentre la seconda si sposta di 120 cm^{-1} senza allargarsi. Quest'ultimo spostamento è il più importante e significativo del complesso e può essere ben individuato anche senza l'impiego di radiazione infrarossa polarizzata e di preparati a cristalli orientati. In queste condizioni, che noi abbiamo adottato per convenienza, la prima coppia di bande appare appena distinta mentre la seconda è fusa in una banda unica. I risultati sono riportati nella Tabella I.

(3) W. SCHLENK, «Ann.», 564, 204 (1949).

(4) O. REDLICH e coll., «J. Am. Chem. Soc.», 72, 4153 (1950).

TABELLA I.

Frequenze di stretching del legame N—H di alcuni complessi del tipo urea-cetano.

Composto	ν_1, ν_2 (a), cm^{-1}	$\Delta\nu_1, \Delta\nu_2$	$\nu_{3,4}$ (b), cm^{-1}	$\Delta\nu_{3,4}$
Urea	3443	0	3347	0
Urea complessata				
<i>n</i> -dodecano	3399, 3372	44, 71	3225	122
<i>n</i> -tetradecano	3399, 3375	44, 68	3221	126
<i>n</i> -esadecano (cetano)	3403, 3366	40, 77	3222	125
<i>n</i> -octadecano	3399, 3369	44, 74	3221	126
<i>n</i> -octacosano	3399, 3375	44, 68	3223	124
alcool cetilico	3410, 3372	33, 71	3224	123
acido palmitico	3396, 3373	47, 70	3223	124
acido stearico	3399, 3366	44, 77	3223	124
acido oleico	3401, 3369	42, 74	3224	123
acetato di cetile	3392, 3372	51, 71	3221	126
acetato di <i>n</i> -octadecile	3399, 3369	44, 74	3221	126
laurato di metile	3396, 3369	47, 74	3221	126
stearato di etile	3403, 3375	40, 68	3221	126

(a) 1 coppia di bande corrispondente alle vibrazioni «fuori fase» $\left(\begin{smallmatrix} \rightarrow \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right)$.(b) Banda fusa corrispondente alle vibrazioni «in fase» $\left(\begin{smallmatrix} \rightarrow \\ \downarrow \end{smallmatrix} \right)$.

Questi risultati mostrano che gli spostamenti di banda (Δ) rispetto all'urea per tutti i complessi con i composti a lunga catena normale esaminati sono costanti e strettamente analoghi a quelli del complesso con il cetano. Gli spostamenti medi della prima coppia di bande sono 43 e 72 cm^{-1} e quello, più rilevante, della banda fusa è di 125 cm^{-1} . Che questi spostamenti siano legati alle modificazioni del legame idrogeno caratteristiche della struttura a canali del complesso cetano-urea è anche dimostrato dal fatto che altri tipi di addotti dell'urea non presentano le stesse variazioni di frequenza e le stesse regolarità. A tale scopo sono stati registrati gli spettri di assorbimento nella stessa regione di addotti che, in base agli studi precedenti, hanno un rapporto stechiometrico razionale e sono risultati non possedere strut-

tura a canali (Tabella II). Tutti questi complessi presentano una banda molto debole che si nota anche nell'urea alle frequenze più basse (3260 cm^{-1}) ma non nei complessi a canali; le piccole o trascurabili variazioni di frequenza rispetto all'urea stanno a indicare che i legami idrogeno « corto » e « lungo » dell'urea tetragonale non sono sostanzialmente modificati. I due complessi con gli acidi succinico e glutarico presentano un'altra banda alle frequenze più alte molto ravvicinata alla successiva. Il quadro spettrale presentato da questi complessi di tipo vario è, come si vede, ben distinto da quello dei complessi riportati nella Tabella I.

TABELLA II.

Frequenze di stretching del legame N—H di alcuni addotti non appartenenti al tipo urea-cetano.

Composto	Bande osservate cm^{-1}			
Urea		3443	3347	3260
Addotto				
1,4-diclorobutano		3422	3330	3258
1,5-dibromopentano		3448	3345	3220
1,6-dibromoesano		3417	3329	3210
esametildiammina		3442	3344	3221
acido ossalico		3446	3340	3224
acido succinico	3478	3443	3336	3237
acido glutarico	3469	3440	3343	3213

I risultati confermano precedenti vedute sulla struttura dei complessi dell'urea con i composti a lunga catena alifatica. In particolare forniscono una ulteriore prova che 1) la struttura a canali di questi complessi è condizionata dallo speciale riordinamento esagonale del reticolo fondamentale dell'urea e dalla conformazione e lunghezza delle catene; 2) la struttura del complesso tipo urea-cetano è indipendente dalla presenza e dalla natura dei gruppi polari OH , CO_2H e CO_2R in una serie in cui il concatenamento degli atomi rimane essenzialmente normale; 3) nella struttura degli addotti molecolari di tipo diverso, quali quelli compresi nella Tabella II, non sono interessate le frequenze di stretching e dell' N—H .

Farmacologia. — *Nuovo gruppo di farmaci antivirali: complessi di bismuto con pirocatechindisolfonato sodico.* Nota di TITO BERTI (*), SILVIO BEZZI (**) e PIERANTONIO VISENTINI (*), presentata (***) dal Socio E. MENEGHETTI.

L'esame della letteratura riguardante lo studio di composti ad azione chemioterapica antivirale [1] [2] [3] [4] [5] ci ha portati a constatare che, in contrasto con la grande mole di indagini eseguite con tutti gli altri chemioterapici antibatterici e antiprotozoari, assai scarsa attenzione è stata dedicata a quei composti metallici, contenenti As, Sb, Bi e Hg, che tanta importanza hanno avuto nello sviluppo della chemioterapia.

In base a questa constatazione noi ci siamo proposti un piano di sistematiche ricerche sulla eventuale azione antivirale di tale gruppo di composti. Le prime indagini eseguite secondo questo indirizzo [6] hanno dimostrato che due complessi di bismuto con pirocatechindisolfonato sodico, contenenti il 50,2 e il 36,2 % di bismuto e denominati rispettivamente P I e P II, inibiscono lo sviluppo del virus della malattia di Newcastle (NDV) coltivato nelle uova embrionate. Queste due sostanze, che presentano azione antivirale ben evidente anche a dosi discretamente inferiori alle massime non tossiche, hanno anche la proprietà caratteristica di agglutinare i globuli rossi.

La struttura chimica di P I e P II non è ancora esattamente conosciuta; l'indagine chimica finora eseguita ha tuttavia permesso di accertare che, variando le modalità della preparazione, con il pirocatechindisolfonato sodico e il nitrato o l'idrato di Bi si possono ottenere numerosi composti con tenori assai diversi di metallo.

Questa constatazione ci ha indotti a preparare una serie di prodotti di questo tipo e a studiarne l'azione sullo sviluppo del virus della malattia di Newcastle nelle uova embrionate.

PARTE CHIMICA.

Tutti i composti qui descritti sono stati ottenuti facendo reagire soluzioni acquose sature di pirocatechindisolfonato sodico (Piro-Na) con nitrato o idrato di bismuto solidi; si ottengono così delle soluzioni limpide, colorate più o meno intensamente in giallo che, dopo essere state purificate con carbone attivo e filtrate, vengono versate in metanolo anidro. Si origina un precipitato di colore giallo che viene separato per filtrazione, lavato ripetutamente nel filtro con metanolo e infine essiccato sotto vuoto fino a totale

(*) Istituto di Farmacologia dell'Università di Padova, Centro di studio per la Chemioterapia del C.N.R.

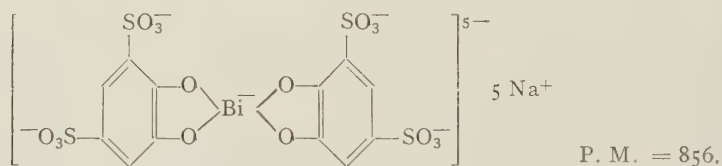
(**) Istituto di Chimica Organica dell'Università di Padova.

(***) Nella seduta del 19 aprile 1958.

scomparsa del metanolo. Un composto di questo tipo, preparato dalla reazione del Piro-Na con l'idrato di Bi, è già stata descritto da Zancan [7].

I prodotti ottenuti sono tutti molto solubili in acqua dando soluzioni limpide o lievemente opaline. Il contenuto in Bi varia tra il 19 % e il 57 % a seconda dei rapporti Piro-Na/Bi impiegati nelle preparazioni: sono stati preparati tre tipi di composti partendo dai seguenti rapporti molari tra Piro-Na e Bi: 2/1 ; 1/1 , 1/2. Ogni preparazione è stata fatta sia con $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ che con $\text{Bi}(\text{OH})_3$, preparato di fresco dalla quantità teorica di soluzione acida per HNO_3 di $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$, versata nell' NH_3 in grande eccesso. Nelle preparazioni con Bi nitrato la neutralizzazione con NaOH determina un innalzamento di temperatura che può provocare fenomeni di ossidazione: i prodotti così ottenuti assumono un colore giallo-arancio. Se tuttavia la reazione viene eseguita a 0 °C si ottengono anche in questo caso sostanze gialle analoghe a quelle ottenute con Bi idrato. In alcune preparazioni sono stati usati particolari accorgimenti: purificazione del prodotto per asportare le tracce di nitrati presenti, variazioni del pH nel corso della reazione, precipitazioni frazionate. I particolari verranno riferiti nella descrizione dei singoli prodotti. Le analisi si riferiscono a prodotti essiccati a bassa temperatura.

Composti con rapporto molare Piro-Na/Bi $\sim 2/1$. - Contenuto teorico in Bi = 24,4 % per la formula seguente:

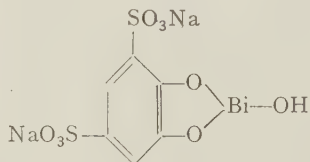


P 2 = A g 6,4 (mole 0,0192) di Piro-Na sciolti in cc 19 di acqua si aggiungono g 2,5 (mole 0,0096) di $\text{Bi}(\text{OH})_3$. In 3 ore a T° ambiente, con continua agitazione magnetica, si ottiene una soluzione limpida, giallognola, che viene trattata con g 3 di carbone, filtrata e versata in cc. 250 di metanolo. Prodotto ottenuto = g 6,9; resa = 42 %; Bi = 19,3 %.

P 30 = A g 15 (mole 0,04) di Piro-Na parzialmente sciolti in cc 20 di acqua a 0° si aggiungono lentamente g 11 (mole 0,02) di $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5 \text{H}_2\text{O}$ solido. A dissoluzione completa si porta lentamente il pH a neutralità con NaOH conc., mantenendo in agitazione ed evitando innalzamento di temperatura. Si decolora con g 3 di carbone attivo e si versa in cc 300 di metanolo. Difenilamina per NO_3^- = positiva. Prodotto ottenuto = g 21; resa = 54 %; Bi = 21,1 %.

P 31 = Piro-Na g 15 (mole 0,04) in cc 25 di acqua a pH ~ 1 ; $\text{Bi}(\text{OH})_3$ g 5,8 (mole 0,02). T° ambiente; durata della reazione = 24 ore; pH finale ~ 2 portato a 7 con NaOH conc. Si decolora con carbone, si filtra e si versa il filtrato in cc 350 di metanolo. Difenilamina per NO_3^- = negativa. Prodotto ottenuto = g 22; resa = 57 %; Bi = 20,0 %.

Composti con rapporto molare Piro-Na/Bi $\sim 1/1$. - Contenuto teorico in Bi = 38,8 % per la formula seguente:



P. M. = 538.

P 4 e *P 5* = Piro-Na g 33,8 (mole 0,101) in cc 60 di acqua; Bi(OH)₃ g 55 (mole 0,212). T° ambiente. La sospensione, dopo aggiunta di Bi idrato, viene ben omogeneizzata, e poi divisa in due porzioni.

I^a porzione (*P 4*) = Si porta il pH della sospensione a ~ 7 e si continua l'agitazione a T° ambiente per 20 ore; pH finale 8,5. Si filtra il Bi idrato che non ha reagito, si decolora con g 2 di carbone e si versa il filtrato in cc 350 di metanolo. Prodotto ottenuto = g 35; Bi = 34,2 %.

II^a porzione (*P 5*) = Si procede come per la porzione precedente e, dopo l'agitazione per 20 ore, il pH finale 8,5 si riporta a 7 con HNO₃ dil. Si lascia agitare ancora per 20 ore. Si filtra l'idrato che non ha reagito, si decolora con g 2 di carbone e si versa il filtrato in cc 300 di metanolo. Prodotto ottenuto = g 16; Bi = 34,3 %.

Resa complessiva delle due porzioni = 94 %; difenilamina per NO₃⁻ = negativa.

P 11 = Piro-Na g 6 (mole 0,018) in cc 15 di acqua; Bi(NO₃)₃·5 H₂O g 8,8 (mole 0,018). Temperatura 0°; inizialmente pH ~ 1. Neutralizzando con NaOH, verso pH 2 si forma un notevole precipitato che si ridiscioglie a pH 6,5. Si decolora con g 2 di carbone, si filtra e il filtrato viene versato in cc 200 di metanolo. Difenilamina per NO₃⁻ = positiva. Prodotto ottenuto = g 9,7; resa = 100 %; Bi = 36,2 %.

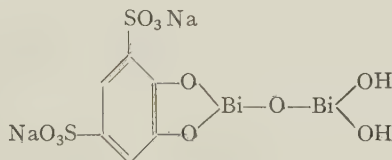
P 29 = Piro-Na g 12 (mole 0,036) in cc 20 di acqua; agitato per 3 ore a 0° con g. 9,8 di Bi(OH)₃ (mole 0,038) e poi portato a pH ~ 7 con NaOH conc. Si filtra dall'idrato indisciolti (g 2,1) e si versa in cc 300 di metanolo. Prodotto ottenuto = g 19; resa = 98 %; Bi = 36,0 %.

P 36 = Piro-Na g 250 (mole 0,75) in cc 500 di acqua; Bi(NO₃)₃·5 H₂O g 363,7 (mole 0,75) aggiunto in 30' a 0°. Agitazione magnetica; pH ~ 1. Si aggiunge lentamente NaOH (in circa 2 ore): a pH 2 → 3 si ha notevole precipitazione; a pH 7 la soluzione torna limpida. Si decolora con g 10 di carbone, si filtra e il filtrato viene versato in circa litri 5 di metanolo. Difenilamina per NO₃⁻ = positiva. Prodotto ottenuto = g 373; resa = 93 %; Bi = 31,7 %.

P 37 = g 20 del prodotto *P 36* sciolti in cc 70 di acqua e portati a pH 8 con NaOH conc. Precipitato versando in cc 700 di metanolo. Difenilamina per NO₃⁻ = negativa. Prodotto ottenuto = g 18; Bi = 33,9 %.

P 38 = g 40 del prodotto *P 36* sciolti in cc 140 di H₂O e portati a pH 2 aggiungendo HNO₃ conc. Riscaldati per 3 ore a 40°, neutralizzati con NaOH e precipitati con cc 1400 di metanolo. Prodotto ottenuto = g 18; Bi = 36,7 %.

Composti con rapporto molare Piro-Na/Bi ~ 1/2. - Contenuto teorico in Bi = 53,6 % per la formula seguente:



P.M. = 780.

P 12 = Piro-Na g 6 (mole 0,018) in cc 15 di acqua; Bi(OH)₃ g 12,4 (mole 0,045). T° ambiente; agitazione magnetica per 24 ore. Si recupera l'idrato che non ha reagito, (g 2,8). Si decolora con g 1 di carbone, si filtra e il filtrato viene versato in cc 200 di metanolo. Difenilamina per NO₃⁻ = negativa. Prodotto ottenuto = g 12,1; resa = 85 %; Bi = 51,5 %.

P 33 = Piro-Na g 45 (mole 0,135) in cc 95 di acqua; Bi(OH)₃ g 70 (mole 0,270). Preparazione esattamente uguale a quella del precedente *P 12*. Prodotto ottenuto = g 90; resa = 85 %; Bi = 48,3 %.

P 1 = Piro-Na g 15 (mole 0,045) in cc 40 di acqua portato a pH ~ 7 con NaOH; Bi(OH)₃ g 25,9 (mole 0,10). Preparazione esattamente uguale a quella del precedente *P 12*. Prodotto ottenuto = g 26; resa = 74 %; Bi = 50,2 %.

$P\ 7$ = Piro-Na g 13,38 (mole 0,04) in cc 40 di acqua; $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\ \text{H}_2\text{O}$ g 39,05 (mole 0,08). T° ambiente. Dapprima vengono aggiunti g 4 di nitrato, poi la soluzione è resa fortemente alcalina con cc 12,2 di NaOH conc. Aggiungendo in seguito il rimanente nitrato si forma un abbondante precipitato che si ridiscioglie dopo aggiunta ulteriore di cc 11,5 di NaOH conc.; pH finale = 7. Si decolora con g 2 di carbone, si filtra e il filtrato viene versato in cc 500 di metanolo. Difenilamina per NO_3^- = positiva. Prodotto ottenuto = g 32; resa = 100 %; Bi = 46,9 %.

$P\ 8$ = Piro-Na g 13,38 (mole 0,04) in cc 28 di acqua; $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\ \text{H}_2\text{O}$ g 39,05 (mole 0,08). T° ambiente. Il nitrato solido si scioglie lentamente (1 ora) con intenso colore arancio. Aggiungendo poi lentamente NaOH la temperatura sale a $35^\circ\text{--}40^\circ$; si ha un abbondante precipitato a pH $2 \rightarrow 3$ che si ridiscioglie a pH 7. Soluzione limpida di colore rosso intenso. Si tratta con g 2 di carbone, si filtra e si versa il filtrato in cc 300 di metanolo. Difenilamina per NO_3^- = positiva. Prodotto ottenuto (rossiccio) = g 32,1; resa = 100 %; Bi = 50,3 %.

$P\ 9$ = Piro-Na g 13,38 (mole 0,04) in cc 28 di acqua; $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\ \text{H}_2\text{O}$ g 40,85 (mole 0,10). T° ambiente. Il nitrato viene aggiunto in porzioni successive, alternativamente a NaOH conc.; pH finale = 7. La soluzione lievemente opalescente non varia di aspetto per agitazione durante la notte. Si tratta con carbone, si filtra e si versa in cc 300 di metanolo. Difenilamina per NO_3^- = positiva. Prodotto ottenuto = g 32,6; resa = 101 %; Bi = 51,6 %.

$P\ 10$ = Piro-Na g 13,38 (mole 0,04) in cc 28 di acqua; $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\ \text{H}_2\text{O}$ g 40,85 (mole 0,10). Temperatura 0° . A dissoluzione completa del nitrato si neutralizza lentamente con NaOH conc. Quando si sono aggiunti i due terzi della soda, si osserva il massimo della precipitazione; la soluzione neutra, limpida, viene trattata con g 2 di carbone, filtrata e versata in metanolo. Difenilamina per NO_3^- = positiva. Prodotto ottenuto = g 31,5; resa = 100 %; Bi = 50,9 %.

$P\ 32$ = Piro-Na g 45 (mole 0,135) in cc 90 di acqua; $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\ \text{H}_2\text{O}$ g 135 (mole 0,270). Temperatura 0° . Preparazione uguale a quella del precedente $P\ 10$. Metanolo cc 1000. Difenilamina per NO_3^- = positiva. Prodotto ottenuto = g 111; resa = 104 %; Bi = 52,5 %.

$P\ 28$ = Piro-Na g 12 (mole 0,036) in cc 20 di acqua; $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\ \text{H}_2\text{O}$ g 18,4 (mole 0,037). Temperatura 0° . Preparazione uguale a quella del precedente $P\ 10$. Difenilamina per NO_3^- = positiva. Prodotto ottenuto = g 21. Tale prodotto viene sciolto in cc 50 di acqua e la soluzione limpida e neutra viene portata a pH 8,5 con NaOH conc. Agitazione per 5' e poi si versa in cc 600 di metanolo. Si filtra, si lava e si essicca il precipitato in vuoto. Difenilamina per NO_3^- = negativa. Prodotto ottenuto = g 16; resa 57 %; Bi = 45,8 %.

Frazionamento da composto preparato con Piro-Na|Bi in rapporto molare 1/1.

$P\ 16$ = Piro-Na g 33,2 (mole 0,10) in cc 66 di acqua; $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\ \text{H}_2\text{O}$ g 53,5 (mole 0,10 + $\sim 10\%$). Temperatura $0^\circ\text{--}2^\circ\text{C}$. Dopo l'aggiunta del nitrato la soluzione è neutralizzata e decolorata con carbone. A questa soluzione vengono aggiunti cc 37 di metanolo. Prodotto ottenuto g 10,9; Bi = 40,1 %.

$P\ 17$ = Al filtrato della prima precipitazione vengono aggiunti altri cc 30 di metanolo. Prodotto ottenuto = g 12,1; Bi = 54,6 %.

$P\ 18$ = Al filtrato della seconda precipitazione vengono aggiunti altri cc 60 di metanolo + cc 40 di lavaggio del precedente prodotto. Prodotto ottenuto = g 32; Bi = 24,8 %.

$P\ 19$ = Al filtrato della terza precipitazione vengono aggiunti altri cc 145 di metanolo dei precedenti lavaggi. Si lascia per una notte a 0° . Prodotto ottenuto = g 4,5; Bi = 11,6 %.

Prodotto totale ottenuto = g 59,5; resa = 111 %.

Frazionamento da composto preparato con Piro-Na|Bi in rapporto molare 1/2.

$P\ 24$ = Piro-Na g 16,6 (mole 0,05) in cc 33 di acqua; $\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\ \text{H}_2\text{O}$ g 53,5 (mole 0,10 + $\sim 10\%$). Temperatura 0° . A dissoluzione completa del nitrato si neutralizza, si decolora con carbone e si filtra. Volume totale della soluzione = cc 60. Si tratta ora con

cc 14,5 di metanolo, si filtra il precipitato che si forma e si lava abbondantemente con cc 30 di metanolo e si essicca. Prodotto ottenuto = g 15,9; Bi = 52,0 %.

P 25 = Al filtrato della prima precipitazione vengono aggiunti cc 4 di metanolo. Si lascia a 0° per 1 ora e si filtra. Prodotto ottenuto = g 9,8; Bi = 57,3 %.

P 26 = Al filtrato delle precedenti precipitazioni vengono aggiunti cc 40 di metanolo. Si lascia a 0° per una notte, si filtra e si lava. Prodotto ottenuto = g 10,4; Bi = 28,3 %.

Prodotto totale ottenuto = g 36,1; resa = 93 %.

OSSERVAZIONE. — Queste precipitazioni frazionate dimostrano che nelle soluzioni dei prodotti ottenuti da pirocatechindisolfonato sodico e nitrato di bismuto nei rapporti molari 1/1 e 1/2 non è presente un composto unico ben definito. Sono in corso indagini per chiarire la natura di queste soluzioni.

PARTE FARMACOLOGICA.

Tecnica. — Le ricerche sono state eseguite su uova embrionate di pollo incubate da 11 giorni. La tossicità è stata determinata iniettando i composti nella cavità allantoidea ed osservando le uova per 5 giorni; con ogni composto furono eseguite 2–3 prove e in ogni prova vennero impiegati lotti di 6 uova ciascuno. La DL_{50} è stata calcolata con il metodo dei probits [8].

L'azione antivirale è stata determinata in uova infettate con 500–1000 DI_{50} di virus della malattia di Newcastle (NDV); salvo diversa indicazione, il farmaco è stato iniettato subito prima del virus. La valutazione dell'attività venne stabilita eseguendo la emoagglutinazione nel liquido allantoideo 37 ore dopo l'inoculum del virus; per ciascuna dose di composto sono stati impiegati 2 lotti di 5 uova ciascuno.

Per gli altri particolari tecnici rimandiamo ad una nota precedente [6].

La tossicità acuta nei topolini è stata determinata somministrando i composti per via endovenosa e calcolando la DL_{50} col metodo dei probits, in base alle percentuali di sopravvivenza registrate in lotti di 6 topi per ogni dose di ciascun farmaco.

Risultati. — Nella annessa Tabella sono riferiti i risultati ottenuti studiando l'influenza esercitata dai diversi composti sullo sviluppo del NDV nelle uova embrionate. Essi possono essere così schematicamente riassunti:

1° Il Piro–Na è completamente inattivo anche alla massima dose tollerata;

2° tutti i composti contenenti Piro–Na/Bi in rapporto molare circa 2/1 (contenenti Bi dal 19,5 % al 21,1 %), preparati con nitrato o idrato di Bi, sono sprovvisti di qualsiasi azione antivirale;

3° i composti con Piro–Na/Bi in rapporto molare circa 1/1 (contenenti Bi dal 31,7 % al 36,7 %) e con rapporto circa 1/2 (contenenti Bi dal 45,8 % al 52,5 %) inibiscono tutti lo sviluppo del NDV nel 100 % delle uova infettate a dosi pari a 1/4–1/6 della DL_{50} ;

4° frazionando separatamente i composti che si formano dalla reazione tra Piro–Na e Bi in rapporto molare 1/1 e 1/2 è possibile isolare dei prodotti che possiedono attività antivirale analoga a quella dei composti attivi precedentemente descritti, pur contenendo una percentuale assai bassa di Bi (P 18 = 24,8 % e P 26 = 28,3 %), solo di poco superiore a quella dei composti inattivi preparati con Piro–Na/Bi in rapporto molare 2/1.

TABELLA.

Composto	Preparazione	Bi %	Attività antivirale
Piro-Na	-----	—	—
<i>Rapporto molare Piro-Na/Bi ~ 2/1</i>			
P 2	da Bi(OH) ₃ — T° amb.	19,3	—
P 31	» » — 0 °C	20,0	—
P 30	da Bi(NO ₃) ₃ — »	21,1	—
<i>Rapporto molare Piro-Na/Bi ~ 1/1</i>			
P 4	da Bi(OH) ₃ — T° amb.	34,2	+++
P 5	» » — »	34,3	+++
P 29	» » — 0 °C	36,0	+++
P 11	da Bi(NO ₃) ₃ — »	36,2	+++
P 36	» » — »	31,7	+++
P 37	P 36 privato di NO ₃ ⁻	33,9	+++
P 38	P 36 riscald. a 40 °C	36,7	+++
<i>Rapporto molare Piro-Na/Bi ~ 1/2</i>			
P 12	da Bi(OH) ₃ — T° amb.	51,5	++
P 33	» » — »	48,3	+++
P 1	» » — »	50,2	+++
P 7	da Bi(NO ₃) ₃ — »	46,9	+++
P 8	» » — »	50,3	+++
P 9	» » — »	51,6	+++
P 10	» » — 0 °C	50,9	+++
P 32	» » — »	52,5	+++
P 28	» » — »	45,8	+++
<i>Frazionamento da rapporto molare Piro-Na/Bi ~ 1/1</i>			
P 16	da Bi(NO ₃) ₃ — 0 °C	40,1	+++
P 17		54,6	+++
P 18		24,8	++
P 19		11,6	—
<i>Frazionamento da rapporto molare Piro-Na/Bi ~ 1/2</i>			
P 24	da Bi(NO ₃) ₃ — 0 °C	52,0	+++
P 25		57,3	+++
P 26		28,3	+++

— = nessuna attività antivirale alla massima dose tollerata.

+ = attività nel 100% delle uova alla massima dose tollerata.

++ = attività nel 100% delle uova a 1/4 della DL₅₀.+++ = attività nel 100% delle uova a 1/6 della DL₅₀.

A questi risultati ottenuti nello studio dell'azione antivirale si aggiunga che:

5° tutti i composti dotati di azione antivirale agglutinano gli eritrociti di pollo in vitro a concentrazioni di 4-40 γ /cc; tale proprietà emoagglutinante manca invece nei prodotti inattivi;

6° la DL_{50} nei topolini, determinata per via endovenosa, è per la maggior parte dei composti, dell'ordine di 30-70 mg/kg, con l'eccezione del P 36 (127 mg/kg) e, soprattutto, del P 18 (631 mg/kg) i quali, pur essendo altrettanto attivi, presentano una tossicità nettamente inferiore.

CONCLUSIONI.

In base ai risultati ottenuti si può concludere che per reazione tra pirocatechindisolfonato sodico e idrato o nitrato di bismuto, in rapporto equimolecolare o in presenza di un eccesso di metallo, è possibile ottenere numerose sostanze dotate di notevole azione inibente lo sviluppo del NDV nelle uova embrionate.

Il Piro-Na, il bismuto come idrato colloidale o come complesso con acido etilendiaminotetracetico (Bi-EDTA) [6] e gli stessi complessi interni ottenuti da Piro-Na e Bi in rapporto molare 2/1, sono invece del tutto inattivi. Solo un altro complesso interno del Bi, il bismuto-sodio tartrato⁽¹⁾, benché solo alla massima dose tollerata, dimostra una certa attività [10].

In base a questi fatti crediamo di poter affermare che la presenza del Bi nel complesso non è da sola sufficiente ad interpretare l'azione antivirale, tanto più che non è stato possibile dimostrare l'esistenza di una ben definita relazione tra tale azione e la percentuale di metallo contenuto nei diversi composti. Se si tiene invece presente che il grado di mascheramento del metallo nel complesso varia a seconda dei rapporti quantitativi impiegati nella preparazione, appare verosimile l'ipotesi che l'azione chemioterapica sia dovuta a quella parte di metallo che per eventuali trasformazioni chimiche o chimico-fisiche riesce a liberarsi dal complesso. L'attività da noi riscontrata in alcuni dei complessi Piro-Na/Bi esaminati, andrebbe pertanto attribuita all'esistenza in essi di un grado di mascheramento del metallo particolarmente favorevole per il manifestarsi dell'azione chemioterapica.

È interessante ancora osservare che i composti attivi, pur impedendo lo sviluppo del NDV nell'uovo infettato, non inattivano le particelle virali in vitro [6]. Da ricerche in corso risulta inoltre che l'azione antivirale è evidente anche quando essi vengono iniettati nell'uovo 5-10 ore dopo il virus, il che sembra molto significativo.

Si aggiunga infine che alcuni dei composti dimostratisi attivi nella infezione da NDV nelle uova embrionate, sono relativamente poco tossici quando

(1) Qui ci si riferisce all'attività del bismuto-sodio tartrato B. P. [9]; l'eventuale azione antivirale di altri complessi che si possono ottenere da Bi e ac. tartarico, è attualmente allo studio in questo Istituto.

vengono iniettati per via endovenosa nei topolini; questo fatto giustifica l'estensione delle ricerche alla eventuale azione protettiva nelle infezioni da virus negli animali ⁽²⁾.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] MATTHEWS R. E. F. e SMITH J. D., «Advances in Virus Research», 3, 49 (1955).
- [2] DE RITIS F., COLTORTI M. e GIUSTI G., *Gli aspetti metabolici delle malattie da virus*, Ed. Minerva Medica, Torino (1955).
- [3] HURST E. W. e HULL R., «Pharmacol. Rev.», 8, 199 (1956).
- [4] HURST E. W., «J. Pharm. Pharmacol.», 9, 273 (1957).
- [5] HORSFALL F. L. e TAMM I., «Ann. Rev. Microbiol.», 11, 339 (1957).
- [6] VISENTINI P., «Giorn. di Microbiol.», 3, 134 (1957).
- [7] ZANCAN L., «Atti Soc. Med. Chir. Padova», 27, 2^o, 11 (1949).
- [8] BLISS C. I., «Quart. J. Pharm.», 11, 192 (1938).
- [9] *British Pharmacopoeia*, 1953, p. 86.
- [10] VISENTINI P., osservazioni non ancora pubblicate.

Fisiologia. — *Analisi delle risposte elettriche del cervelletto di Lucertola a stimolazioni periferiche* ^(*). Nota di PAOLO CREPAX e PIER LUIGI PARMEGGIANI, presentata ^(**) dal SOCIO G. C. PUPILLI.

In una Nota precedente ⁽¹⁾ abbiamo descritto i fenomeni elettrici provocati da stimolazioni estero- e propriocettive nel cervelletto di Lucertola. La componente essenziale della reazione elettrica cerebellare è costituita da un'onda superficie-negativa, la quale è immediatamente preceduta da una deflessione superficie-positiva e seguita, non costantemente, da due deflessioni lente di scarsa ampiezza, una negativa e l'altra positiva.

I fenomeni elettrici descritti sono contraddistinti da aspetti particolari rispetto alle onde che si manifestano, per effetto di stimolazioni della più diversa natura, nell'elettrogramma cerebellare di Mammifero [letteratura in Bremer ⁽²⁾, Fadiga, Pupilli e von Berger ⁽³⁾]. Le risposte cerebellari di Mammifero (Gatto) sono state analizzate e interpretate da Bremer e Bonnet ⁽⁴⁾ conforme al principio del volume conduttore e sul fondamento dei risultati delle ricerche compiute da Dow ⁽⁵⁾ intorno ai potenziali provocati nella corteccia del cervelletto con la stimolazione elettrica diretta. Nella presente

(2) Alla realizzazione di queste ricerche ha generosamente contribuito la Rockefeller Foundation.

(*) Lavoro eseguito, col sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, nell'Istituto di Fisiologia umana della Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) P. CREPAX e P. L. PARMEGGIANI, «Rend. Acc. naz. Lincei», Cl. Sci. fis., mat. nat., Ser. 8^a, questo volume.

(2) F. BREMER, «Rev. neurol.», LXXXVII, 65 (1952).

(3) E. FADIGA, G. C. PUPILLI e G. P. VON BERGER, «Arch. Sci. biol.», XL, 541 (1956).

(4) F. BREMER et V. BONNET, «J. Physiologie», XLIII, 245 (1949).

(5) R. S. DOW, «J. Neurophysiol.», XII, 245 (1949).

Nota ci proponiamo di esaminare le reazioni elettriche del cervelletto di Lucertola agli impulsi afferenti, a fine di formulare una interpretazione delle onde che le costituiscono.

L'analisi che segue, concerne solo quei fenomeni elettrici che si derivano dalla superficie dorsale del cervelletto per stimolazioni periferiche di basso voltaggio (1-3 V), effettuate in animali nei quali l'attività cerebellare spontanea si palesa ricca di pulsazioni relativamente ampie e frequenti. In tali condizioni sperimentali le onde elettriche cerebellari destinate dalle stimolazioni estero- e propriocettive scompaiono, ad eccezione dell'onda positiva iniziale, per l'applicazione locale di soluzioni al 5% di cocaina ovvero per effetto di una lesione meccanica del tessuto cerebellare e si riducono di ampiezza col susseguirsi delle stimolazioni periferiche a intervalli ravvicinati. Questi fatti permettono di riguardare i fenomeni elettrici registrabili nelle condizioni descritte come la manifestazione bioelettrica dello stato attivo dei neuroni cerebellari, provocato dagli impulsi cerebellipeti.

L'onda superficie-negativa che costituisce la componente principale della risposta del cervelletto di Lucertola alla stimolazione delle vie afferenti estero- e propriocettive, rappresenta verosimilmente la manifestazione bioelettrica dello stato attivo degli elementi dello strato granuloso e al tempo stesso delle cellule di Purkinje, potendosi ritenere che a causa della particolare configurazione del cervelletto di tale specie⁽⁶⁾ una variazione negativa dello stato elettrico della superficie cerebellare palesi lo stato attivo degli elementi degli strati considerati.

Com'è noto^(2,3), la reazione elettrica del cervelletto di Mammifero a influssi afferenti di diversa origine si palesa di solito con una oscillazione superficie-positiva, la cui fase discendente è spesso interrotta da una « punta » negativa, e una susseguente onda negativa, in genere più lenta e meno ampia. Si ammette^(2,4) che l'oscillazione positiva sia la manifestazione dei potenziali degli influssi cerebellipeti e dei potenziali degli interneuroni che li ritrasmettono, mentre la punta negativa e l'onda dello stesso segno che la segue rappresenterebbero la scarica efferente delle cellule di Purkinje, della quale scarica costituirebbero rispettivamente la fase sincronizzata e quella asincrona.

Non diversamente da quanto avviene nel cervelletto di Mammifero, in quello di Lucertola gli impulsi cerebellipeti investono dapprima lo strato dei granuli; ma in questo caso gli impulsi medesimi e lo stato attivo degli interneuroni che li ritrasmettono, per la disposizione superficiale delle fibre afferenti e la sede stessa dei granuli, si manifestano alla superficie dell'organo con una oscillazione elettronegativa. E come onda superficie-negativa, negli elettrogrammi registrabili dal cervelletto di Lucertola, si paleserebbe anche la scarica delle cellule di Purkinje, per la ragione che tra gli elementi

(6) Rammentiamo che nel cervelletto di Lucertola la disposizione degli elementi cellulari è invertita rispetto a quella propria della corteccia del cervelletto di Mammifero: partendo dalla superficie dorsale della lamina cerebellare, troviamo prima lo strato granuloso, poi le cellule di Purkinje e infine lo strato molecolare.

attivi e la superficie di derivazione dell'organo non risultano intercalate strutture che possano ritenersi atte, secondo la teoria del volume conduttore, a provocare a livello della superficie stessa una inversione della polarità dell'onda profonda. Del resto, indipendentemente dalle strutture interposte, la distanza che separa le cellule di Purkinje dalla superficie di derivazione è espressa da valori poco diversi nel cervelletto di Gatto e in quello di Lucertola: in quest'ultima specie lo strato interposto tra la superficie dorsale del cervelletto e i corpi delle cellule di Purkinje è il granuloso, il cui spessore medio è di $190\ \mu$; nel Gatto è lo strato molecolare, che ha uno spessore di $250\ \mu$. È quindi presumibile che la oscillazione di potenziale negativa riferibile alla scarica purkinjana non sia distinta da quella dello stesso segno con cui si palesa lo stato attivo delle fibre cerebellipete e degli elementi dello strato dei granuli: il carattere più o meno sincronizzato di detta scarica può rendere ragione della variabile durata dell'onda negativa, mentre la presenza della seconda onda negativa può essere riferibile al carattere ripetitivo della scarica medesima.

L'onda superficie-negativa, che costituisce la componente più significativa e costante della reazione elettrica del cervelletto di Lucertola, può essere immediatamente preceduta da una deflessione superficie-positiva. Tale deflessione, che non è modificata per il trattamento superficiale con cocaina, non è espressione dello stato attivo degli elementi cellulari cerebellari; il suo particolare significato è altresì chiarito dal fatto che in misura assai scarsa essa presenta fenomeni di fatica ⁽¹⁾. L'onda stessa può riguardarsi come la manifestazione superficiale di potenziali delle vie di conduzione. Nel cervelletto di Lucertola, a livello della inserzione della lamina, le fibre cerebellipete assumono una direzione perpendicolare rispetto alla superficie dell'organo e la raggiungono sotto forma di fasci relativamente cospicui: si spiega quindi lo stato di *source* della superficie dorsale della lamina cerebellare, dalla quale superficie si effettua la derivazione, rispetto alle fibre per le quali si propagano gl'impulsi cerebellipeti [Lorente de Nó ⁽⁷⁾, Grundfest ⁽⁸⁾, Buser ⁽⁹⁾].

L'onda positiva che precede la componente essenziale della reazione elettrica cerebellare della Lucertola, avrebbe quindi un significato analogo a quello attribuito alla oscillazione superficie-negativa che immediatamente precede l'onda positiva nelle risposte del cervelletto di Gatto a stimolazioni fotiche [Fadiga, Pupilli e von Berger ⁽³⁾]: in questo secondo caso la diffusione di potenziali profondi avverrebbe senza l'intervento di catene neuroniche orientate perpendicolarmente alla superficie, le quali raggiungano in gran numero la superficie stessa, e i potenziali conserverebbero il segno negativo, pur essendo derivati non dal focolaio di origine ^(3,7,8,9). Il fatto

(7) R. LORENTE DE NÓ, «Stud. Rockefeller Inst. med. Res.», CXXXII, 1 (1947).

(8) H. GRUNDFEST, «Ann. Rev. Physiol.», II, 213 (1940).

(9) P. BUSER, *Analyse des réponses électriques du lobe optique à la stimulation de la voie visuelle chez quelques Vertébrés inférieurs*, Paris, Masson (1955).

che la manifestazione superficiale dei potenziali delle vie di conduzione sia di segno opposto nell'elettrogramma cerebellare della Lucertola e in quello del Gatto, è in sostanza da riferire sia al diverso orientamento delle fibre cerebellipete rispetto alla superficie di derivazione, sia ai rapporti spaziali che le fibre contraggono con la superficie stessa.

La deflessione positiva terminale che si osserva negli elettrogrammi derivati dal cervelletto di Lucertola, si manifesta anche in quelli di Mammifero: nei primi essa è, in generale, meno costante e in ogni caso ha un'ampiezza scarsa. L'onda lenta positiva terminale, secondo Fadiga, Pupilli e von Berger⁽⁴⁾, va considerata come un potenziale postumo positivo delle vie efferenti: questo stesso significato crediamo vada attribuito al fenomeno elettrico da noi osservato. L'incostanza e il basso voltaggio della oscillazione stessa possono d'altra parte ritenersi in accordo con quanto tali Autori hanno rilevato negli elettrogrammi ottenuti, in superficie e a diversi livelli di profondità, dal cervelletto di Gatto: essi hanno visto come l'ampiezza della deflessione positiva terminale sia minima nelle regioni superficiali, aumenti in prossimità della sostanza bianca e sia infine massima negli elettrogrammi derivati da questa. Ora, poiché nel cervelletto di Lucertola esistono soltanto alcuni sottili fasci mielinizzati in prossimità della inserzione della lamina cerebellare, si spiegherebbero l'incostanza e la scarsa ampiezza della deflessione positiva con cui termina la reazione elettrica cerebellare.

In conclusione, le disposizioni anatomiche del cervelletto di Lucertola consentono di spiegare i particolari aspetti delle risposte elettriche che l'organo medesimo manifesta in tale specie, rispetto a quelli che si osservano nei Mammiferi.

Fisiologia. — *Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano.* — I. *Nuova tecnica per lo studio delle funzioni motorie dell'esofago mediante la meccanografia e la roentgencinematografia*^(*). Nota di LUIGI TURANO, ALFREDO CURATOLO, ENZO SALOMONI, presentata^(**) dal CORRISP. G. AMANTEA.

L'esame della letteratura che concerne le funzioni motorie dell'esofago rivela quanto si sia ancora lontani da una chiarificazione definitiva di questo argomento al quale fisiologi e clinici stanno dedicando un interesse sempre più vivo.

Per lo studio della motilità esofagea, i metodi che si sono dimostrati più idonei sono il metodo meccanografico e quello radiologico.

Fino ad ora, questi metodi sono stati impiegati separatamente, salvo il tentativo di Dornhost, Pierce e Harrison⁽¹⁾.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Radiologia dell'Università di Roma e presso l'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) A. C. DORNHOST, K. HARRISON, J. W. PIERCE, *The Lancet*, 695 (1954).

La tecnica meccanografica consiste nel rilevare e registrare graficamente le variazioni pressorie del lume esofageo in rapporto con l'attività motoria delle sue pareti. Essa si attua mediante sonde munite nel tratto distale di uno o più palloncini di gomma sottilissima, realizzate in modo che dopo l'introduzione - generalmente per la via orale - ciascun palloncino esploratore, adeguatamente insufflato può essere collegato all'esterno con un manometro e con un apparato di registrazione chimografica.

Più recentemente, al fine di ridurre l'inerzia delle trasmissioni, è stato introdotto l'uso di presso-trasduttori elettrici, o applicati direttamente nel lume esofageo ⁽²⁾ in luogo dei palloncini esploratori, oppure all'esterno ⁽³⁾, e utilizzando per la registrazione grafica i più moderni poligrafi.

Non v'è dubbio che la tecnica meccanografica ha consentito di acquisire fondamentali informazioni sulla attività motoria dell'esofago, tuttavia i risultati che da tale tecnica sono derivati non si prestano ad una analisi approfondita di tutti i fenomeni connessi alle funzioni motorie dell'esofago. Di ciò fanno fede le contraddittorie conclusioni che dai risultati con essa ottenuti hanno tratto i vari ricercatori.

La tecnica radiologica - impiegata già da Cannon ⁽⁴⁾ ha il grande pregio di consentire la ispezione diretta dell'organo nel suo stato di quiete o di attività. Essa rivela, cioè, gli aspetti morfologici connessi con l'attività dell'organo, ma non è riuscita finora a dare complete informazioni sui complessi aspetti dinamici di tale attività.

Riconosciuta l'insufficienza delle due tecniche considerate isolatamente, abbiamo ritenuto utile associarle integrandole e sincronizzandole in modo da costituire un metodo originale, atto a rilevare insieme gli aspetti dinamici e morfologici della motilità esofagea.

Come già ricordato, Dornhost, Pierce ed Harrison, prima di noi, hanno impiegato la tecnica radiologica come ausilio della tecnica meccanografica. Questi Autori, durante la registrazione grafica degli eventi motori esofagei, scattavano brevi serie di radiogrammi con un intervallo di mezzo secondo tra un radiogramma e l'altro. Essi potevano in tal modo seguire il cammino del pasto opaco dell'esofago e segnalare sui meccanogrammi con una certa approssimazione il momento in cui era osservata la prima comparsa del pasto opaco nello stomaco.

Da parte nostra, invece, la classica tecnica meccanografica, opportunamente affinata, è stata abbinata in sincronismo con la tecnica radiologica nella sua più moderna e progredita espressione, ossia la roentgencinematografia ⁽⁵⁾.

(2) J. W. BUTIN, A. M. OLSEN, H. J. MOERSH e Ch. F. CODE, «Gastroenterology», 23, 278 (1953).

(3) G. C. SANCHEZ, Ph. KRAMER e F. J. INGELFINGER, «Gastroenterology», 25, 321 (1953).

(4) W. B. CANNON, «Am. J. Physiol.», 19, 436 (1907).

(5) Questa tecnica è già stata descritta insieme ai primi risultati nel 58° Congresso della Società Italiana di Medicina Interna, tenuto in Roma il 5 agosto 1957. Vedi: L. TURANO, *Le Malattie all'esofago non neoplastiche*. L. Pozzi Editore, Roma.

APPARECCHIATURE. — Prima di esporre i dettagli della tecnica da noi messa a punto, riportiamo un elenco descrittivo degli strumenti ed apparecchiature da noi impiegati.

1° *Le sonde esofagee* (fig. 1). Queste sono realizzate con tubi di gomma flessibile di 4 mm. di diametro esterno, tali da poter essere introdotte agevolmente seguendo la via nasale. La sonda è provvista di tre equidistanti palloncini di sottilissima gomma scaglionati lungo un tratto di 20-26 cm (a seconda della taglia del soggetto in esame cui la sonda è destinata). Ogni palloncino comunica con l'esterno per mezzo di un tubicino di materiale plastico di 0,8 mm di diametro, ad esso saldato a perfetta tenuta e decor-

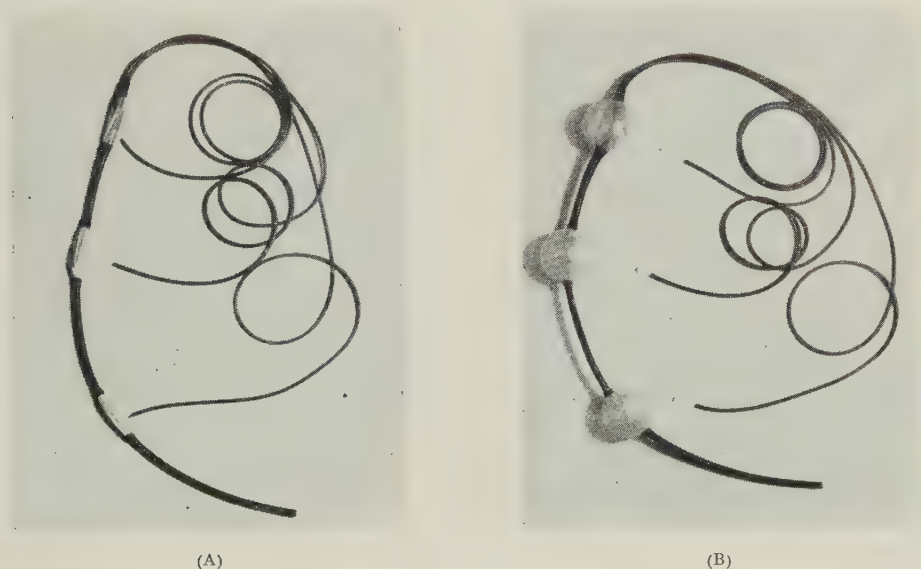


Fig. 1. — La sonda esofagea con i tre palloncini non insufflati (A) e dopo insufflazione per la prova di tenuta (B).

rente nell'interno della sonda. Ciascun palloncino ha dimensioni tali che, qualora alla pressione atmosferica venga insufflato con 5 cm³ di aria, misura 3 cm di lunghezza e 2 cm di diametro massimo. La fig. 1 mostra la sonda così come appare a seconda che i palloncini sono vuoti oppure insufflati.

Al fine di poter agevolmente determinare radiologicamente l'esatta posizione dei palloncini dell'esofago, nell'interno delle sonde, a livello di ciascun palloncino, è sistemato un frammento di filo di piombo di 1 cm di lunghezza, come repere radiopaco.

2° *Una serie di tre manometri ad acqua*, realizzati con tubi di vetro di 6 mm di diametro, di altezza sufficiente per consentire il rilievo di dislivelli pressori fino a 100 cm di acqua.

3° *Un manometro a mercurio*, montato in modo da potersi inserire nel campo roentgenicinematografico, la cui graduazione è marcata con materiale radiopaco.

4° Un *chimografo* a motore sincrono, provvisto di 6 penne scriventi su di un nastro di carta millimetrata di 23 cm di altezza.

5° Un *dispositivo elettromagnetico* che comanda la prima penna del chimografo, opportunamente inserito in un circuito elettrico, la cui chiusura è affidata allo stesso interruttore che mette in azione l'apparecchiatura roentgencinematografica, in modo che l'inizio e la fine di ogni ripresa risultino segnalati sul grafico.

6° Una *capsula esploratrice*, montata in un collare elastico, destinata a segnalare ogni atto di deglutizione.

7° Uno *pneumografo*.

8° Un apparecchio radiologico di potenza adeguata.

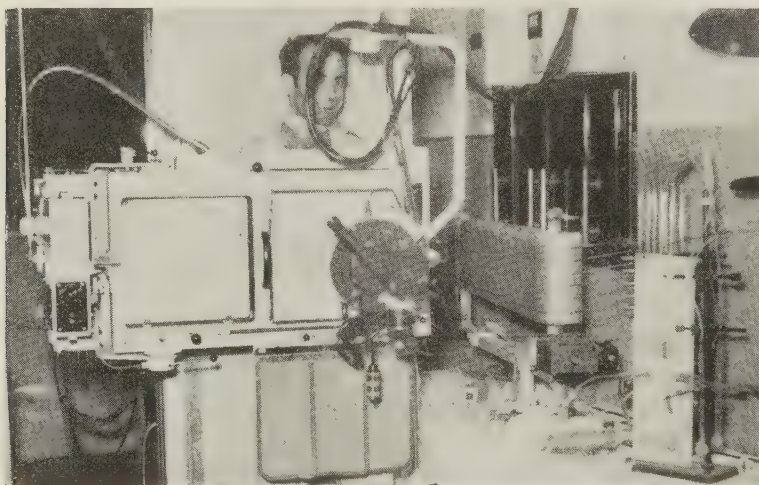


Fig. 2. - Disposizione generale per lo studio simultaneo meccanografico e roentgencinematografico della motilità esofagea.

9° Una apparecchiatura roentgencinematografica ad amplificazione elettronica con campo di 125 mm.

PROCEDIMENTO. - La fig. 2 mostra la disposizione generale per l'esperimento.

Il soggetto in esame, a digiuno da almeno 10 ore, è preparato convenientemente con una lieve anestesia del faringe, appena sufficiente a determinare l'abolizione del riflesso faringeo per il tempo necessario alla introduzione della sonda. Questa viene introdotta seguendo la via nasale fino a che il più proximale dei tre palloncini non sia penetrato nell'esofago. Il soggetto viene lasciato per 10-15 minuti a suo agio in modo da fargli superare il disagio determinato dalle manovre d'introduzione della sonda.

Si collega, quindi, con l'interruttore della macchina da ripresa roentgencinematografica il circuito nel quale è inserito il dispositivo elettromagnetico connesso con la prima penna scrivente, destinata a segnalare l'inizio e la fine della ripresa roentgencinematografica.

Mediante l'apposito collare elastico si applica al collo del soggetto, in corrispondenza della cartilagine tiroidea, la capsula esploratrice connessa con la seconda penna destinata così a segnalare nel grafico ogni atto deglutitorio.

Si provvede poi a connettere i tre tubicini, collegati con i rispettivi palloncini, ciascuno con una delle branche del corrispondente manometro ad acqua, e dopo avere opportunamente insufflato ciascun palloncino fino alla pressione di 10-12 cm di acqua, le branche libere dei tre manometri vengono connesse con le capsule registratrici, in modo che il palloncino prossimale corrisponde alla terza penna, quello medio alla quarta penna e quello distale alla quinta penna.



Fig. 3. - Controllo radiografico che documenta l'ubicazione dei tre palloncini esploratori.



Fig. 4. - Roentgencinefotogramma che dimostra l'estensione del campo in quale risalta il palloncino esploratore intraesofageo ed il manometro ad Hg con esso collegato.

La sesta penna infine viene collegata con lo pneumografo.

Dopo avere così sistemato tutte le connessioni con il sistema scrivente, l'esatta situazione nell'esofago dei tre palloncini viene controllata e corretta in scopia, nonché documentata radiograficamente (fig. 3).

La macchina da presa viene applicata al posto dello schermo dell'apparecchio radiologico e l'obbiettivo puntato sul segmento esofageo prescelto al quale corrisponderà uno dei tre palloncini della sonda. Tale palloncino, per mezzo di un raccordo laterale del tubicino corrispondente, viene connesso con il manometro a mercurio destinato a comparire nel campo roentgencinematografico accanto al tratto di esofago preso in esame. Questo dispositivo risulterà utile per l'immediata valutazione nei singoli fotogrammi (fig. 4) del rapporto tra variazioni morfologiche del profilo esofageo e contemporanee variazioni pressorie intraluminali.

Si avvia, quindi, la registrazione meccanografica e, somministrando al soggetto in esame un pasto di bario, si controlla, attraverso l'oculare della macchina da presa, che il tratto di esofago in esame ed il manometro a Hg connesso con il corrispondente palloncino siano adeguatamente centrati nel campo. Al momento voluto si avvia la ripresa roentgencinematografica, il cui inizio sarà segnalato nel grafico dalla deflessione della prima penna.

Attraverso l'oculare della macchina da presa, si continua a sorvegliare l'attività del segmento esofageo in campo, ed al momento voluto si interrompe la ripresa. L'interruzione sarà anch'essa segnalata nel grafico dal ritorno della prima penna alla posizione originaria.

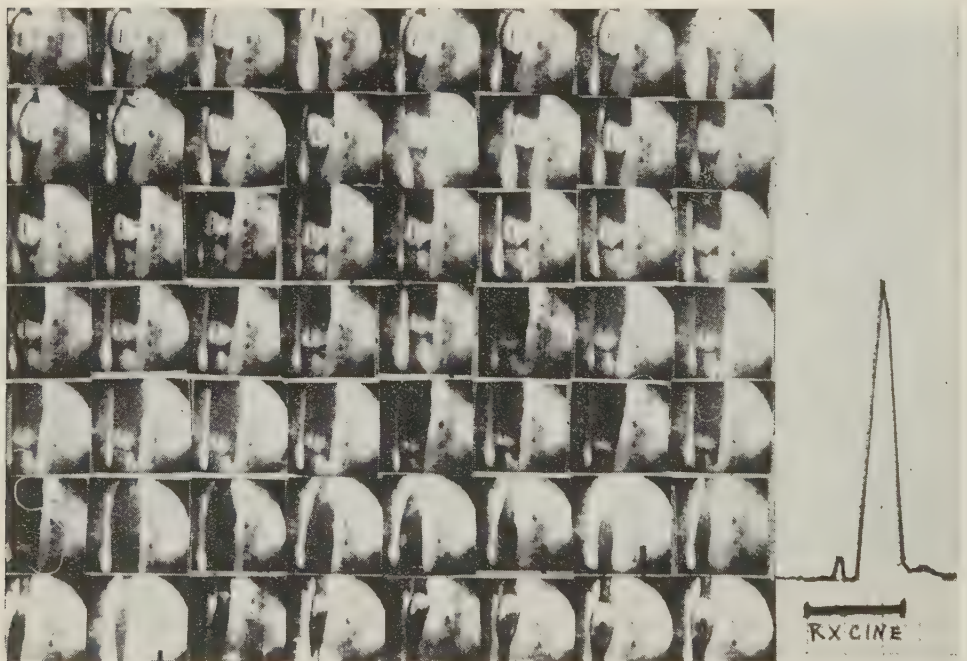


Fig. 5. - Riproduzione di un fotogramma ogni dieci, nell'ordine, di una sequenza cinematografica ripresa fra il terzo medio e il terzo inferiore dell'esofago toracico cui corrisponde il tracciato del meccanogramma riprodotto a destra.

(Si legga la serie da sinistra a destra e dall'alto in basso).

Girando il film ad una velocità di 16-18 immagini/sec., come noi abbiamo generalmente fatto, in un film di 60 m. l'attività esofagea può essere documentata cinematograficamente per una durata di 3 min. circa. Mentre la registrazione meccanografica prosegue su tre livelli esofagei contemporaneamente, la registrazione cinematografica, data la limitazione dimensionale del campo di presa, si deve eseguire in successione su ognuno dei tre segmenti.

Il metodo sopradescritto è risultato assai vantaggioso per lo studio delle funzioni motorie dell'esofago. Infatti la associazione sincronizzata delle due forme di registrazione, la meccanografica e la roentgencinematografica,

grafica, attraverso l'integrazione dei dati rispettivi, consente una più approfondita analisi degli aspetti dinamici e morfologici connessi con la motilità dell'organo in esame.

Meglio di qualsiasi argomentazione le figure 5 e 6 servono a mettere nel giusto risalto il valore analitico che al metodo deriva dalla possibilità che esso dà di riesaminare quante volte si voglia sullo schermo cinematografico e sul meccanogramma corrispondente un determinato evento funzionale dell'organo in esame.

La figura 5 dimostra infatti come l'espressione meccanografica di un evento esofageo si possa più accuratamente analizzare attraverso la sequenza delle immagini che corrispondono alle modificazioni morfologiche connesse all'evoluzione dell'evento stesso; mentre la fig. 6 dimostra come, grazie al sincronismo delle due registrazioni, sia sempre possibile rintracciare in una sequenza cinematografica l'immagine esofagea corrispondente a qualsiasi momento di un evento espresso dal meccanogramma.

Inoltre l'effetto cinematografico che si ottiene proiettando a velocità adeguata una sequenza sullo schermo, consente di rilevare eventi non apprezzabili per mezzo della sola meccanografia, sia a causa delle inevitabili inerzie del sistema di registrazione, sia per le limitazioni proprie del metodo meccanografico. Questo infatti non ha la possibilità di rilevare la pressione attuale di una distinta *sezione* del viscere, perché esso rivela invece la pressione attuale che si determina in un determinato *segmento* del viscere stesso, cioè la *risultante* delle pressioni vigenti in ciascuna delle sezioni successive che costituiscono il segmento occupato dal palloncino esploratore. Ciò espone alla

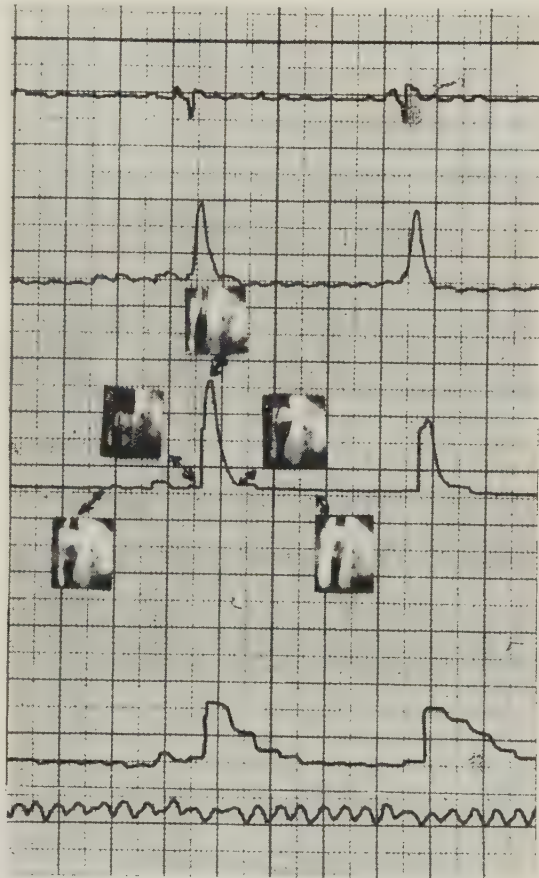


Fig. 6. — Dimostrazione della possibilità di rintracciare in una sequenza cinematografica l'immagine corrispondente a qualsiasi momento di un evento espresso dal meccanogramma. (Si osservi, nella fase precontrattile, la notevole modificazione dell'esofago, non segnalata dal meccanogramma).

difficoltà, talvolta alla impossibilità, di riconoscere l'effettiva successione degli eventi pressori che si susseguono in ciascuna sezione del segmento di viscere in esame. Probabilmente per questo motivo, con il metodo meccanografico non si riesce a dimostrare la componente inibitoria che precede l'evento contrattile di un'onda peristaltica. Inoltre, nell'interpretazione di un meccanogramma del tipo in discussione, si è soliti correlare direttamente le modificazioni pressorie del lume con lo stato di contrazione della muscolatura parietale, senza tener conto del fatto che un eventuale contenuto del viscere, può, da un segmento soprastante, pervenire nel segmento in esame ed, occupandovi spazio, modificarvi la pressione attuale in modo non corrispondente, e perfino contrario, a quello che si realizzerebbe per la sola attività cinetica della muscolatura parietale.

L'integrazione roentgencinematografica del metodo meccanografico ci ha dato la possibilità di renderci conto chiaramente di alcuni epifenomeni che, anche se prima intuitivamente ammessi, non avevano ricevuto dimostrazione adeguata.

Con il metodo da noi realizzato abbiamo intrapreso sistematiche ricerche intese a chiarire vari aspetti ancora controversi della fisiologia dell'esofago e della regione cardiaca. In tal senso abbiamo già ottenuto risultati degni di rilievo sui quali riferiremo separatamente.

Biologia. — *Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in Uccelli a prole inetta ed a prole precoce.* Nota I^(*) di GIORGIO M. BAFFONI e GIULIANA D'ANCONA, presentata^(**) dal Socio G. COTRONEI.

In precedenti osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare, compiuta da uno di noi⁽¹⁾ in un Mammifero (Gatto), è risultato che la morfogenesi del cervelletto diviene completa circa un mese dopo la nascita, quando l'animale acquista l'abilità deambulatoria e che, terminata la morfogenesi, nella corteccia cerebellare continuano a differenziarsi nuovi neuroni di Purkinje da neuroblasti dello strato granulare in rapporto con l'accrescimento somatico e per la sostituzione di neuroni fisiologicamente degeneranti.

Nell'estendere le osservazioni ad altri Vertebrati, si è voluto applicare un criterio comparativo ecologico, che nel campo della Neurologia ha fornito preziose indicazioni per la comprensione del significato funzionale dei

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma: i primi risultati sono stati oggetto di una Tesi di laurea (D'Ancona), discussa il 19 febbraio.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) G. M. BAFFONI, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser. 8^a), 16, p. 798; *ivi*, 17, p. 70; *ivi*, 17, p. 269 (1954); *ivi*, 18, p. 662 (1955); «La Ric. Sci.», 24, p. 1641 (1954); «Arch. Zool. Ital.», 41, p. 1 (1956).

centri nervosi; a questo proposito vanno ricordate le ricerche compiute sul cervelletto in Anamni ed in Rettili con diverse attitudini locomotorie (Stefanelli, 1932-1948 ⁽²⁾) e le osservazioni tra Mammiferi a prole inetta ed a prole precoce (Falcone, 1893 ⁽³⁾; Athias, 1896 ⁽⁴⁾; Olmer, 1899 ⁽⁵⁾ e recentemente Cattaneo, 1957 ⁽⁶⁾); queste ultime hanno messo in evidenza che nella prole inetta il cervelletto si presenta ad uno stadio di sviluppo arretrato, sia dal punto di vista organologico che istologico.

Volendo prendere in considerazione la morfogenesi e l'istogenesi cerebellare negli Uccelli al fine di precisare se e fino a qual punto si verificassero i fenomeni descritti nei Mammiferi, ci siamo preoccupati di stabilire un confronto tra animali a prole inetta ed a prole precoce, tenendo presente che negli Uccelli i rapporti di dipendenza dei piccoli da parte dei genitori (cure parentali), sono meno intimi che nei Mammiferi (ove anche gli animali a prole precoce hanno un periodo di allattamento). A quanto ci consta, le uniche osservazioni comparative tra Uccelli a prole inetta e precoce sono quelle di Lui (1894-96) ⁽⁷⁾, il quale si è limitato alla descrizione del cervelletto di alcuni Uccelli alla nascita (Pollo, Passero e Storno). È stato pertanto nostro proposito seguire le tappe della morfogenesi e dell'istogenesi cerebellare in un Uccello a prole precoce (Pollo di razza Livornese bianca) ed a prole inetta (Piccione di razza grossa Fattore ⁽⁸⁾); la scelta del materiale è stata motivata dalla facilità di avere con continuità le uova (dal Centro Avicolo Provinciale di Roma), di allestire allevamenti in Laboratorio e dall'essere di uno di questi animali ben noti gli stadi di sviluppo (Duval 1889 ⁽⁹⁾, Hamburger e Hamilton 1951 ⁽¹⁰⁾).

Due serie di encefali, o di cervelletti isolati, sono stati fissati in liquido di Helly e di Sanfelice, per l'esame delle modificazioni delle strutture nucleari e cromidiali nel corso del differenziamento dei singoli neuroni cerebellari; una terza serie è stata impregnata secondo il metodo Ramon y Cajal (formula III) per l'esame delle strutture neurofibrillari e dei plessi sinaptici; i pezzi sono stati inclusi in celloidina-paraffina e, orientati sul piano sagittale, sono stati sezionati in serie allo spessore più opportuno (da 5 a 12 μ di spessore) per gli intendimenti che ci eravamo proposti.

Nella presente Nota riferiremo i risultati più salienti ottenuti dall'osservazione della morfogenesi cerebellare, desunta dall'osservazione delle

(2) Ved.: AL. STEFANELLI, « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 42, p. 1 (1939); « Arch. di Fisiol. », 44, p. 49 (1944); « La Ric. Sci. », 18, Suppl. Centro di Studio per la Biologia, p. 27 (1948).

(3) C. FALCONE, *La corteccia del Cervelletto* (Napoli 1893).

(4) M. ATHIAS, « Journ. d'Anat. Physiol. » (Paris), 33, p. 372 (1896).

(5) D. OLMER, « C. R. Soc. Biol. », 51, p. 911 (1889).

(6) L. CATTANEO, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. 8^a), 23, p. 484 (1957).

(7) A. LUI, « Arch. Ital. de Biol. », 21, p. 395 (1894); « Riv. Sperim. Freniatr. Med. Leg. Al. Ment. », 22, p. 27 (1896).

(8) Ved.: A. CHIGI, *Piccioni domestici e Colombicoltura* (Roma 1950).

(9) M. DUVAL, *Atlas d'Embryologie* (Paris 1889).

(10) V. HAMBURGER e H. L. HAMILTON, « Journ. of Morphol. », 88, p. 49 (1951).

tre serie di preparati. Rimandiamo ad una Nota successiva l'esposizione dei risultati concernenti l'istogenesi dei neuroni cerebellari.

Nel Pollo, animale a prole precoce, la saldatura delle labbra romboidali e la formazione dell'abbozzo cerebellare impari dorsale si verifica a 9 giorni d'incubazione; appena avvenuta la saldatura delle labbra romboidali, inizia un notevole accrescimento in superficie della porzione extraventricolare (eversione cerebellare) e pertanto si viene a formare il ventricolo cerebellare (dilatazione dorsale del IV ventricolo encefalico); quindi nell'abbozzo dorsale, inizia la formazione di solchi cerebellari (vedi fig. 1): il primo solco è quello che separa la porzione filogeneticamente più antica del cervelletto (lobo nodulo-flocculare) da quella più recente (*corpus cerebelli*) e compare già a 9 giorni d'incubazione (*fissura postero-lateralis*)⁽¹¹⁾; a 10 giorni d'incubazione compaiono i solchi che separano il lobo anteriore da quello posteriore (*fissura prima*) e che separeranno la *pyramis* dall'*uvula* (*fissura secunda*) e dal *tuber* (*f. prae-pyramidalis*); a 11 giorni d'incubazione i solchi principali, che separano i dieci lobuli cerebellari (*folia*), sono formati ed appare il primo solco secondario (*sulcus uvularis primus*); a 12 giorni d'incubazione si accenna un secondo solco nell'*uvula* (*s. uvularis secundus*), nel *declive* (*s. declivalis*) e nel *culmen* (*fissura intraculminata secunda*); a 13 giorni d'incubazione appare un solco nella *pyramis* ed a 14 giorni un terzo solco nell'*uvula* (*sulcus uvularis tertius*); quindi i solchi continuano a svilupparsi ed a 21 giorni d'incubazione (e nel pulcino neonato) il cervelletto assume quella conformazione che conserverà nell'adulto (ved. fig. 1).

Nel Piccione la saldatura della labbra romboidali avviene poche ore più tardi che nel Pollo (al decimo giorno) ed a 12 giorni d'incubazione il cervelletto ha un aspetto simile a quello di Pollo a 10 giorni (cfr. fig. 1); nel Piccione alla nascita (dopo 18 giorni d'incubazione), però, il cervelletto presenta ancora un aspetto simile a quello di Pollo a 12 giorni d'incubazione; dopo 10 giorni dalla nascita ricorda quello di Pollo a 14 giorni d'incubazione e solo nel Piccione nato da 20 giorni il cervelletto raggiunge un grado di sviluppo comparabile con quello del pulcino appena nato, dopo 21 giorni d'incubazione (ved. fig. 1); va ricordato in proposito che solo dopo 20 giorni dalla nascita il Piccione diviene atto all'attività locomotoria.

Da questo esposto si può concludere che la morfogenesi cerebellare nel Piccione inizia quasi contemporaneamente che nel Pollo, (formazione dell'abbozzo impari dorsale), ma procede molto più lentamente e si attua in un periodo di tempo più che doppio (in 28 giorni; nel Pollo in 12 giorni); è da sottolineare il fatto che nel Piccione e nel Pollo il cervelletto raggiunge il completo sviluppo quando inizia l'attività locomotoria (pulcino neonato, piccione a 20 giorni di nascita); probabilmente in rapporto alla maggior durata della morfogenesi, nel Piccione a 20 giorni dopo la nascita il cer-

(11) Per la classificazione dei solchi e dei *folia* cerebellari ved.: O. LARSELL e D. G. WHITLOCK, « Journ. Comp. Neurol. », 97, p. 545 (1952).

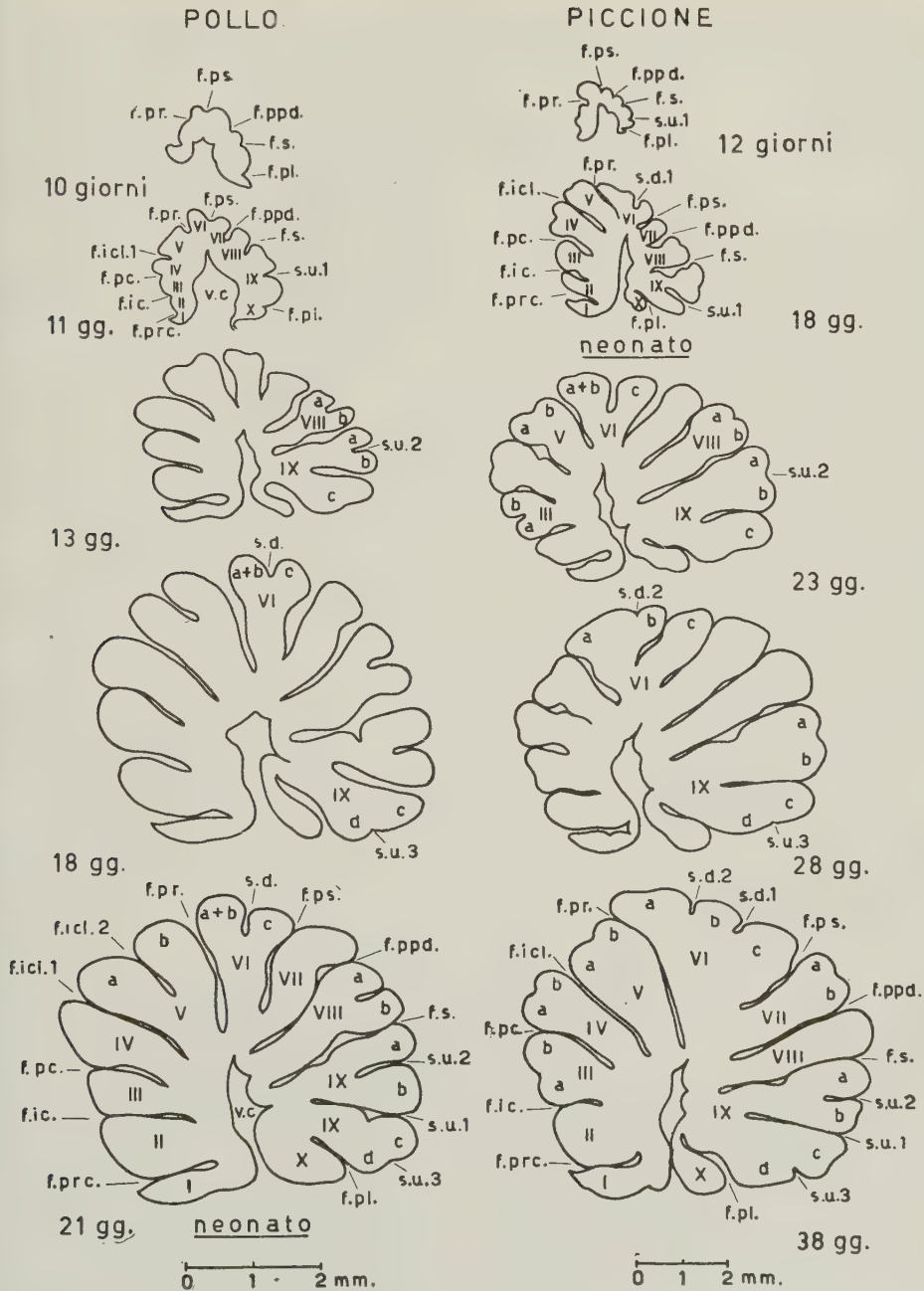


Fig. 1. - Sviluppo del cervelletto in Uccello a prole precoce (Pollo) ed a prole inetta (Piccione).

(Lingula = I, centralis = II e III, culmen = IV e V, declive = VI, folium vermis = VII a, tuber vermis = VIII b, pyramis = VIII, uvula = IX, nodulus = X).

(Disegni dei contorni di sezioni sagittali mediali eseguiti alla camera lucida).

velletto è più voluminoso rispetto a quello del Pollo al termine del periodo d'incubazione (la scala d'ingrandimento nella figura 1 è maggiore per il Piccione che per il Pollo).

Al termine della morfogenesi, tra cervelletto di Pollo e di Piccione si notano differenze di sviluppo regionali che possono essere interpretate da un punto di vista anatomo-comparativo tenendo in considerazione i risultati delle ricerche neuro-fisiologiche di Whitlock (1952)⁽¹²⁾: così il maggior sviluppo del *culmen* (IV-V) e *declive* (VI) (area di recezione delle ali), del *centralis* (III) (della coda) e del *folium + tuber vermis* (VII) (area di recezione del tratto tetto-cerebellare) nel Piccione va messo in rapporto con l'attività del volo; il relativo sviluppo del *nodulus* (X) e *uvula* (IX) e della *pyramis* (VIII) nel Pollo, invece, vanno messe in rapporto con la consistenza rispettivamente delle vie vestibolo-cerebellari e delle connessioni cocleari, espressione dell'adattamento ad una condizione più terragnola.

È noto che le matrici dei neuroni cerebellari sono due: a) l'*epitelio ventricolare*, costituito dall'epitelio germinativo delle labbra romboidali, dal quale proliferano i futuri neuroni dei centri cerebellari, di Purkinje, di Golgi (cellule polimorfe di Pensa⁽¹³⁾) ed i neuroblasti della corteccia cerebellare; e b) l'*epitelio extraventricolare*, costituito da elementi mantellari di regioni più caudali del neurasse (romboencefalo), dal quale si differenziano i *granula* e le cellule nervose dello strato molecolare (Tello 1938⁽¹⁴⁾, Baffoni 1956⁽¹⁵⁾).

Nei Mammiferi (Gatto e Ratto⁽¹⁵⁾) l'attività mitotica si estingue prima nell'epitelio ventricolare, quindi tra gli elementi proliferati da questo ed infine nell'epitelio extraventricolare⁽¹⁾. Un'analoga successione l'abbiamo verificata negli Uccelli; ma nei due animali esaminati l'esaurimento dell'attività proliferativa presenta un diverso comportamento in rapporto alla diversa durata della morfogenesi cerebellare: infatti l'attività mitotica dell'epitelio ventricolare nel Pollo è esaurita a 14 giorni d'incubazione e nel Piccione a 18 giorni; fra gli elementi proliferati dall'epitelio ventricolare le mitosi (trascurando occasionali cariocinesi presso ai vasi sanguigni) scompaiono a 18 giorni d'incubazione nel Pollo ed a 10 giorni dopo la nascita nel Piccione; nell'epitelio extraventricolare, infine, è presente nel pulcino neonato (fig. 2 A) e persiste ancora dopo 26 giorni dalla nascita del Piccione (fig. 2 B), quando l'epitelio è ridotto ad un allineamento discontinuo di una sola fila di elementi.

Ulteriori ragguagli sono emersi dall'esame della formazione degli strati della corteccia cerebellare: infatti, nel Pollo l'epitelio extraventricolare aumenta di spessore tra 7 e 13 giorni d'incubazione (da 10 a 63 μ), quindi si assottiglia, ed alla nascita è ridotto ad un sottile rivestimento costituito

(12) D. G. WHITLOCK, « Journ. Comp. Neurol. », 97, p. 567 (1952).

(13) A. PENSA, « Mem. R. Acc. Naz. Lincei » (ser. 6^a), 5, p. 23 (1931).

(14) J. F. TELLO, « Trav. Lab. Rech. Biol. Univ. Madrid », 32, p. 1 (1938).

(15) E. CAPANNA, Tesi di Laurea dell'Università di Roma (1957).

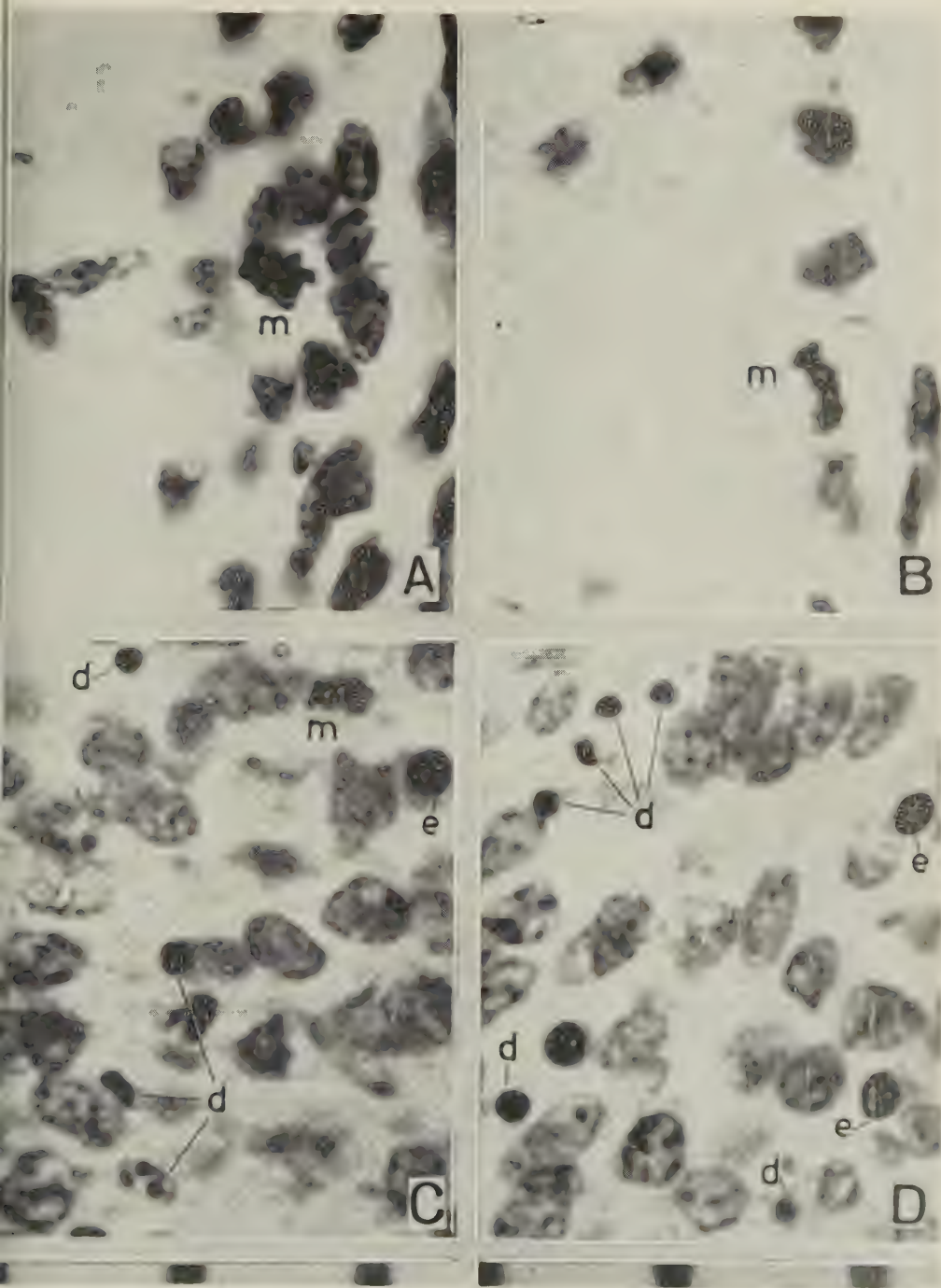


Fig. 7

attività mitotica nell'epitelio extraventricolare del Pollo alla nascita (A) e del Piccione a 26 giorni dopo la nascita (B). Episodi regenerativi in elementi dello strato granulare in corrispondenza del fondo di un solco cerebellare (*s.u. 2*) nel Pollo a 13 giorni d'incubazione (C) e nell'epitelio extraventricolare ai lati dell'apice di un *folium* (VIII) nel Pollo a 16 giorni d'incubazione. (*m* = mitosi; *d* = elementi in degenerazione; *e* = nuclei di eritrociti)

(Metodo di Feulgen; filtro a 5350 Å. Ogni intervallo delle scale in calce = 10 µ).

da 2-3 file di elementi; nel Piccione, invece, il massimo spessore dell'epitelio extraventricolare è raggiunto alla nascita (63μ), quindi decresce, raggiungendo dopo 20 giorni lo stesso aspetto che ha nel Pulcino neonato, ma persiste ancora almeno sei giorni dopo, quando di esso resta una fila di elementi, interrotta all'apice e lungo le pareti delle lamelle. La riduzione dell'epitelio extraventricolare si accompagna alla formazione dello strato molecolare: infatti nel Pollo questo si abbozza a 11 giorni, in un primo tempo si accresce lentamente (33μ a 16 giorni), ma negli ultimi giorni d'incubazione assume un notevole sviluppo (nel neonato raggiunge lo spessore di 125μ): nel Piccione lo strato molecolare compare a 12 giorni, cresce lentamente fino alla nascita (21μ di spessore) dopo di che presenta un notevole accrescimento in spessore (dopo 20 giorni 220μ e dopo 26 giorni 250μ). In base a questa relazione si potrebbe concludere che l'epitelio extraventricolare dia origine solo agli elementi dello strato molecolare; però va tenuto presente che lo strato molecolare è costituito prevalentemente dallo sviluppo dell'arborizzazione dendritica dei neuroni di Purkinje, essendo gli elementi cellulari di questo strato molto radi e numericamente inferiori a quelli dell'epitelio extraventricolare; vanno inoltre ricordate le osservazioni di Ramon y Cayal (1890)⁽¹⁶⁾, di Lugaro (1894)⁽¹⁷⁾ e di altri Autori, le quali hanno riscontrato che il differenziamento dei tipici neuroni dello strato granulare inizia in elementi che si distaccano dall'epitelio extraventricolare (o «strato dei granuli embrionali») e migrano in profondità attraversando l'allineamento delle cellule di Purkinje; pertanto l'attività dell'epitelio extraventricolare va messo in rapporto anche allo sviluppo dello strato granulare; in effetti già a 11 giorni d'incubazione nel Pollo ed a 12 giorni nel Piccione abbiamo constatato la presenza di elementi migranti tra epitelio extraventricolare e strato granulare; quest'ultimo, però, presenta un notevole accrescimento solo dopo 16 giorni d'incubazione nel Pollo (da 77μ a 135μ alla nascita) e dopo la nascita del Piccione (da 110μ a 225μ 26 giorno dopo).

Aggiungeremo infine che negli Uccelli esaminati, come è stato osservato nei Mammiferi⁽¹⁾ all'inizio della morfogenesi cerebellare, sotto alle cellule di Purkinje compaiono elementi in degenerazione: si tratta di elementi che si distinguono dagli eritrociti per la basofilia diffusa del citoplasma e per le minori dimensioni del loro nucleo, la cui cromatina si presenta ammassata e priva di struttura (picnosi) o si frantuma in sferule Feulgen-positive (carioressi); questi elementi nel Pollo sono presenti in stadî molto precoci della morfogenesi cerebellare (già a 9 giorni d'incubazione) ed in prosieguo di tempo si concentrano in corrispondenza del fondo dei solchi (fig. 2 C); scompaiono dallo strato granulare nel Pollo di 14 giorni e, dopo una fugace apparizione (al 16° giorno) in zone circoscritte dell'epitelio extraventricolare ai lati di alcune lamelle cerebellari fig. 2 D), spariscono del tutto; anche nel Piccione abbiamo osservato fenomeni simili, per quanto con minor frequenza ed evi-

(16) S. RAMON y CAJAL, «Intern. Monatschr. Anat. u. Physiol.», 7, p. 12 (1890).

(17) L. LUGARO, «Anat. Anz.», 9, p. 710; «Monit. Zool. Ital.», 5, p. 152 (1894).

denza, probabilmente a causa della maggior durata della morfogenesi cerebellare di questo animale. I fenomeni degenerativi osservati nello strato granulare in stadî precoci della morfogenesi cerebellare sono localizzati in zone nelle quali si formeranno o sono in sviluppo i solchi e pertanto si può ritenere che essi partecipino ai meccanismi morfogenetici che portano alla formazione ed all'approfondirsi dei solchi cerebellari; gli episodî degenerativi nell'epitelio extraventricolare compaiono invece ai lati dell'apice di quelle lamelle che presentano una transitoria deformazione all'inizio della loro suddivisione in lobuli secondari.

CONCLUSIONI.

Nel Pollo (Uccello a prole precoce) e nel Piccione (a prole inetta) la morfogenesi cerebellare inizia contemporaneamente, ma procede più spedita nel primo che nel secondo; a 18 giorni d'incubazione (alla nascita del Piccione) è stata riscontrata la massima dissomiglianza tra i cervelletti dei due animali; però dopo la nascita dell'Uccello a prole inetta le differenze si vanno livellando; lo sviluppo è quasi completo quando in questi inizia l'attività locomotoria (venti giorni dopo la nascita). Questo comportamento, osservato seguendo la morfogenesi dei solchi cerebellari, si riflette sull'andamento dell'attività mitotica delle due matrici dei neuroni cerebellari e sulla formazione degli strati della corteccia cerebellare. La determinazione numerica dei neuroni cerebellari proliferati dall'epitelio ventricolare avviene a stadî inoltrati della morfogenesi, quella dei neuroni che originano dall'epitelio extraventricolare è ancor più tardiva e persiste anche dopo l'acquisizione dell'abilità locomotoria (mitosi nel Pulcino neonato e nel Piccione a 26 giorni dopo la nascita). L'epitelio extraventricolare contribuisce alla formazione dei neuroni dello strato molecolare e di elementi dello strato granulare. Come nel cervelletto dei Mammiferi, anche in quello degli Uccelli presi in considerazione, sono stati osservati fenomeni degenerativi in rapporto con la formazione, lo sviluppo e le modificazioni di forma dei solchi cerebellari.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Modesto Panetti

tenuta (*) dal Socio G. ARTURO CROCCO

Il giorno successivo alla nostra seduta dell'8 febbraio, cadeva l'83^{mo} anniversario della nascita del prof. Modesto Panetti, che oggi ho l'onore di commemorare; dopo più di un anno dalla chiusura della sua operosa esistenza terrena. Già la sua vita di pensiero è stata con parole commosse ricordata dal prof. Capetti per il ramo *termodinamico* e dal nostro Socio Carlo Ferrari per il ramo *aerodinamico*. Sono le maggiori attività fra le tante che la sua mente eclettica seppe intraprendere ed approfondire in quel campo della *Meccanica applicata alle Macchine* al cui insegnamento era pervenuto giovanissimo. Abbandonando infatti, appena gli fu possibile, il suo paesello natio di Acquaviva delle Fonti in Bari, Egli era corso a laurearsi ingegnere a Torino nel 1896. L'anno successivo fu ingegnere elettrotecnico alla Scuola Galileo Ferraris; e due anni dopo dottore in matematica. Ma tre lauree non gli bastarono. E seguì studi di perfezionamento nella Meccanica: a Parigi nel 1900; a Zurigo nel 1901; a Monaco di Baviera nel 1902. Così concorse in quell'anno al posto di professore di *Meccanica Razionale ed applicata*, presso la Scuola d'Ingegneria navale di Genova; dove insegnò sino al 1910; e dove costituì un Laboratorio di Resistenza dei materiali, unico nel suo genere in Italia.

Subito dopo, il Politecnico di Torino Lo chiamava a coprire la nuova cattedra di *Meccanica applicata alle Macchine*; che Egli tenne per tutto il resto della sua vita didattica. E la tenne operosamente. Vi istituì laboratori di Meccanica, di Termodinamica, di Aerodinamica; vi promosse ricerche di trasmissione del calore ed esperimenti di Macchine motrici; vi organizzò Centri di Studi; insegnamenti nuovi; Comitati Tecnici e Termotecnici; vi plasmò e alimentò una Scuola di Ingegneria Aeronautica; e vi portò quel contributo originale di pensiero che aveva iniziato nel 1898 e che proseguì sino alle soglie del 1957.

Questa non comune attività ebbe subito il dovuto riconoscimento. Accolto nella Accademia delle Scienze di Torino fin dal 1915, ne fu Presidente dal 1938 al 1941 e nuovamente dal 1956 sino alla sua fine. Fu nostro Socio corrispondente dal 1922; Socio della Pontificia Accademia delle Scienze dal 1936; e Socio dell'Accademia Aeronautica tedesca e dell'Istituto di Scienze Aeronautiche di NewYork. Consegui nel 1935 il massimo premio scientifico italiano conferito dall'Accademia d'Italia; e nel 1942 ne fu nominato acca-

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

demico. Nel 1941 gli fu decretata la «Stella d'Oro» del Ministero della P. I. Nel 1952 fu eletto Socio dell'Accademia Nazionale dei XL; e nel 1955 gli fu conferita la medaglia d'oro di *benemerito della Scuola* dal Presidente della Repubblica.

Era stato eletto Senatore nel 1948; e nel 1953 era stato chiamato alla carica di Ministro delle Poste e Telecomunicazioni dal Presidente del Consiglio on. Pella.

Furono onori; ma furono anche oneri per una natura come quella del nostro Commemorato, giacché la fede religiosa e l'imperativo categorico morale Lo obbligava a riconoscere come guida delle sue azioni soltanto il senso del dovere. Sicché quello stesso movente che Lo impegnava nel suo compito didattico a seguire uno per uno gli studi dei suoi allievi e ad attardarsi con essi dopo le lezioni, Lo spingeva a non risparmiarsi nei suoi nuovi incarichi e nelle nuove responsabilità.

È significativo a tal proposito l'esordio della Commemorazione tenuta dal nostro socio Ferrari, suo prediletto allievo e collaboratore, nella seduta inaugurale 1957-58 dell'Accademia delle Scienze di Torino.

«Quasi un anno fa — egli dice — in questa stessa sala e in circostanze identiche a quelle attuali, inaugurandosi l'anno accademico 1956-57 io ero qui a fianco del prof. Panetti che pronunciava la Sua relazione sull'attività dell'Accademia; e con animo ammirato e commosso mi rendevo conto di un fatto che necessariamente doveva sfuggire agli altri ascoltatori: il prof. Panetti *non* leggeva quanto andava esponendo: sui fogli che aveva dinanzi c'erano soltanto pochi appunti, scritti con quella Sua calligrafia nervosa che negli ultimi tempi si era fatta un poco tremante; e sulla base di essi Egli con felice improvvisazione ma con indubbia notevole fatica di memoria e di pensiero faceva una mirabile sintesi dell'opera scientifica svolta dalle due Classi. Il prof. Panetti poco più di un mese innanzi aveva avuto un primo violento attacco del male che doveva a breve scadenza di tempo aver ragione della sua forte fibra; la crisi era stata appena superata e ragioni di prudenza avrebbero consigliato di evitare qualsiasi occasione di strapazzo mentale e fisico; ma in Lui ragioni di convenienza personale non avevano alcun peso sulla sua attività; e fu con animo lieto che volle ancora una volta adempiere a quello che Egli riteneva un Suo preciso dovere e sobbarcarsi ad una fatica resa più pesante dal breve periodo di tempo che la malattia gli aveva lasciato a disposizione».

Ed aggiunge, in fine della sua Commemorazione, ricordando l'opera del prof. Panetti come Assessore, come Senatore e come Ministro «Questa opera fu esplicata con quel medesimo spirito di dedizione al senso del dovere, con quella stessa abnegazione, con quel medesimo disinteresse della propria persona che hanno contraddistinto la Sua attività scientifica e tutta la Sua vita privata; ed io rendo omaggio alle eccelse doti del Suo animo che costituivano la fonte da cui Egli traeva la forza per dedicarsi alla Sua missione; e la ragione dell'attrazione che la Sua Persona esercitava sopra Colleghi ed Allievi. Così lavorando con serenità, pure conscio della grave infermità

che Lo aveva colpito, Egli rimase per noi Maestro di Scienza e di Costume fino all'ultimo momento ».

Certo nessuno meglio dei suoi più intimi collaboratori poteva lumeggiare questa ascetica figura.

Dice, poi, il prof. Capetti nel suo necrologio sulla rivista *Termotecnica*: «Egli fu maestro di Scienza e di Tecnica per tutti; ma per coloro che, attratti dal fascino della Sua persona, hanno lavorato con Lui, fu soprattutto maestro di Costume; un maestro i cui insegnamenti non erano costituiti da esortazioni, ammonimenti, consigli; ma dallo *esempio*. E gli esempi del prof. Panetti erano di profondità, originalità, onestà nella ricerca, di dedizione appassionata nell'insegnamento; con bando assoluto del pronome *io* quando non si trattasse di riconoscere i propri torti ». Ed aggiunge più oltre «Egli fu l'Uomo per il quale la dirittura morale e la modestia non furono parole vane ma la regola di ogni istante della Sua vita, fu l'Italiano che mise al servizio della Patria, senza esibizioni, tutta la Sua competenza; fu il Cristiano che professò la Sua fede senza ostentazione ma senza umani rispetti ».

Nella seduta commemorativa al Consiglio Comunale di Torino del quale il prof. Panetti era stato Assessore, l'Assessore in carica prof. Codegone così si esprime: «Ricordo il prof. Panetti, nell'ormai lontano 1922, nella grande aula di Via Ospedale, gremita di allievi accorsi da ogni parte d'Italia, mentre scolpiva in modo efficacissimo nella nostra mente le nozioni fondamentali dell'arte dell'ingegnere. Talora appariva in abito nero perché era giorno di Consiglio Comunale. Così Lo rivedo in questo momento: alto, diritto, severo, dominatore di una generazione di tecnici inquieta e pur generosa che di istinto nutrì per Lui, per la sua parola fascinatrice, per la sua integrità morale, una profonda ammirazione e riconoscenza, ed ora ne porta impressa nel cuore l'austera incitatrice memoria ».

Così Lo ricordo anch'io quando presiedeva il nostro Comitato d'Ingegneria al C.N.R.: sereno, attentissimo, sorridente, dimostrativo; ma nella sua obbiettività conclusiva elegantemente irremovibile.

L'attività intellettuale del prof. Panetti nel ramo «Meccanica» da Lui prescelto e per il quale è classificato nell'Annuario della nostra Accademia, fu eminentemente poliedrica.

Egli trattò si può dire tutti gli aspetti dello scibile meccanico: problemi di ponti, di motori, di caldaie, di frigoriferi, di biellismi, di teleferiche; problemi di Termodinamica, di Fluidodinamica, di Elasticità, di Scienza delle Costruzioni.

Questi problemi occuparono tutta la Sua mente indagatrice e commentatrice per i primi vent'anni della sua carriera. Poi venne l'Aeronautica a dominare le Sue indagini e ad occupare una buona metà della Sua mente, sicché rimase solo l'altra metà per la Meccanica generale. E così nell'elenco delle Sue pubblicazioni, che superano il centinaio, quasi sessanta appartengono alla Scienza meccanica in generale; fino all'ultima del 1957 sugli Scam-

biatori di calore; scritta mentre già era infermo; e pubblicata come postuma dall'Accademia delle Scienze di Torino, dopo la Sua fine.

Questa mentalità poliedrica del prof. Panetti, per altro quasi necessaria in altre Scienze a causa della continua specializzazione, ha tuttavia nei Suoi scritti un carattere di eccezionalità che voglio sottolineare. Questo carattere mi è apparso leggendo alcune Sue Note, pubblicate negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino. Il poliedro mentale di questo singolare espositore presenta infatti, se mi si concede l'analogia, tre facce predominanti; o, per uscir di figura, tre aspetti interdipendenti di ogni problema che egli considera. Sono l'aspetto *teorico*; l'aspetto *sperimentale* e l'aspetto *tecnico*; che, affrontati in unica trattazione, definiscono lo stile personale delle Sue ricerche. L'aspetto sperimentale viene allora a convalidare, a completare o a correggere l'indagine puramente matematica e la porta subito nel campo della realtà fisica; mentre l'aspetto tecnico viene a guidare teoria ed esperimento verso la realtà costruttiva; sicché l'esperimento stesso rimane incastrato, o meglio ideoguidato, tra un punto di partenza ed un punto di arrivo.

È evidente che questo metodo divenga improduttivo quando il progresso tecnico abbia già raggiunto una forma stabile o come si suol dire consolidata; ma è invece chiaro che il metodo si adegui anzi risulti, dirò così, *provocante* quando si tratta di progresso in cammino. Il prof. Panetti lo seguì infatti con molta abilità in alcune questioni di Meccanica generale; ma ne fece uno strumento prezioso in Aeronautica; sia nelle ricerche che nei commenti espositivi.

Il prof. Panetti aggiunse poi a questo suo stile di ricerca uno speciale *utensile di lavoro*: la trattazione geometrica. Egli seppe scalpellare con questo utensile tutti i problemi che si mostravano ribelli ad agevoli soluzioni algebriche. La geometria ha il grande vantaggio di lasciar traccia visibile del procedimento nella soluzione finale; mentre l'algebra non può includere nella formula risolutiva i passaggi matematici che l'hanno fornita.

Così Panetti fin dal 1900 risolse il problema delle *Vibrazioni trasversali di una trave elastica*. Partendo dal celebre problema di Saint Venant sul prisma inflesso, che trascura gli sforzi di taglio, Egli abilmente li introduce nella propria trattazione e perviene ad espressioni non semplici ma calcolabili graficamente. Ed in una elegante tavola illustrativa, da Lui ideata e personalmente disegnata, dimostra come l'influenza degli sforzi di taglio sia maggiore di quella ben nota nei problemi della Statica. Alcuni anni dopo (1908) ritorna sullo stesso problema ed elimina i dubbi avanzati nel frattempo dal matematico Almansi nei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

Nel 1902 Panetti tratta il problema termico del *Ciclo teorico e Ciclo pratico delle locomotive compound* e ne illustra le conclusioni in una eloquente tavola grafica di Lui concepita, disegnata e firmata. Nel 1909 affronta coi suoi metodi il problema del *Modulo di elasticità a trazione delle funi metalliche*; interessante i nostri aerostati militari ed il nostro dirigibile a sospen-

sione funicolare. E poi rivolge i suoi metodi indagatori alla *Teoria dei freni di attrito* (1909); al *Calcolo delle molle discoidali* (1910); ai *Calcoli delle costruzioni stabili ad azioni sismiche* (1913); al *Problema dinamico dei rotismi epicycloidal* (1916); allo *Studio sperimentale delle trasmissioni con cinghie* (1917); allo *Attrito cinetico nelle macchine* (1923) ed a numerosi altri problemi che interessano la Scienza e l'arte dell'Ingegneria sotto i tre aspetti della teoria, dell'esperienza e della tecnica. E vi usa quasi sempre, appena può, il suo utensile di lavoro della geometria; come nelle *Costruzioni geometriche del fuoco di un biplano e dell'ala equivalente*; che è una delle più caratteristiche contribuzioni allo sviluppo della Scienza Aerodinamica, ancora giovanetta.

E così mi esprimo perché, entrando nel campo dell'Aeronautica la cui Storia si delineò e prese consistenza durante la miglior vita intellettuale del nostro Commemorato, io vengo ora a segnalare una delle più imprevedibili singolarità dell'Aeronautica. Oggi l'Aeronautica è Scienza, Esperimento e Tecnica; e Panetti seppe contribuire al suo progresso secondo queste sudolate caratteristiche della di Lui personalità; ma sta di fatto che l'aspetto scientifico, in questo brillante ramo delle conquiste umane, tardò a trovare il suo crisma definitivo; e che l'arte del volo si svolse a lungo *empiricamente*.

Quando infatti nel lontano dicembre del 1903 i fratelli Wright lanciarono al disopra del suolo contro vento e per circa duecentocinquanta metri il primo aeroplano motorizzato e pilotato, l'Aerodinamica, fondamento scientifico del volo, era appena una neonata; e si può dire che fosse ancora adolescente quando Lindberg, ventiquattro anni dopo, attraversò per primo l'oceano atlantico. Panetti prese la neonata sotto tutela e la accompagnò fino alla sua completa maturità; ma per vent'anni il fondamento scientifico della locomozione aerea formò un *capitolo a parte* del Suo insegnamento; e soltanto Esperimento e Tecnica furono i pilastri sui quali poté edificare lo sviluppo dell'Ingegneria Aeronautica al Politecnico di Torino.

Egli creò quindi nella sua Scuola, come già accennato, un grande Laboratorio sperimentale con una sezione aerodinamica ed una motoristica; e si valse delle sue singolari abilità tecniche per concepire, disegnare e far costruire tutti i congegni funzionali e strumentali occorrenti alla sperimentazione. Egli diè vita in particolare a una cosiddetta *galleria del vento* che fu la quarta nel mondo a dare ai costruttori *metodici risultati*; accanto a quella di Eiffel a Parigi, di Prandtl a Gottinga e di Stanton a Londra. Col suo intuito sperimentale seppe precisare le modalità occorrenti a dedurre le caratteristiche aerodinamiche di *ali isolate di aeroplano* e di *fusoliere* dai loro *modelli in scala ridotta*; nonché ad anticipare da modelli completi in scala ridotta le caratteristiche di volo di costruendi aeroplani in vera grandezza.

A queste deduzioni da *modelli fissi* in galleria volle poi aggiungere le deduzioni da *modelli mobili*, come sono i modelli di eliche ruotanti nella corrente del vento; che si presentano più laboriose. Ma, curandone personalmente il prospetto nella sua chiara visione tecnica, Egli seppe concepire e disegnare una *bilancia universale per le eliche*; nella quale introdusse la misura torsionometrica della coppia di forze generata dalle pale in rotazione,

che permette di ottenere direttamente il *rendimento dell'elica* dal confronto simultaneo col *momento* registrato dal braccio trasversale della bilancia.

Questa attività del Laboratorio di Torino fu da Panetti organizzata e compiuta con tale metodo e rigore sperimentale che essa poté andare incontro ai bisogni delle nascenti Industrie Aeronautiche italiane fino a divenire quasi un complemento indispensabile alla loro Sala di disegno. I progettisti ebbero infatti sott'occhio le future caratteristiche di volo delle progettate costruzioni prima di realizzarle; e di affidarle, trepidanti, al pilota collaudatore.

E li ebbero sempre aggiornati col progresso aerodinamico; al quale Panetti andava continuamente uniformando le leggi stesse della similitudine modellistica che costituivano la ragion d'essere del suo Laboratorio. Tanto più che a presiedere questa attività Egli aveva destinato il suo prediletto allievo Carlo Ferrari; il quale divenne presto uno dei migliori aerodinamici del Mondo.

Migliaia di esperimenti su centinaia di modelli a scala ridotta furono così elaborati su richiesta di privati ed industriali; ai quali furono presentati i risultati con pronta ed accurata diagrammazione; ed io stesso, da Roma, ricorsi spesso personalmente, per mie ideazioni, all'insuperabile Laboratorio di Torino.

Sicché questo Laboratorio ebbe lunga vita, quasi sino alla seconda guerra mondiale; ed i Rendiconti che ne riassumono i risultati in bella veste e con accurate illustrazioni, offrono oggi una documentata testimonianza della geniale operosità del Suo creatore.

Intanto la nuova Scienza, che si chiamò Aerodinamica, era venuta ad inserirsi gradatamente nell'Arte del volo.

Nel 1903 l'Arte del volo era sorta, si può dire senza licenza: cioè senza giustificazione scientifica. La Fluidodinamica di quel tempo, retaggio del secolo precedente, non poteva dimostrare la possibilità del volo aereo. Le trattazioni di quella dinamica erano essenzialmente basate sul concetto di *fluido ideale*, cioè senza viscosità; e questa ipotesi limite non poteva, di per sé stessa, condurre alla nascita di forze in un corpo in moto.

Per verità storica la licenza giustificativa era già in corso da alcuni anni, ma tardava a concretarsi, diremo così in carta bollata, per le grandi difficoltà che si incontrano quando s'introduce la viscosità nella Dinamica dei fluidi.

Scrive Panetti nell'Enciclopedia Treccani alla voce «Aerodinamica», che egli tratta con magistrale concisione: «non si prevedeva quanto complesso intricato e difficile fosse il problema e quali ostacoli ancora insormontabili si opponessero alla teorizzazione del meccanismo della resistenza al moto nei fluidi». E più oltre osserva che questa teorizzazione diviene ancora più ardua quando al meccanismo della resistenza si aggiunge quello della *sostentazione*; cioè della cosiddetta *portanza* alare. Sicché si cercava allora *il segreto dell'ala*; si copiavano le ali degli uccelli; si osservava la eccezionale

apertura delle ali nei grandi uccelli volatori; si analizzava il decorso dell'aria attorno ai corpi nelle gallerie del vento. Ascoltate ora come Panetti descrive, nell'Enciclopedia, il nascere della resistenza di forma, quale si deduce dalle Sue esperienze in *fluido reale*: « Rendiamo visibile - egli dice - con una sostanza fumogena (tetracloruro di carbonio) la corrente intorno ad una piastra piana, esposta normalmente. Le particelle, rese visibili, scivolano avanti alla lastra e sfuggono per la zona periferica. Il fluido si stacca al contorno; ed alcune particelle sono trascinate in moto turbinoso dietro alla lastra, formando vortici che a brevi periodi si creano, si allontanano e spariscono.

« Intanto col metodo manometrico seguiamo le pressioni; e registriamo una *sovrappressione* dinamica sulla faccia anteriore, decrescente sino ai bordi; e una *depressione*, o vuoto relativo, sulla faccia posteriore ».

Così non solo si giustifica, prosegue Panetti, la forza che nasce in regime vorticoso; ma se ne può misurare l'*andamento con la velocità* a partire dal regime idraulico fino a quello balistico. Nascono appunto da questa insorgenza di vortici nei fluidi *reali* le complessità e le difficoltà che ritardarono la nascita della Scienza Aerodinamica.

Primo a concepirne il fondamento era stato l'ingegnere inglese Lan- chester; il quale ne aveva presentato una interessante trattazione sin dal 1894 alla Royal Society di Londra; ma quell'Accademia dopo lungo esame l'aveva respinta perché mancava di formule matematiche. Poi, nel 1902, il tedesco Kutta aveva pubblicato una Nota matematica sullo stesso concetto dimostrando che la sovrapposizione di una corrente traslatoria con una corrente rotatoria, che egli chiamò *circuitazione*, conduce alla nascita della *forza portante* alare. Fu però soltanto nel 1909 che Joukowsky in Russia dimostrò l'intima connessione tra circuitazione e portanza nel moto di un'ala nell'aria. Sicché, pochi anni dopo, quando questa dimostrazione si diffuse nel mondo degli studiosi, fu universalmente nota come *Teorema di Kutta-Joukowsky*. Vennero poi a completare la dimostrazione Prandtl e Kármán. Il primo con la concezione dello *strato limite* in fluido viscoso; il secondo con quella della scia a *vortici alternati*.

E così la teoria fu perfetta; e Panetti la introdusse subito con estrema eleganza nel Suo insegnamento alla Scuola di Aeronautica. Dico estrema eleganza non per laudativo retorico; ma per precisare una virtù concreta della esposizione. Perché la « formula », necessaria alla condensazione del linguaggio matematico, è, essa stessa, un *ragionamento condensato* del linguaggio comune. E tutto il primo trattato di Panetti, modestamente presentato in veste litografica e che riassume le Sue lezioni, è un seguito di abili ragionamenti condensati dai quali emerge la conclusione matematica senza fatica dell'ascoltatore.

Si leggano in proposito i numeri del capitolo *Aerodinamica* di quel Trattato; dal settimo all'undicesimo. E si considerino inoltre i numeri del capitolo « Struttura e teoria dell'elica », dall'82^{mo} allo 87^{mo}, dove per la prima volta se ne introduce nell'insegnamento la complessa trattazione *vorticale*; dopo

averne precisato la geometria con rappresentazioni, quasi plastiche, personalmente disegnate dall'autore.

Qui vi citerò in fede un esempio di ragionamento condensato, tutto in linguaggio comune, contenuto nel suo discorso inaugurale dell'anno accademico del 1927; poco dopo il volo di Lindberg.

«Eseguiamo – Egli dice – rapidamente l'analisi del meccanismo mirabile dell'ala.

«Mentre essa penetra nell'aria ambiente, questa le viene incontro in moto relativo; e, poiché la sorregge, sebbene carica del peso dell'aeromobile, dobbiamo dedurne che la preme sulla faccia inferiore assai più energicamente che su quella superiore.

«Ne discende, per il principio di conservazione dell'energia nei moti fluidi, che la corrente bipartita dell'ala deve correre lungo la faccia inferiore più lentamente che al disopra del suo dorso; e subito si intuisce che l'azione portante sarà tanto più energica quanto più accentuata è la curvatura del profilo alare; poiché l'azione *centrifuga* della massa fluida scorrente sul dorso genererà una *cavitazione* atta a sorreggerla. Si comprende pure che l'azione portante dovrà concentrarsi verso l'orlo anteriore dove curvatura e cavitazione sono più accentuate».

«Ora la suddivisione asimmetrica della corrente che investe l'ala – continua Panetti – si può ottenere con un artificio geometrico, sovrapponendo due movimenti distinti: l'uno nel quale la corrente *uniforme* del moto dell'aria *relativo all'ala* rimane inalterata: l'altro consistente in un moto *circolatorio* intorno ad essa. Questo secondo movimento è diretto contro il primo sotto l'ala e nello stesso senso al disopra di essa, sicché inferiormente le velocità si sottraggono, superiormente si sommano. La dissimetria del flusso, che è la causa della forza portante, è dovuta dunque a questa corrente circolatoria (detta *circuitazione*) e cresce con la sua intensità». Egli esamina, subito dopo, le modalità della circuitazione e dimostra concisamente che questa è una quantità costante alla quale risulta proporzionale la portanza alare. È questa la base del teorema di Kutta-Joukowski. «Ma tale ragionamento – continua l'Espositore – non risolve ancora l'arduo problema. Anzi la generazione stessa del moto circolatorio sembra contraddire al principio di Helmholtz secondo il quale un moto siffatto, in seno ad un fluido scorrevole, non può nascere senza causa; né senza causa dissolversi, ove sia stato prodotto. Appare quindi che la capacità portante di un'ala, la quale pure si spiega coi movimenti di masse d'aria cospicue ed obbedienti alle leggi dei fluidi *perfetti*, non si produrrebbe se non esistesse una direi quasi *imperfezione* fisica del fluido dalla quale viene eccitata la viscosità interna e la aderenza alle pareti che esso fluido lambisce.» «A contatto delle superficie dell'ala sfiorata dall'aria nasce così per viscosità e aderenza uno strato sottilissimo, sede di moti rotazionali derivanti dal fatto che le particelle d'aria aderenti all'ala sono ferme rispetto ad essa e quelle via via più lontane hanno velocità relative crescenti; onde si genera uno *scorrimento* energico della materia fluida in prossimità delle superfici alari e quindi un moto *vorticoso*;

il quale una volta prodotto si conserva nelle falde fluenti anche dopo il distacco finale dal bordo posteriore dell'ala, nella corrente turbolenta che costituisce la *scia* ».

Avete, credo tutti, riconosciuto in questa abile pittura senza formule il citato *strato limite* di Prandtl!

Ma si era ancora in aviazione subsonica con propulsione ad elica e motori alternativi. La barriera del suono non era stata affrontata né tanto meno scavalcata. L'aviazione supersonica rimaneva ancora nel vaglio della teoria.

Fu nel 1935 che si riunì a Roma il *Convegno Volta*, qui presso, alla Farnesina; e Panetti fu relatore generale sul tema: *Problemi della Tecnica sperimentale delle alte velocità*. Egli aveva allora sessanta anni ed era nel pieno vigore mentale delle sue ricerche scientifiche e delle sue qualità espositive. E così ci analizzò e sintetizzò in quel congresso, al quale erano intervenuti aerodinamici di tutto il Mondo, le varie difficoltà delle misure transoniche e supersoniche a partire dai metodi più semplici sino a quelli interferenziali e fotometrici.

Negli anni successivi si unì anch'Egli ai novatori colle Sue trattazioni teoriche e le Sue attuazioni tecniche; e fra pubblicazioni di meccanica generale e di termotecnica, seppe inserire discussioni sui nuovi orientamenti della Meccanica del volo; dei turboreattori; delle gallerie aerodinamiche surcomprese; dei compressori assiali; dei modelli nelle macchine a fluido; e della propulsione a reazione.

In ognuno di questi nuovi problemi di attualità, ove ormai lavorano e producono migliaia di specialisti, Egli seppe portare lo stile dei suoi ragionamenti condensati ed il fascino della sua parola.

« Oggi - diceva nel 1951 all'inaugurazione dell'anno accademico alla Scuola Aeronautica di Nisida - oggi il razzo totalizza in Aviazione l'effetto di *scappamento* dei motori che già si era adoperato come ausilio dei propulsori ad elica. La capsula da cui sfuggono i gas di scappamento del razzo viene spinta in avanti come la bocca da fuoco quando rincula. Ma lo scappamento è potenziato dal calore della combustione e la velocità di scarico cresce soltanto con la radice quadrata della temperatura. E questa è di fatto la formula della velocità limite ».

« Il razzo è per l'Aviazione militare oggetto attento di studio; mentre già si propone la meta ambiziosa di muovere i primi passi verso i viaggi interplanetari creando, con sistemi in serie, la possibilità di portare gli strumenti umani fuori della attrazione terrestre o almeno dove la centrifugazione di una traiettoria in orbita chiusa nel vuoto possa permanentemente equilibrarlo ».

Così prevede anch'Egli, quando pochissimi ancora vi credevano, gli odierni satelliti artificiali. E seppe farlo in un tornito giro di frase che è tutto un programma: e dimostra ancora una volta le Sue qualità di pensatore e di espositore.

Illustri Ascoltatori e Colleghi!

L'opera di pensiero e di azione del prof. Modesto Panetti si è svolta con diuturna costanza per oltre 55 anni.

Più di cento monografie come ho detto e numerose creazioni sperimentali rivelano del Suo pensiero i punti *singolari*; cioè quelli dove la Sua mente veniva a rischiarare di *luce propria* alcuni complessi problemi; mentre i Trattati e le testimonianze di allievi e collaboratori segnalano, nella Sua opera, l'eccezionale coloritura della *luce riflessa* che Egli trasmetteva col suo insegnamento. Sapeva addomesticare le formule, spianare le idee, guidarle alle conclusioni; ed il suo commento si seguiva, si comprendeva, si assimilava. Sapeva soprattutto intessere coi suoi allievi e collaboratori umanità di pensiero, di altruismo, di costume e di autodisciplina.

Venuto a mancare alla nostra Accademia or è più di un anno, il suo posto è stato coperto da un socio corrispondente; al cui posto è subentrato in Accademia un socio corrispondente di più fresca età. Sono le leggi statutarie del *numero chiuso*.

Ma fuori della nostra Accademia, quando una Eminente Figura della Scienza, che è stata parte, Essa stessa, del suo divenire, viene a sfuggire dall'orlo della vita; diecine di giovani studiosi, che ne hanno assorbito l'evoluzione e che faranno parte del nuovo divenire, sono già entrate in campo senza limitazione di numero.

Ad essi io mi rivolgo indirettamente nel chiudere la commemorazione che ho avuto l'onore di svolgere; e ad essi mi si consenta di segnalare questo non comune modello di scienziato, di sperimentatore, di tecnico e di insegnante.

Perché la nuova generazione attraversa un momento di desuetudine dal lavoro mentale, che rischia di affievolire il potenziale scientifico del nostro Paese; e spetta ai nuovi educatori con l'incitamento e con l'esempio di ricondurla al culto del pensiero di cui ormai è intessuta la Storia di tutti i popoli.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente comunica che all'Accademia è pervenuta indirettamente la notizia della morte del prof. Robert Andrews Millikan, Socio Straniero della Categoria III (Fisica, Chimica e Applicazioni) e invia un pensiero di reverente omaggio alla Sua memoria.

Dà quindi la parola al Socio Gaetano A. Crocco che commemora il compianto Collega prof. Modesto Panetti.

Alla commemorazione assistono i familiari del prof. Panetti, il Senatore Ciasca, per il Senato della Repubblica; il Socio Perucca, Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, in rappresentanza dell'Accademia stessa e del Rettore di quel Politecnico prof. Capetti; il Socio Dore, quale

delegato della Facoltà d'Ingegneria dell'Università di Bologna e il dott. ing. Cuttica, Presidente del Comitato Termotecnico Italiano, anche in rappresentanza del prof. Carlevaro, Presidente Generale dell'Associazione Termotecnica Italiana.

Numerose le adesioni pervenute, tra le quali un messaggio dell'on. Mattarella, Ministro delle Poste e Telecomunicazioni.

Il Presidente, dopo aver ringraziato il Collega Crocco per la sua commossa ed elevata orazione, rinnova ai familiari del Socio Panetti l'espressione del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa del valoroso scienziato ed insigne Maestro.

Il prof. Giordani, dopo aver ricordato che nei mesi di maggio e di giugno i Colleghi Picone e Carrelli commemoreranno rispettivamente i Soci Ascoli e Vallauri, comunica che nelle prime tre adunanze del nuovo anno accademico, e cioè nei mesi di novembre e dicembre 1958 e gennaio 1959, avranno luogo, nell'ordine, le commemorazioni dei Soci Quagliariello, Majorana e Silva, a cura dei Colleghi Rossi Fanelli, Perucca e Zagar.

Circa la commemorazione del Socio Lombardi, la Classe ritiene opportuno rinviare la designazione dell'oratore al nuovo anno accademico.

Il Presidente ricorda poi che il compianto Socio U. Amaldi ha espresso, tra i suoi ultimi desideri, quello di non essere commemorato ed è d'avviso che la Classe debba senz'altro inchinarsi innanzi alla volontà dell'illustre Collega. D'altra parte, il Presidente è anche convinto che l'Accademia non possa e non debba rinunciare almeno ad un necrologio che contenga indicazioni sull'opera scientifica e notizie sull'attività e sulla vita del defunto, notizie queste che possono indubbiamente essere assai utili per la storia della scienza.

Dopo una breve discussione, alla quale partecipano i Soci Perucca, Chisini, Segre e Signorini, la Classe, associandosi alla proposta del Presidente, decide che del prof. Ugo Amaldi non si debba tenere una commemorazione ufficiale ma soltanto pubblicare un necrologio negli Atti e dà mandato alla Presidenza di designare il Socio cui dovrà essere conferito tale incarico.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge un cordiale saluto al prof. Strubecker, del Politecnico di Karlsruhe, e alla signora V. Iyengar, dell'Università di New Dehli, che sono presenti all'Adunanza.

Il prof. Giordani presenta il fascicolo dei Rendiconti del mese di febbraio ed è lieto di annunciare che, grazie alla solerte collaborazione dei Segretari Accademici, è quasi ultimata la stampa di quello di marzo. Ritiene pertanto che, nel prossimo avvenire, si possa presentare, in ogni singola adunanza, il fascicolo della seduta precedente, riprendendo così quel ritmo voluto dal compianto Presidente Castelnovo.

Il Presidente comunica che, con legge 30 ottobre 1940, n. 1689, venne istituito in Roma l'Istituto Nazionale di Entomologia pura ed applicata sotto la vigilanza dell'allora Ministero dell'Educazione Nazionale e che l'art. 2 della citata Legge prevedeva la nomina presso l'Istituto di un Consiglio Direttivo di otto membri, dei quali uno doveva essere designato dall'Accademia d'Italia. L'Istituto è stato retto fino ad oggi dall'amministrazione commissariale ma, ora, il Ministero della Pubblica Istruzione è venuto nella determinazione di procedere alla nomina del predetto Consiglio Direttivo e ha invitato la Presidenza dell'Accademia a designare il nome del suo rappresentante.

Il Presidente propone, e la Classe approva all'unanimità, di affidare tale incarico al Socio Grandi.

Il prof. Giordani informa quindi i Colleghi che la «Société de Chimie Physique» celebrerà a Parigi, il 31 maggio p. v., il cinquantenario della sua fondazione e che, dal 23 giugno al 1° agosto c. a., si svolgerà, presso, l'«École Nationale des Sciences Géographiques» di Saint-Mandé, un ciclo d'insegnamento complementare teorico e pratico di fotogrammetria aerea.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Picone presenta e illustra l'opera «Memoirs of the unifying study of the basic problems in Engineering sciences by means of geometry», pubblicata dall'Associazione per le Ricerche di Geometria Applicata, di Tokio, con le seguenti parole:

«All'Università di Tokio, in seno alla Facoltà d'Ingegneria, si è costituita un'Associazione di professori della Facoltà stessa che ha preso il nome di *Associazione per le ricerche di Geometria applicata* la quale ha per obiettivo lo studio dei problemi fondamentali della Scienza dell'ingegnere, applicando la Geometria nella sua più moderna accezione.

«Questa Associazione, composta di 16 professori di detta Facoltà e presieduta dall'Ing. Kazuo Kondo, professore di Matematica applicata nella Facoltà stessa, ha pubblicato un primo poderoso volume, nel quale sono raccolti i lavori compiuti dai suoi membri dal 1951 al 1954.

«Io ho l'onore di presentare questo volume inviato in omaggio all'Accademia, dal prof. Kondo.

«Nelle memorie costituenti il volume, dedicato allo studio dei fenomeni dell'elettro-magnetismo, dell'elasticità e plasticità dei solidi, sono applicate la Geometria proiettiva, la Geometria differenziale degli spazi curvi, la Topologia, la Teoria della connessione, l'Algebra lineare, la Teoria dei gruppi continui e discontinui, l'Analisi tensoriale, l'Analisi funzionale, nonché il Calcolo differenziale di Ricci-Curbastro.

«È un volume del più alto interesse scientifico, che i matematici non possono non considerare con compiacimento».

Il Socio Bompiani presenta un volume appartenente al 1° ciclo del Centro Internazionale Matematico Estivo (Varenna - Villa Monastero - 21-30 maggio 1957) dal titolo « Geometria aritmetica e algebrica », contenente un corso del prof. L. Roth e una conferenza del Collega Segre.

Presenta poi un altro volume, del prof. Strubecker, intitolato « Casi limiti di geometrie non-euclidee », edito dall'Istituto Matematico dell'Università di Roma.

Il Presidente ringrazia i Colleghi Picone e Bompiani.

Il Segretario Accademico presenta le opere pervenute in omaggio alla Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Perucca, per conto del Collega Deaglio, Meneghetti, Pensa, Cambi, Picone, Segre, Cotronei, Caglioti, Montalenti, Armellini, E. Bompiani e G. Bompiani.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

AGUDO F.R.D. e WOLF F. - Propriétés spectrales des équations différentielles non - autoadjointes (pres. dal Socio M. PICONE).

BENEDETTI E. L. - Sulla struttura del mesangio di Zimmerman indagata mediante il microscopio elettronico (pres. dal Corrisp. G. BOMPIANI).

BIORCI G., FERRO A. e MONTALENTI G. - Instabilità delle pareti di Bloch dovuta ad atomi interstiziali in un materiale ferromagnetico con struttura cubica a corpo centrato (pres. dal Corrisp. R. DEAGLIO).

CATTANEO L. - Connessioni estrasinaptiche dei granuli del cervelletto in mammiferi (pres. dal Socio A. PENSA).

GIANNUZZI M. A. - Determinazione della densità delle componenti di un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

GRAIFF F. - Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite. Nota II (pres. dal Corrisp. B. FINZI).

GRAZIADEI P. - Contributo alla conoscenza delle connessioni interneuroniche nel ganglio stellato di *Sepia officinalis* (pres. dal Socio A. PENSA).

GROSS W. - Sul calcolo del massimo modulo delle radici dell'equazione caratteristica di una matrice (pres. dal Socio M. PICONE).

GUY R. - Sur la dérivation covariante des spineurs (pres. dal Socio E. BOMPIANI).

PUCCI C. e WEINSTEIN A. - Sull'equazione del calore con dati subarmonici e sue generalizzazioni (pres. dal Socio M. PICONE).

SEGRE S. - Un modello della struttura interna di Algol A. Nota II (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

TURANO L., CURATOLO A. e SALMONI E. — Ricerche sulla motilità dell'esofago umano. Nota II. L'attività cardiaca in rapporto alla motilità esofagea (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

VESENTINI E. — Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta. Nota II (pres. dal Socio B. SEGRE).

VITAGLIANO TADINI G. — Il probabile significato biologico della monogenia (pres. dal Corrisp. G. MONTALENTI).

CONGRESSI

Il Presidente dà notizia del IX Congresso Internazionale di Botanica, che si terrà a Montreal, dal 19 al 29 agosto 1959, e della 2ª Conferenza Mondiale d'Ingegneria dei Terremoti, che avrà luogo a Tokyo nel luglio del 1960.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 19 aprile 1958

BATH Markus. — *Shadow Zones, Travel Times, and Energies of Longitudinal Seismic Waves in the Presence of an Asthenosphere Low-Velocity Layer*. Estr. da «Transactions of the American Geophysical Union», vol. XXXVIII, 1957.

BOAGA Giovanni. — *Attività dell'Istituto di Geodesia e Topografia della Facoltà di Ingegneria di Roma dall'ottobre 1942 all'ottobre 1957*. Roma, Tip. Pio X, 1957. Pp. 50, in-8°.

BOEV S. N. — *Legočnye nematody kopytnyh životnyh Kazachstana*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1957. Pp. 177, in-8°.

BYARD P. L. — Vedi: JARRETT A. H. and BYARD P. L.

CAVALLARI-MURAT Augusto. — *Divagazioni e rimembranze a proposito del centenario Teorema di Menabrea*. Estr. da «Atti e Rassegna Tecnica della Società degli Ingegneri e degli Architetti di Torino», 1957, dicembre.

— *Giuseppe Albenga. Nato a Incisa Scapaccino il 9 giugno 1882. Deceduto a Torino il 19 gennaio 1957*. Estr. da «Annuario del Politecnico di Torino», anno accademico 1956-1957.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO. — *Geometria aritmetica e algebrica*. I ciclo - Varenna, Villa Monastero-21-30 maggio 1957. S.n.t., 1957. Pp. 111, in-4° (In ciclostile).

DARWIN Charles. — *Originea speciilor prin selecție naturală sau păstrarea raselor favorizate în lupta pentru existență*. București, Editura Academiei Republicii Populare Române, 1957. Pp. LXXXII-398, in 4° (Clasicii Științei Universale, II).

DAUVILLIER A. — *L'origine photochimique de la vie*. Paris, Masson et Cie Éditeurs, 1958. Pp. 214, in-8°, con tavv. (Collection Évolution des Sciences, n. 11).

FANO Gino e TERRACINI Alessandro. — *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Torino, G. B. Paravia e C., 1957. Pp. VIII-656, in-8°.

GIARRATANA Alfredo. — *L'industria bresciana ed i suoi uomini negli ultimi 50 anni*. Brescia, Tip. Frat. Geroldi, 1957. Pp. 151, in-8° (Supplemento ai «Commentari dell'Ateneo», con il contributo dell'Associazione Industriale Bresciana).

GUTENBERG Beno. — *The «Boundary» of the Earth's Inner Core*. Estr. da «Transactions of the American Geophysical

- Union», vol. XXXVIII, 1957, n. 5.
 — *Zur Frage der Gebirgswurzeln*. Estr. da «Geologische Rundschau», vol. XLVI, 1957, n. 1.
- HAGIHARA Yusuke. — *Stability in celestial mechanics*. Jubilee Publication in Commemoration of the Sixtieth Birthday of Prof. Yusuke Hagihara by his Friends and Pupils. Tokyo, 1957. Pp. x-106, in-8°.
- INSTITUT D'ASTROPHYSIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE. OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE. — *An Atlas of nitrous oxide, methane and ozone infrared absorption bands*. P. I: *The photometric records*. Liège, 1957. Fogli 64, in-8° oblungo.
- Issledovanie fizičeskikh osnov rabočego processa topok i pečej*. Alma-Ata, Akademija Nauk Kazahskoj SSR, 1957. Pp. 362, in-8°, con figg.
- JARRETT A. H. and BYARD P. L. — *On the possibility of observing aurorae in the daytime*. Estr. da «Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics», vol. XI, 1957.
- KONDO KAZUO. — *Vedi: Memoirs of the unifying study of the basic problems... Memoirs of the unifying study of the basic problems in engineering sciences by means of geometry*. Vol. I: *Part one of the Report of the Cooperative Research carried out in the course of three years from April 1951 to March 1954... by a study group of sixteen Members*. Chairman Kazuo Kondo. Tokyo, Gakujutsu Bunken Fukyu-Kai, 1955. Pp. xv-590, in-8°, con figg.
- Mineraly rudnogo altaja*. T. II: *Galenidy, okisly, kislorodnye soli*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1957. Pp. 424, in-8°, con figg.
- e tavv. (Mineralogija Polimetalličeskikh Mestoroždenij Rudnogo Altaja).
- MURGOCI G. M. — *Opere alese*. București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1957. Pp. 404, in-8°, con tavv.
- Nauka v Kazahstane za sorok let Sovetskoj Vlasti*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1957. Pp. 455, in-8°, con tavv.
- PARHON C. I. — *Opere alese*. Vol. II: *Psihologie și psihiatrie*. Bucuresti, Editura Republicii Populare Romîne, 1957. Pp. 527, in-8°.
- PAX Ferdinand. — *Bibliography of the Silesian Zoology*. P. III: (1935-1950). Wrocław, Scientific Society, 1957. Pp. xvi-184, in-8°.
- STRUBECKER K. — *Casi limiti di geometrie non-euclidee*. Roma, Istituto Matematico dell'Università, 1958. Pp. 60, in-4°, con tavv. (In ciclostile).
- Szegedi (A) Tudományegyetem Fővénzkertje*. Budapest, Akadémiai Nyomda, 1957. Pp. 71, in-8°, con figg.
- TANASESCU Tudor. — *Manual de tuburi și circuite electronice*. Vol. II: *Circuite electronice*. București, Editura Academiei Republicii Populare Romîne, 1957. Pp. 531, in-8°, con figg.
- TERRACINI Alessandro. — *Vedi: FANO Gino e TERRACINI Alessandro*.
- TIHOV G. A. — *Osnovnye trudy (v pjati tomah)*. T. III: *Astrofizika (1912-1956)*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1957. Pp. 235, in-8°, con figg. e tavv.
- VILLAR G. E. — *Energia atômica*. Montevideo, «Impresora Uruguay», 1956. Pp. xi-237, in-8°, con figg.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 17 maggio 1958

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Chimica. — *Determinazione radiochimica del numero di centri attivi in catalizzatori stereospecifici di polimerizzazione*^(*). Nota di GIULIO NATTA, GASTONE PAJARO, ITALO PASQUON e VINCENZO STELLACCI, presentata^(**) dal Socio G. NATTA.

Il TiCl_3 cristallino, modificazione violetta (forma α), è uno dei componenti dei sistemi catalitici più efficaci, trovati in questo Istituto per la polimerizzazione stereospecifica delle alfa-olefine. Nostre precedenti ricerche di carattere cinetico sulla polimerizzazione del propilene⁽¹⁾ con tali sistemi avevano messo in particolare evidenza la natura veramente catalitica (rispetto al TiCl_3) di tale polimerizzazione anionica coordinata e l'esistenza, sulla superficie del substrato cristallino del catalizzatore, di centri attivi che mantengono potenzialmente inalterata nel tempo la loro attività catalitica. La particolare natura dei processi di polimerizzazione qui considerati, che differiscono sostanzialmente da tutti i procedimenti di polimerizzazione usati in passato, ci aveva già lasciato prevedere la possibilità di giungere ad una valutazione quantitativa del numero di centri attivi e di conseguenza della vita media di ciascuna macromolecola in accrescimento⁽²⁾.

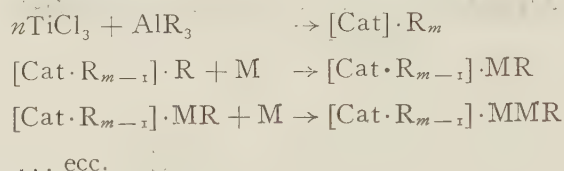
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) G. NATTA, I. PASQUON, E. GIACHETTI, « *Angew. Chemie* », 69, 213 (1957); « *La Chimica e l'Industria* », 39, 993 (1957); « *La Chimica e l'Industria* », 39, 1002 (1957).

(2) G. NATTA, *Conferenza inaugurale del XVI Congresso di Chimica Pura e Applicata*, Parigi 1957, pubblicata su « *Experientia Supplementum* », 7, 21 (1957).

Le misure qui riportate, che sono state effettuate usando composti alluminio alchilici segnati con C^{14} , ci hanno effettivamente consentito di valutare il numero dei centri attivi che prendono inizialmente parte al processo di polimerizzazione poiché, ogni centro attivo promuove la formazione di catene polimeriche, la prima delle quali contiene, come gruppo terminale, il gruppo alchilico legato inizialmente al centro attivo. Esse ci hanno consentito inoltre di confermare il meccanismo di polimerizzazione, proposto da uno di noi in precedenti lavori ⁽³⁾, secondo il quale la formazione delle macromolecole avviene attraverso un processo di successive addizioni di unità monomeriche per apertura di un legame metallo carbonio, corrispondente ad un alchile coordinato al complesso catalitico. Tale processo è rappresentabile per semplicità con lo schema seguente:



ove

$[Cat] \cdot R_m$ = complesso catalitico

R = alchile proveniente inizialmente dall'alluminio alchile

M = monomero.

Si sono effettuate le seguenti misure:

Misure di adsorbimento dell' $Al(C_2H_5)_3$ e dell' $Al(C_2H_5)_2Cl$ sul $\alpha-TiCl_3$ a varie temperature.

Determinazione dei centri attivi in base alla quantità degli etili (provenienti dall'alluminio alchile radioattivo, precedentemente fissati sul $TiCl_3$) che, dopo polimerizzazione, si ritrovano nel polimero.

Si è inoltre effettuata una serie di misure sui prodotti in esame, allo scopo di determinare l'entità di eventuali inquinamenti radioattivi, estranei ai fenomeni chimico-fisici direttamente connessi col processo di polimerizzazione.

Misure di inquinamenti radioattivi. - Si è osservato che il prodotto solido ottenuto trattando il tipo di $\alpha-TiCl_3$, da noi impiegato, con alluminio alchile radioattivo, permiane radioattivo anche dopo averlo sottoposto all'azione di un acido o di un alcool allo scopo di decomporre i legami metallo carbonio. Questa radioattività è dovuta ad un inquinamento, che per brevità chiameremo di fondo, la cui entità è risultata strettamente dipendente dal grado di purezza e dalla quantità di $\alpha-TiCl_3$ impiegata. L'inquinamento di fondo aumenta all'aumentare della quantità di $TiCl_3$ trattata e può diminuire fino a valori molto bassi se si sottopone, prima del suo impiego, il $\alpha-TiCl_3$ a ripetuti lavaggi con benzolo anidro.

(3) G. NATTA, Conferenza tenuta a Zurigo il 28 luglio 1955, pubblicata su «Makrom. Chem.», 16, 213 (1955).

In Tabella III sono riportati i valori della contaminazione di fondo ottenuti in prove condotte a temperature diverse con una quantità costante di un dato tipo di α - TiCl_3 . Si osserva che l'inquinamento può essere ritenuto indipendente dalla temperatura.

Si ritiene che questa contaminazione di fondo sia dovuta alla presenza di piccolissime quantità di polietilene radioattivo formatosi per polimerizzazione di etilene. Tracce di etilene possono infatti formarsi nel disproportionamento dei radicali $-\text{C}_2\text{H}_5$ che si liberano per decomposizione dei composti titanio cloroalchilici formati nella reazione tra l'alluminio alchile e le tracce di TiCl_4 , o di prodotti di ossidazione del TiCl_3 , spesso contenute nel TiCl_3 tecnico.

A conferma di questa ipotesi si è osservato che sostituendo il TiCl_4 al TiCl_3 si hanno inquinamenti rilevanti (Tabella I).

Altri tipi di contaminazione, dovuti per esempio a rimozione incompleta dell'alluminio alchile da un polimero, o a reazioni secondarie di alchilazione, si sono potuti escludere ⁽⁴⁾.

Misure di adsorbimento dell' $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ e dell' $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl}$ sul α - TiCl_3 . — Si sono effettuate le seguenti operazioni:

Trattamento di una data quantità di α - TiCl_3 , ad una data temperatura, con una soluzione del composto alluminio alchilico radioattivo.

Filtrazione e lavaggio del solido, ad una data temperatura e sotto azoto, con benzolo anidro (od altro solvente idrocarburico) accuratamente depurato, fino a scomparsa di radioattività nel filtrato.

Aggiunta al residuo, dopo il lavaggio, di una quantità esattamente misurata di alluminio alchile inattivo in soluzione.

Decomposizione dei legami metallo-carbonio con H_2SO_4 al 10%, alla ebollizione, operando su una aliquota nota della sospensione.

Combustione dei gas sviluppati.

Assorbimento del CO_2 su $\text{Ba}(\text{OH})_2$.

La misura di radioattività viene fatta su campioni di BaCO_3 montati su dischetti di alluminio ed il calcolo della corrispondente quantità di etili fissati sul TiCl_3 è fatto applicando la legge della diluizione isotopica.

I risultati ottenuti in queste prove nell'intervallo $-18, +100^\circ\text{C}$ per il sistema α - TiCl_3 — $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$, e a 70°C per il sistema α - TiCl_3 — $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl}$, sono riportati in Tabella II. In tutte le prove il trattamento iniziale del TiCl_3 con la soluzione di alluminio alchile è stato fatto in condizioni di sicura saturazione di adsorbimento del composto alluminio alchilico sul α - TiCl_3 , condizioni trovate variando, in prove preliminari, la concentrazione della soluzione alluminio alchilica ed il tempo di contatto.

(4) G. NATTA, I. PASQUON, E. GIACHETTI, G. PAJARO, «La Chimica e l'Industria», 40, 267 (1958).

TABELLA I.

Contaminazione radioattiva di polimero preformato, dovuta all'aggiunta di $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ marcato con C^{14} e di $\alpha\text{-TiCl}_3$ o TiCl_4 .
(Prove condotte in 30 cm³ di benzolo)

Temperatura del trattamento °C	Durata del trattamento h	$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ mol/l	TiCl_3 mol/l	TiCl_4 mol/l	Polimero preformato g/l	Attività specifica (colpi/min.)		
						Senza ripreci- pitazione del polimero	dopo 1 ripreci- pitazione del polimero	dopo 2 ripreci- pitazioni del polimero
20	2	0,04	0,04	—	5,1	23	20	21
70	1	0,08	0,05	—	6	51	43	44
70	3	0,08	0,05	—	6	50	40	40
70	1	0,05	0,05	—	6 (*)	45	40	42
20	2	0,022	—	0,015	6	832	603	610
57	1	0,022	—	0,015	7,2	510	490	487
57	1	0,022	—	0,015	7,2 (*)	630	514	510

(*) Il polimero è stato aggiunto dopo aver decomposto il catalizzatore con metanolo e acido cloridrico.

Dall'esame dei risultati ottenuti si possono trarre le seguenti conclusioni:

Degli alchili, provenienti dall'alluminio alchile, vengono fissati sul TiCl_3 , probabilmente in complessi metallorganici contenenti alluminio, superficialmente adsorbiti.

Operando a temperature inferiori a circa 20°C , la quantità di gruppi etili fissati sul TiCl_3 è risultata indipendente dalla temperatura.

Al di sopra di circa 20°C la quantità di gruppi etili fissati diminuisce all'aumentare della temperatura di trattamento e dipende dalla temperatura alla quale vengono effettuati i lavaggi del TiCl_3 sul quale è stato preadsorbito il composto alchilico.

Alle più basse temperature sperimentate (-18°C) si è osservato che il processo di adsorbimento è relativamente lento.

Tale processo di adsorbimento è parzialmente reversibile. Si deve tuttavia ritenere che almeno una parte dei gruppi etili fa parte di complessi tenacemente fissati sul substrato cristallino ($\alpha\text{-TiCl}_3$) poiché ripetuti lavaggi con solvente anidro non provocano il loro completo deadsorbimento.

La quantità di gruppi etili fissati sul $\alpha\text{-TiCl}_3$ nel trattamento con $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl}$ è inferiore a quella riscontrata nel trattamento con $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$.

Misure condotte per la valutazione dei centri attivi. — Il TiCl_3 sul quale era stata fissata in precedenza una quantità nota di gruppi etili (per trattamento del TiCl_3 con il composto alluminio alchilico) è stato impiegato nella polimerizzazione del propilene (o dell'etilene) in generale dopo un'ulteriore aggiunta di alluminio alchile inattivo.

Quest'ultima aggiunta non è indispensabile alla formazione del catalizzatore poiché si è avuta formazione di polimero (per quanto in minima quantità) anche senza di essa.

Nelle prove condotte con aggiunta di alluminio alchile si sono prodotti, in prove di diversa durata, da 0,5 a 2 g di polipropilene isotattico.

Il polimero ottenuto in queste prove è sempre risultato radioattivo. Si deve ritenere che gli etili ritrovati nel polimero provengano dai centri attivi inizialmente presenti sulla superficie del $\alpha\text{-TiCl}_3$. I risultati ottenuti in queste misure, con il sistema $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3 - \alpha\text{-TiCl}_3$ e con il sistema $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl} - \alpha\text{-TiCl}_3$, sono riportati (corretti per il fondo) in Tabella II.

Nell'effettuare queste misure si è dovuto evidentemente tenere presente la contaminazione di fondo. Si può tuttavia osservare che la radioattività dovuta alla contaminazione risulta di gran lunga minore della radioattività dovuta ai gruppi etili corrispondenti ai centri attivi (Tabella III).

Nell'intervallo $60\text{--}100^\circ$, tutti i gruppi etili che si erano fissati sul TiCl_3 si ritrovano nel polimero.

Tra -18 e 60°C la quantità di etili ritrovata nel polimero è inferiore alla quantità totale di etili che si era fissata sul TiCl_3 .

TABELLA II.

Determinazione del numero di centri attivi, su un campione di $\alpha\text{-TiCl}_3$ macinato, da prove di adsorbimento di composti alluminio alchilici marcati con C^{14} , seguite da polimerizzazione del propilene.

(TiCl_3 : 0,5 g; alluminio alchile: 0,5 cm^3 ; solvente: 30 cm^3 n. eptano).

Composto di alluminio	Temperatura di adsorbimento $^{\circ}\text{C}$	Durata dell'adsorbimento h	Solvente	Temperatura di lavaggio con solvente anidro $^{\circ}\text{C}$	Moli di $\text{-C}_2\text{H}_5$ fissate per mole di $\alpha\text{-TiCl}_3$	
					Numero totale di gruppi $\text{-C}_2\text{H}_5$ che rimangono sul TiCl_3 dopo lavaggio	Numero di gruppi $\text{-C}_2\text{H}_5$ presenti sui centri attivi (gruppi che si ritrovano nel polimero)
$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$	— 18	1/2	n. eptano	— 18	$17,0 \times 10^{-3}$	n. d.
$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$	— 18	3	»	— 18	$45,0 \times 10^{-3}$	$9,3 \times 10^{-3}$
$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$	20	1/2	benzolo	20	$48,2 \times 10^{-3}$	$10,1 \times 10^{-3}$
$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$	46	1/2	»	46	$17,7 \times 10^{-3}$	$10,5 \times 10^{-3}$
$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$	70	1/2	»	20	$10,5 \times 10^{-3}$	$10,8 \times 10^{-3}$
$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$	70	1/2	»	70	$6,2 \times 10^{-3}$	$6,7 \times 10^{-3}$
$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$	100	1/2	toluolo	100	$3,0 \times 10^{-3}$	$3,0 \times 10^{-3}$
$\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl}$	70	1/2	n. eptano	20	$3,0 \times 10^{-3}$	$3,1 \times 10^{-3}$

All'aumentare della temperatura di lavaggio del TiCl_3 (dopo il trattamento con alluminio alchile radioattivo) al di sopra di un certo valore (di poco superiore alla temperatura ambiente), il numero di gruppi etili ritrovati nel polimero diminuisce.

Se la temperatura di lavaggio è mantenuta al disotto del valore limite precedente, il numero di gruppi etili ritrovati nel polimero risulta praticamente indipendente dalla temperatura alla quale viene fatto l'adsorbimento (per lo meno a temperature inferiori a 70°C) e dalla quantità o dal tipo di polimero (polipropilene o polietilene) ottenuta in ogni singola prova.

Il numero dei centri attivi misurati per il sistema $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3\text{Cl}-\alpha\text{-TiCl}_3$, risulta inferiore a quello del sistema, $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3-\alpha\text{-TiCl}_3$. Ciò può essere messo in relazione con la minore attività presentata dal primo sistema catalitico rispetto all'altro, nella polimerizzazione stereospecifica del propilene⁽⁵⁾.

TABELLA III.

Contaminazione radioattiva (indipendente dai gruppi alchili adsorbiti) nel trattamento di un campione di $\alpha\text{-TiCl}_3$ macinato, con $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ marcato con C^{14} .

(TiCl_3 : 0,5 g; $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$: 0,5 cm³; solvente: 30 cm³ n. eptano).

Temperatura del trattamento °C	Contaminazione radioattiva espressa in moli di gruppi $-\text{C}_2\text{H}_5$ per mole di $\alpha\text{-TiCl}_3$	Rapporto tra la conta- minazione radioattiva e la radioattività dei gruppi etili corri- spondenti ai centri attivi (ved. Tabella II)
- 18	$1,8 \cdot 10^{-3}$	19,5 %
20	$1,3 \cdot 10^{-3}$	13 %
46	$1,2 \cdot 10^{-3}$	11,5 %
70	$1,6 \cdot 10^{-3}$	15 %

Misure di radioattività. - Tutte le misure di radioattività sono state fatte su campioni in « strato spesso », con un contatore G. M. con finestra da 1,5 mg/cm². I conteggi sono espressi in colpi/minuto e condotti per un tempo sufficiente a dare un errore standard per la fluttuazione statistica inferiore a circa 1 %.

(5) G. NATTA, I. PASQUON, G. PAJARO, E. GIACHETTI, in corso di pubblicazione su « La Chimica e l'Industria ».

Per le misure riguardanti l'adsorbimento totale, l'attività è stata determinata su campioni di BaCO_3 .

L'ammontare dell'assorbimento veniva calcolato con la legge della diluizione isotopica:

$$\frac{\text{Attiv. Sp. dell'AlEt}_3 \text{ iniziale}}{\text{Attiv. Sp. dell'AlEt}_3 \text{ diluito}} = \frac{a+b}{a}$$

dove a e b sono rispettivamente le quantità, espresse in moli, dell' $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ adsorbito e di quello aggiunto come « carrier ».

Il calcolo degli etili contenuti nel polimero è stato effettuato con la stessa espressione, tenuto presente che, in questo caso, l'attività è determinata su campioni di polimero ⁽⁴⁾.

Preparazione dei reagenti. - Il propilene è stato preparato per disidratazione dell'alcool isopropilico a 350 °C e successivamente distillato e purificato.

I solventi usati per condurre le prove sono stati accuratamente purificati e anidrificati secondo i metodi dati dalla letteratura. Essi venivano, conservati su sodio in recipienti che permettevano il prelevamento in atmosfera di azoto.

Il $\alpha\text{-TiCl}_3$ cristallino è stato ottenuto per riduzione con H_2 del TiCl_4 a 950 °C e successivamente sottoposto a macinazione secondo le modalità descritte in un lavoro precedente ⁽⁵⁾.

L' $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ radioattivo è stato preparato da $\text{Al}(\text{i-C}_4\text{H}_9)_3$ ed etilene radioattivo ⁽⁶⁾.

Apparecchiatura. - L'apparecchiatura usata (per le misure di adsorbimento e per le prove di polimerizzazione) consiste di un recipiente cilindrico di vetro pirex (di 15 cm altezza, 5 cm \varnothing a 3 colli, a smeriglio), munito di agitatore centrale, di due rubinetti laterali per l'azoto e per l'introduzione del liquido di lavaggio. Un setto poroso in vetro agglomerato (porosità media 5 μ) è incorporato quasi sul fondo del cilindro che è collegato con un sifone ad un recipiente di 300 cm³ di capacità collegato a sua volta ad una presa di vuoto ed azoto.

Il cilindro di reazione viene termostattizzato alla temperatura di esperienza con un bagno ad olio di vasellina.

CONCLUSIONI.

La determinazione radiochimica degli alchili presenti nei complessi metalorganici adsorbiti sul TiCl_3 ha consentito di giungere ad una valutazione dei centri attivi, che promuovono la polimerizzazione stereospecifica delle alfa-

(6) G. PAJARO, « Annali di Chimica », 48, 193 (1958).

olefine, presenti in sistemi catalitici costituiti da α - TiCl_3 (modificazione violetta) e $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_3$ o $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl}$ e di precisare il processo di iniziazione delle catene polimeriche.

Si è considerato, convenzionalmente, il numero di centri attivi uguale al numero di etili, contenuti nei complessi chemisorbiti, che si ritrovano come gruppi terminali nel polimero. Poiché ognuno di tali complessi può contenere più legami metallo-carbonio, tutti interessati nella catalisi, ne consegue che il numero di centri attivi, determinati in questo modo, può risultare un multiplo dei centri attivi, considerati come siti della superficie del TiCl_3 sui quali vengono chemisorbiti i complessi catalitici.

I valori trovati per il numero convenzionale di centri attivi variano da 0,3 a 1 % in moli per mole di TiCl_3 , e dipendono dal tipo di composto alluminio alchilico presente nel sistema catalitico.

Il numero di centri attivi sembra essere indipendente dalla temperatura (nel campo da noi indagato).

Operando a temperature inferiori a circa 60°C si rileva l'esistenza di due tipi di adsorbimento sul TiCl_3 :

il primo, reversibile, che prevale a bassa temperatura e la cui entità può essere alquanto superiore a quella del secondo, non prende apparentemente parte al processo di polimerizzazione;

il secondo è responsabile del processo di polimerizzazione.

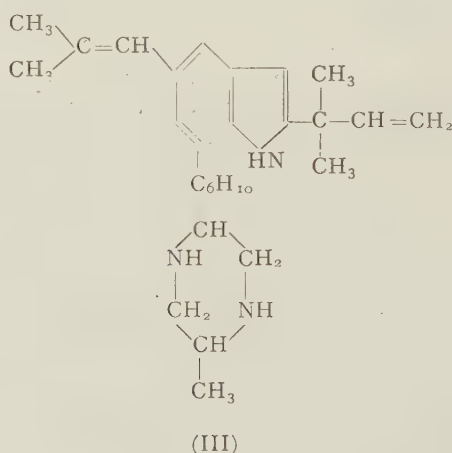
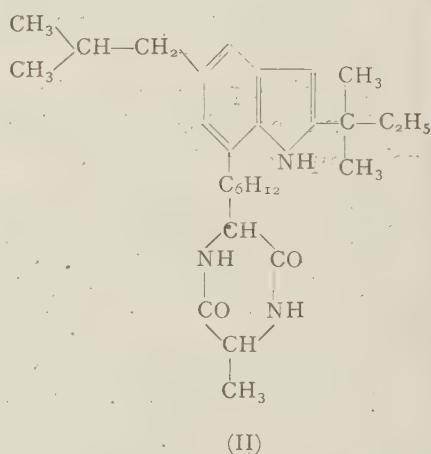
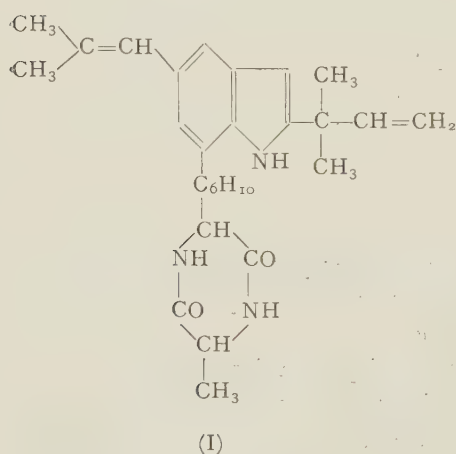
Le modalità sperimentali, secondo cui sono state effettuate le misure riportate in questa Nota (trattamento dell' α - TiCl_3 con alluminio alchile, allontanamento dell'alluminio alchile adsorbito in modo non irreversibile, mediante ripetuti lavaggi con solventi anidri, determinazione radiochimica degli alchili adsorbiti), fanno ritenere che almeno una parte degli alchili, quelli che agiscono da iniziatori nella catalisi, e che corrispondono al secondo tipo di adsorbimento, faccia parte di complessi metallorganici, contenenti alluminio, fortemente fissati al substrato cristallino (TiCl_3).

Il numero di centri attivi determinati per questa via, potrà avvicinarsi al valore effettivo di quelli agenti durante la polimerizzazione in condizioni di regime, soltanto qualora i lavaggi del TiCl_3 , pretrattato con alluminio alchile, vengano effettuati a temperature inferiori ad un certo valore (di poco superiore alla temperatura ambiente) al di sopra del quale anche il secondo tipo di adsorbimento è in parte reversibile.

I valori così ottenuti sono tuttavia in accordo con quelli ottenuti indipendentemente per il sistema $\text{Al}(\text{C}_2\text{H}_5)_2\text{Cl} - \alpha\text{-TiCl}_3$, attraverso misure cinetiche ⁽⁵⁾.

Chimica organica. — *Sulla struttura dell'echinulina* (*). Nota di CESARE CARDANI, GIUSEPPE CASNATI, BRUNO CAVALLERI e ADOLFO QUILICO, presentata (**) dal Socio A. QUILICO.

Le nostre precedenti ricerche ⁽¹⁾ sulla costituzione dell'*echinulina* e dell'*idroechinulina* ci hanno condotti ad assegnare a queste sostanze le strutture (I) e (II):



In esse resta ancora da determinare la costituzione del ponte $\text{—C}_6\text{H}_{10}\text{—}$ ($\text{—C}_6\text{H}_{12}\text{—}$ nell'idroechnulina) che congiunge le due metà indolica e diche-topiperazinica della molecola. Ulteriori notizie sulla struttura dell'aggrup-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) Ultimo lavoro sull'argomento: A. QUILICO, F. PIOZZI e C. CARDANI, « Gazz. Chim. It. », 88, 125 (1958).

pamento $-\text{C}_6\text{H}_{10}-$ abbiamo ora potuto ricavare dal dosamento dell'acetone prodotto nell'ozonolisi e nella ossidazione permanganica dell'*echinulina* (I) e della *desossiechinulina* (III).

Come risulta dall'unita Tabella tanto l'*echinulina* quanto il suo desossi-derivato, ottenuto come altra volta descritto⁽¹⁾ per riduzione della medesima con idruro di litio e alluminio, hanno fornito, nelle condizioni esposte in dettaglio nella parte sperimentale, quantità di acetone (determinato ponderalmente come p-nitrofenilidrazone) comprese tra 1 e 1,5 moli per mole di prodotto di partenza.

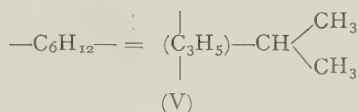
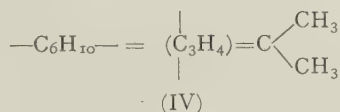
TABELLA.

Moli di acetone ottenute per mole di sostanza.

Sostanza trattata	Ozonolisi in acido acetico	Ossidazione con KMnO_4 in acido acetico	
		a freddo	a caldo
Echinulina	1,10	1,15	1,50
Desossiechinulina	1,35	—	1,47
Idroechinulina	0	0	0
Desossiidroechinulina	0	tracce	tracce

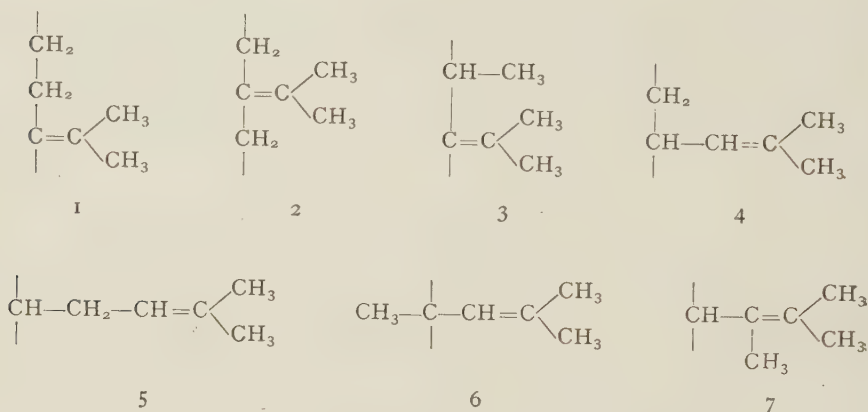
Tenuto conto del carattere solo grossolanamente quantitativo della determinazione che non può necessariamente fornire che risultati approssimati per difetto, appare evidente che nell'*echinulina* e nel suo desossiderivato debbono essere presenti *due* aggruppamenti capaci di dare acetone per ossidazione nelle condizioni blande adottate nelle nostre esperienze. E poiché l'*idroechinulina* e la *desossiidroechinulina* per analogo trattamento non danno acetone o solo tracce minime di questa sostanza, si deve concludere che esso prende origine da due gruppi isopropilidenici $>\text{C}=\text{C}(\text{CH}_3)_2$ ⁽²⁾ contenuti nelle catene laterali insature dell'*echinulina* e *desossiechinulina*.

Dato che uno di questi gruppi è costituito dalla catena C_4 presente in posizione 5 dell'anello indolico, l'altro deve necessariamente appartenere al ponte $-\text{C}_6\text{H}_{10}-$ che può pertanto essere formulato come in (IV) nell'*echinulina*; nell'*idroechinulina* il gruppo $-\text{C}_6\text{H}_{12}-$ si potrà corrispondentemente formulare come in (V):

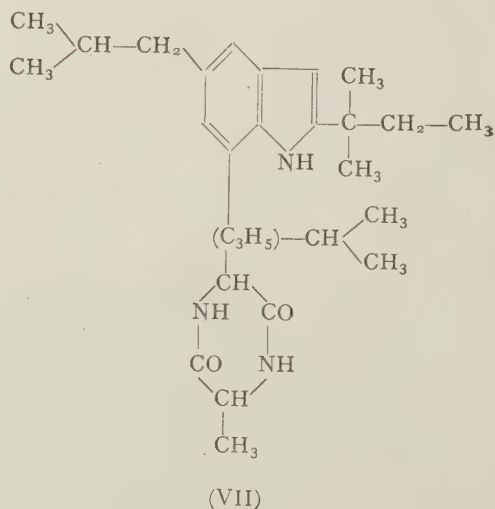
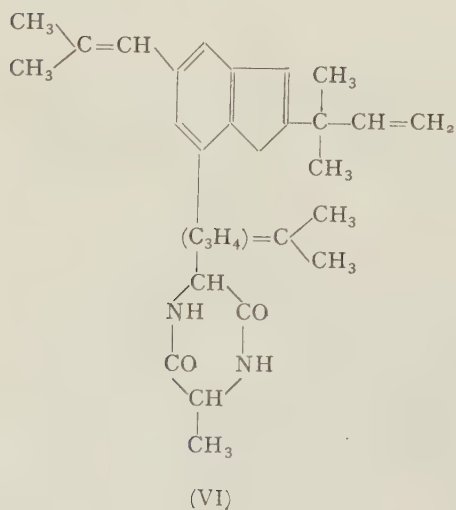


(2) A rigore acetone potrebbe formarsi anche dall'aggruppamento contenente la stessa intelaiatura di atomi di carbonio: $\text{CH}_2=\text{C}(\text{CH}_3)-\text{CH}_2-$. Per l'equilibrio $(\text{CH}_3)_2\text{C}=\text{CH}- \rightleftharpoons \text{CH}_2=\text{C}(\text{CH}_3)-\text{CH}_2-$ vedi ad esempio V. GRIGNARD, J. DOEUVRE e R. ESCOURRU, « Bull. Soc. Chim. France », 4, 35, 932 (1924).

Anche con la semplificazione portata dalla conoscenza di questo dettaglio, 7 differenti strutture sono ancora possibili per l'aggruppamento $-\text{C}_6\text{H}_{10}-$, come sotto indicato:



Se si tiene poi conto del fatto che la catena $-\text{C}_6\text{H}_{10}-$ è unita a due residui differenti (indolico e dichetopiperazinico), il numero delle strutture isomere assegnabili all'echinulina e all'idroechinulina sale a 10. In base a quanto è già stato riferito nei precedenti lavori sui prodotti di degradazione delle sostanze in istudio, non tutte queste formule si presentano egualmente probabili, tuttavia una scelta definitiva tra esse non appare per ora possibile. Lo studio approfondito, attualmente in corso, degli altri prodotti di ozonolisi dell'echinulina e desossiechinulina, e dei componenti non aromatici della complessa miscela di sostanze che si forma nell'ossidazione permanganica e nitrica dell'idroechinulina, ci permetterà di chiarire questi ultimi dettagli della struttura delle sostanze in esame, che possono ora venire formulate come in (VI) e (VII):



PARTE SPERIMENTALE.

1. *Ozonizzazione della desossiechinulina e della desossidroechinulina.*

G 1,2 di desossiechinulina sciolti in 50 cm³ di acido acetico glaciale vennero sottoposti per 4 ore a temperatura ambiente ad una corrente di ossigeno ozonizzato, fissando i prodotti volatili trascinati dalla corrente gassosa in un sistema di 4 Drechsel poste in serie e contenenti acqua. Al termine dell'operazione queste soluzioni vennero addizionate di una soluzione acetica satura di p-nitrofenilidrazina; dal liquido delle due prime Drechsel si ricavarono g 0,220 di p-nitrofenilidrazone dell'acetone praticamente puro, a p.f. 147°, che non mostrò depressione alla prova di fusione in miscela con un campione sintetico. Il liquido acetico, diluito con 30 cm³ di acqua, venne sottoposto a distillazione raccogliendo separatamente una prima frazione di 2 cm³ e altre cinque frazioni di 5-6 cm³ ognuna. La prima frazione, trattata con soluzione acetica di p-nitrofenilidrazina diede un p-nitrofenilidrazone dell'acetone impuro per il corrispondente derivato della formaldeide di difficile separazione, che venne perciò scartato. Dalle rimanenti 5 frazioni con lo stesso trattamento si ricuperarono complessivamente g 0,530 di p-nitrofenilidrazone dell'acetone sufficientemente puro, a p. f. comprese tra 141° e 147°.

Nel corso dell'operazione vennero pertanto isolati g 0,750 di p-nitrofenilidrazone dell'acetone, pari a moli 1,35 di acetone per mole di desossiechinulina⁽³⁾.

Il trattamento con ozono di g 1,57 di *desossidroechinulina* in condizioni identiche a quelle sopra indicate non fornì alcuna traccia di acetone.

2. *Ozonizzazione dell'echinulina e dell'idroechinulina.*

Una soluzione di g 1,85 di *echinulina* in 130 cm³ di acido acetico glaciale venne sottoposta ad ozonizzazione in condizioni identiche a quelle già descritte. Le acque di lavaggio dei gas di ozonizzazione diedero g 0,09 di p-nitrofenilidrazone dell'acetone. Dalla decomposizione della soluzione acetica dell'ozonuro per aggiunta di acqua e distillazione, si ricavarono g 0,78 di p-nitrofenilidrazone praticamente puro a p.f. 145°-146°. Complessivamente vennero quindi isolati g 0,87 di p-nitrofenilidrazone, corrispondenti a moli 1,1 di acetone per mole di echinulina⁽⁴⁾.

Una soluzione di g 1,22 di *idroechinulina* in 40 cm³ di acido acetico venne ozonizzata in condizioni identiche a quelle già descritte. Né dalle acque di lavaggio dei gas, né dal distillato acquoso proveniente dalla decomposizione dell'ozonuro fu possibile ricavare traccia alcuna di acetone.

(3) Se si tenesse conto della frazione di testa, che anch'essa contiene acetone, le rese sarebbero nettamente superiori.

(4) Anche in questo caso non si è computata nelle rese la frazione di testa della distillazione che ha dato ben 0,32 g di p-nitrofenilidrazone impuro a p.f. 132°-136°, e che ha un elevato contenuto in p-nitrofenilidrazone dell'acetone.

3. Ossidazione permanganica della desossiechinulina e della desossiidroechinulina.

In una soluzione di g 1,45 di *desossiechinulina* in 100 cm³ di acido acetico glaciale vennero fatti gocciolare, a temperatura ambiente e sotto continua agitazione, 250 cm³ di una soluzione acquosa satura di KMnO₄. Al termine dell'aggiunta il liquido di reazione presentava ancora colorazione violetta permanente.

La soluzione venne poi portata all'ebollizione raccogliendo cinque frazioni di circa 10-15 cm³ ognuna. Da queste, per aggiunta di soluzione acetica di p-nitrofenilidrazina, si ricavarono complessivamente g 0,990 di p-nitrofenilidrazone dell'acetone a p.f. variabile tra 146° e 149° per le varie porzioni.

Dall'ossidazione si ricuperarono pertanto 1,47 moli di acetone per mole di desossiechinulina.

Una soluzione di g 1,33 di *desossiidroechinulina* in 100 cm³ di acido acetico venne trattata come sopra descritto con 150 cm³ di soluzione acquosa satura di KMnO₄; già dopo l'aggiunta dei primi 70-80 cm³ la soluzione rimase permanentemente colorata in violetto. Dopo un riposo di circa trenta minuti si distrusse con acido ossalico l'eccesso di KMnO₄, e la soluzione venne distillata raccogliendo due frazioni di circa 50 cm³ ciascuna, che diedero solo lieve intorbidamento per aggiunta di soluzione acetica di p-nitrofenilidrazina.

La soluzione residua dalla distillazione venne ulteriormente ossidata all'ebollizione con altri 100 cm³ di KMnO₄, raccogliendo ancora due frazioni di 50 cm³ ciascuna. Solo dalla prima di queste frazioni si poté isolare una quantità assai scarsa (g 0,01) di p-nitrofenilidrazone a p. f. piuttosto basso (135°).

4. Ossidazione permanganica dell'echinulina e della idroechinulina.

a) *A caldo.* - Una soluzione di g 1,65 di *echinulina* in 130-140 cm³ di acido acetico venne addizionata a temperatura ambiente di 250 cm³ di soluzione di KMnO₄ e successivamente sottoposta a distillazione. Si raccolsero tre frazioni dalle quali si ricavarono complessivamente g 0,950 di p-nitrofenilidrazone dell'acetone a p.f. variabile tra 144° e 148°.

La soluzione residua, ossidata ulteriormente con altri 200 cm³ di KMnO₄ e di nuovo sottoposta a distillazione, diede una frazione dalla quale vennero precipitati g 0,160 di p-nitrofenilidrazone a p.f. 145°.

In totale nell'ossidazione vennero isolati g 1,110 di p-nitrofenilidrazone dell'acetone pari a 1,5 moli di acetone per mole di sostanza.

A g 1,04 di *idroechinulina* disciolti in 100 cm³ di acido acetico venne aggiunto KMnO₄ in soluzione acquosa satura fino a permanente colorazione violacea, ciò che richiese 100 cm³ di ossidante. Dalla soluzione portata all'ebollizione vennero allontanati circa 20 cm³ di distillato, che per trattamento con soluzione acetica di p-nitrofenilidrazina non diedero precipitato alcuno, anche

dopo lungo riposo. Il liquido residuo della distillazione venne ulteriormente ossidato a caldo con altri 100 cm³ di KMnO₄, raccogliendo ancora 30 cm³ di distillato acquoso che, al trattamento con p-nitrofenilidrazina, si dimostrò privo di acetone.

b) *A freddo*. — Una soluzione di g 1,53 di *echinulina* in 130 cm³ di acido acetico venne trattata sotto raffreddamento (5°–15°) con 250 cm³ di KMnO₄ acquoso aggiunto a piccole porzioni nell'intervallo di un'ora. Dopo 3 ore di permanenza a freddo, si distrusse con acido ossalico l'eccesso di permanganato; per distillazione della soluzione si raccolsero circa 70 cm³ di distillato acquoso che fornì col solito trattamento g 0,52 di p-nitrofenilidrazone a p. f. 144°–146°.

La soluzione residua, raffreddata a 5°, venne ulteriormente trattata con soluzione di KMnO₄ fino a colorazione violetta permanente. Dopo riposo a freddo di una notte, si distrusse pure a freddo con acido ossalico l'eccesso di ossidante; dal nuovo distillato acquoso per trattamento con p-nitrofenilidrazina si ricavarono ancora g 0,22 di p-nitrofenilidrazone dell'acetone a p. f. 143°. Complessivamente da questa ossidazione vennero isolati g 0,74 di p-nitrofenilidrazone, pari a 1,15 moli di acetone per mole di *echinulina*.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sull'equazione del calore con dati subarmonici e sue generalizzazioni* (*). Nota di CARLO PUCCI e ALESSANDRO WEINSTEIN, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

In questa Nota si stabiliscono proprietà di crescita e convessità della soluzione dell'equazione del calore con dati di Cauchy subarmonici. La possibilità di arrivare a risultati espressivi per problemi di Cauchy con ipotesi sui dati di subarmonicità è già stata sfruttata in un recente lavoro relativo ad equazioni di tipo iperbolico (1).

Le proprietà di crescita e convessità della soluzione dell'equazione del calore sono ricavate dall'esame dell'espressione della soluzione data dalla classica formula di Poisson. L'osservazione esplicita di queste proprietà è giustificata non solo dal fatto che sono interessanti e non ovvie ma anche perché la loro conoscenza è una guida nello studio di equazioni più generali per le quali non sono note esplicite espressioni della soluzione. Infatti, nella seconda parte di questa Nota, si provano proprietà di crescita anche per

(*) Lavoro eseguito nell'Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics della Università del Maryland, Air Force Contract AF 49 (638)–228.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) Vedi A. WEINSTEIN, *On a Cauchy problem with subharmonic initial values*, «Annali di Mat. pura appl.», 4, 43, pp. 325–340 (1957).

soluzioni di problemi di Dirichlet per equazioni di tipo parabolico che corrispondono alla propagazione del calore in un mezzo inhomogeneo indipendente dal tempo. Le ipotesi di subarmonicità dei dati è rimossa pervenendo a limitazioni a priori delle derivate della soluzione, limitazioni che hanno interesse sia per i procedimenti del calcolo numerico sia come strumento per la dimostrazione di teoremi di esistenza.

1. Sia $(x_1, x_2, \dots, x_m, t) = (x, t)$ un punto dello spazio euclideo ad $m + 1$ dimensioni. È ben noto che la classica formula di Poisson-Fourier

$$(1) \quad u(x, t) = \frac{1}{2^m (\pi t)^{m-2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{-\frac{1}{4t} \sum (x_i - \xi_i)^2} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_m,$$

dà una soluzione dell'equazione del calore

$$(2) \quad u_t = \sum u_{x_i x_i}, \quad t > 0,$$

analitica per $t > 0$, continua per $t \geq 0$ e tale che

$$u(x, 0) = g(x),$$

se $g(x)$ è continua e soddisfa ad opportune limitazioni, ad esempio:

$$|g(x)| \leq K e^{(\sum x_i^2)^\alpha},$$

con k ed α costanti positive, $\alpha < 1$. Ponendo

$$\frac{1}{4t} \sum (x_i - \xi_i)^2 = \lambda^2,$$

si ottiene la seguente trasformazione dell'integrale, già usata da Fourier e da Weber,

$$(3) \quad u(x, t) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2} M(x, 2\sqrt{t}\lambda; g) d\lambda,$$

dove $M(x, 2\lambda\sqrt{t}; g)$ è il valore medio di g sulla superficie $m - 1$ dimensionale della sfera nello spazio delle x con raggio $2\lambda\sqrt{t}$ e centro x .

Supponiamo ora g subarmonica. Per un classico teorema di F. Riesz il valore medio $M(x, 2\lambda\sqrt{t}; g)$ è una funzione crescente del raggio, $2\lambda\sqrt{t}$, ed inoltre è una funzione convessa di $(2\lambda\sqrt{t})^{2-m}$ se $m \neq 2$ e di $\log(2\lambda\sqrt{t})$ se $m = 2$. Siccome nell'integrale al secondo membro della (3), M è moltiplicato per un fattore positivo indipendente da t segue che la soluzione $u(x, t)$ è crescente in \sqrt{t} e quindi in t ed inoltre è convessa in $t^{(2-m/2)}$ se $m \neq 2$ e in $\log t$ se $m = 2$.

In particolare se g è di classe $C^{(2)}$ la condizione di subarmonicità implica che $\Delta g \geq 0$ e le proprietà indicate di M e quindi di u possono essere ricavate dallo studio dell'equazione di Eulero-Poisson-Darboux⁽²⁾. In questo

(2) Vedi A. WEINSTEIN, Nota citata in (1).

caso la soluzione u ha le seguenti proprietà:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \geq 0 \quad \text{per } t \geq 0,$$

$$\frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial \tau^2} \geq 0 \quad \text{per } \tau > 0 \text{ se } m > 2, \quad \text{per } \tau \geq 0 \text{ se } m = 1,$$

$$\frac{\partial^2 u(x, e^\tau)}{\partial \tau^2} \geq 0 \quad \text{per } -\infty < \tau < +\infty \text{ se } m = 1^{(3)}.$$

2. Sia A un insieme limitato contenuto nell'iperpiano $t = 0$ e su di esso aperto, e sia \bar{A} la frontiera di A su tale iperpiano. Indichiamo con B l'insieme dei punti (x, t) tali che $x \in \bar{A}$ (chiusura di A) e $0 \leq t \leq 1$, e con D l'insieme dei punti (x, t) tali che $x \in \bar{A}$ e $0 \leq t \leq 1$.

Siano a_{ij}, b_i, c, f, g ($i, j = 1, \dots, m$) funzioni continue in \bar{A} e

$$(4) \quad c \leq 0, \quad \Sigma a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{in } \bar{A},$$

ove α è una costante positiva e $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ una m -pla arbitraria di numeri reali. Indichiamo con L l'operatore differenziale

$$L \equiv \Sigma a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c.$$

Sia $h(x, t)$ una funzione continua su D insieme alla sua derivata parziale rispetto a t e sia g di classe $C^{(2)}$ in \bar{A} .

TEOREMA. — *Sia $u(x, t)$ una funzione continua in B ed ivi dotata delle derivate continue $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$, soluzione del problema di Dirichlet*

$$(5) \quad u_t - Lu = f \quad \text{in } B,$$

$$(6) \quad u = g \quad \text{in } \bar{A}, \quad u = h \quad \text{in } D^{(4)}.$$

Se u possiede le derivate $u_{tt}, u_{tx_i}, u_{tx_i x_j}$ continue in $B - (A + D)$, posto

$$M_1 = \min \left\{ 0, \min_{x \in \bar{A}} Lg(x), \min_{(x, t) \in D} h_t(x, t) \right\},$$

$$M_2 = \max \left\{ 0, \max_{x \in \bar{A}} Lg(x), \max_{(x, t) \in D} h_t(x, t) \right\},$$

risulta

$$(7) \quad M_1 \leq u_t \leq M_2 \quad \text{in } B.$$

(3) L. Nirenberg ci ha osservato che ponendo $v = \Delta u$, ove u è data dalla (1), si ha $v_t = \Delta v$ con condizione iniziale $v(x, 0) = \Delta g \geq 0$. Pertanto egli ha supposto che vi debba essere un collegamento fra la positività di $v = \Delta u = u_t$ e il principio di massimo per l'equazione del calore. Mentre tale collegamento non sembra pratico per il problema fin quà considerato, nella seconda parte di questa Nota studiamo un problema di Dirichlet per equazioni paraboliche impiegando nella dimostrazione della crescita della soluzione il principio di massimo.

(4) Osserviamo che per le supposte proprietà di differenziabilità di u deve essere $g = h$ e $h_t = Lg + f$ nei punti comuni ad \bar{A} e D .

Posto $v = u_t$, dalle (5), (6) segue

$$\begin{aligned} v_t &= L v \quad \text{in } B - (A + D), \\ v &= L g \quad \text{in } \bar{A}, \quad v = h_t \quad \text{in } D. \end{aligned}$$

Per un noto teorema di M. Picone⁽⁵⁾ il minimo valore di v in B se non è positivo è assunto in $A + D$ e pertanto $v \geq M_1$.

Analogamente per il massimo di v .

In particolare *se alle ipotesi del precedente teorema si aggiungono le condizioni*

$$(8) \quad L g \geq 0 \quad \text{in } \bar{A}, \quad h_t(x, t) \geq 0 \quad \text{in } D,$$

ne segue

$$u_t(x, t) \geq 0 \quad \text{in } B,$$

analogamente al precedente risultato per l'equazione del calore. Infatti la prima condizione (8) è una generalizzazione della disuguaglianza $\Delta g \geq 0$.

Supponendo u sufficientemente differenziabile in B , oltre alle ipotesi del teorema, si ottiene anche

$$\begin{aligned} \min \left\{ 0, \min_{x \in \bar{A}} L^n g(x), \min_{(x, t) \in D} \frac{\partial^n h(x, t)}{\partial t^n} \right\} &\leq \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \leq \\ \max \left\{ 0, \max_{x \in \bar{A}} L^n g(x), \max_{(x, t) \in D} \frac{\partial^n h(x, t)}{\partial t^n} \right\}, &\quad \text{in } B \text{ per } n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Basta infatti porre $v = \frac{\partial^n u}{\partial t^n}$ e ripetere la stessa dimostrazione del teorema.

Osserviamo inoltre che dalle limitazioni per u_t seguono anche limitazioni per u_{x_i} , $u_{x_i x_j}$. Infatti fissato un numero τ , $0 \leq \tau \leq 1$, indicato con B_τ l'insieme dei punti (x, t) di B per i quali $t = \tau$ e posto $F(x, t) = u_t(x, t) - f(x)$, la funzione u verificante le (5), (6) è soluzione del seguente problema di Dirichlet nelle x_i :

$$L u(x, \tau) = F(x, \tau) \quad \text{in } B_\tau, \quad u = h \quad \text{in } B_\tau \cdot D,$$

ove τ figura come parametro. Per le derivate u_{x_i} , $u_{x_i x_j}$ sussistono le note maggiorazioni di Schauder e Caccioppoli in dipendenza del massimo del valore assoluto di F e quindi del massimo di $|f|$ e di $|u_t|$ che è già maggiorato dalla (7). In una prossima pubblicazione le limitazioni ottenute in questa Nota saranno impiegate per stabilire l'esistenza della soluzione dei problemi considerati. A parte ciò ci proponiamo di darne applicazioni al calcolo numerico delle soluzioni.

Segnaliamo infine che non vi sono sostanziali difficoltà a considerare nella equazione (5) anche coefficienti dipendenti da t pur ciò comportando una minore semplicità di risultati. Inoltre la ipotesi del Teorema che u sia dotata delle derivate parziali u_{tt} , u_{x_i} , $u_{tx_i x_j}$ può essere eliminata con un passaggio al limite da soluzioni più differenziabili a soluzioni dotate solamente delle derivate che figurano nell'equazione.

(5) M. PICONE, *Sulla propagazione del calore in un mezzo conduttore, isotropo, omogeneo*, «Math. Ann.», 101, pp. 701-712 (1929).

Analisi matematica. — *Sul calcolo del massimo modulo delle radici dell'equazione caratteristica di una matrice.* Nota (*) di WOLF GROSS, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nella presente Nota verranno dimostrati dei semplici teoremi riguardanti il massimo modulo delle radici dell'equazione caratteristica di una matrice quadrata.

Nel seguito con la parola matrice si intenderà sempre una matrice quadrata di un ordine prefissato n i cui elementi a_{ik} , con $1 \leq i, k \leq n$, sono numeri complessi. Si indicherà inoltre con:

$\mu(a) = \max_{1 \leq i, k \leq n} |a_{ik}|$ il massimo modulo degli elementi della matrice a ,

$\rho(a)$ il massimo modulo delle radici dell'equazione caratteristica della matrice a .

Sia ora definita per tutte le matrici una funzione φ che soddisfa le seguenti condizioni.

(A) $\varphi(a)$ è una funzione continua, non negativa degli elementi di a e verifica la relazione di omogeneità:

$$\varphi(\gamma a) = \gamma \varphi(a)$$

per ogni matrice a e numero reale non negativo γ .

(B) $\varphi(a) = 0$ implica $a = 0$.

Dimostreremo che:

I. — Se la φ soddisfa le (A) e (B), esiste una costante λ indipendente da a tale che per ogni matrice a vale la relazione:

$$\rho(a) \leq \lambda^{1/r} \varphi(a^r)^{1/r}.$$

II. — Se la φ soddisfa le (A) e (B), si ha per ogni matrice a :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(a^r)^{1/r} = \rho(a).$$

Si osservi che mentre la funzione $\mu(a)$ soddisfa le (A) e (B), la $\rho(a)$ soddisfa solamente la (A). Per quest'ultima si ha inoltre la nota relazione dall'algebra delle matrici:

$$(1) \quad \rho(a^r) = \rho(a)^r.$$

Inoltre in virtù della (A) (postovi $\gamma = 0$) si ha $\varphi(0) = 0$.

La dimostrazione del teorema I si basa sul seguente lemma.

Se la φ soddisfa la (A), esiste una costante reale β indipendente da a tale che per ogni matrice a si ha:

$$(2) \quad \varphi(a) \leq \beta \mu(a),$$

(*) Redatta all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

se, inoltre, essa soddisfa anche la (B) esiste una costante positiva α indipendente da a tale che per ogni matrice a si ha:

$$(3) \quad \varphi(a) \geq \alpha \mu(a).$$

Si consideri l'insieme S delle matrici b che soddisfano la relazione $\mu(b) = 1$. I punti, aventi per coordinate le parti reali e immaginarie degli elementi delle matrici di S , formano un insieme chiuso e limitato nello spazio a $2n^2$ dimensioni. Essendo per la (A) la φ una funzione continua in questo spazio, essa assumerà in S un massimo β e un minimo α . Inoltre quest'ultimo viene assunto per una matrice b_0 con $\mu(b_0) = 1$ e quindi $b_0 \neq 0$, per cui nel caso che sia soddisfatta la (B), si avrà $\alpha = \varphi(b_0) > 0$. Si consideri ora una generica matrice a . Se $a = 0$ le (2) e (3) risultano soddisfatte. Se $a \neq 0$ allora la matrice $\frac{a}{\mu(a)}$ appartiene a S e avendosi per la (A):

$$\varphi\left(\frac{1}{\mu(a)} a\right) = \frac{1}{\mu(a)} \varphi(a),$$

si deduce immediatamente

$$\alpha \leq \frac{1}{\mu(a)} \varphi(a) \leq \beta,$$

che si identifica con la (2) e (3).

Per dimostrare il teorema I basta dimostrare, nelle ipotesi (A) e (B) l'esistenza di una costante λ indipendente da a tale che per ogni matrice a si abbia:

$$(4) \quad \rho(a) \leq \lambda \varphi(a).$$

Infatti posto a^r al posto di a e applicando la (1) si ottiene dalla (4) il teorema. Siccome la funzione ρ soddisfa la (A) esiste, in virtù del lemma precedente, una costante β' indipendente da a tale che per ogni matrice a si ha:

$$\rho(a) \leq \beta' \mu(a),$$

che combinata con la (3) dà immediatamente:

$$\rho(a) \leq \frac{\beta'}{\alpha} \varphi(a),$$

cioè la (4).

Con ciò il teorema I risulta dimostrato. Passando al limite per $r \rightarrow \infty$ si perviene inoltre alla relazione:

$$(5) \quad \lim_{r \rightarrow \infty}' \varphi(a^r)^{1/r} \geq \rho(a).$$

Per dimostrare il teorema II basta quindi dimostrare che:

Se la φ soddisfa la (A), si ha per ogni matrice a :

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty}'' \varphi(a^r)^{1/r} \leq \rho(a).$$

Si consideri, indicando con ζ una variabile complessa e con e la matrice unità, il noto sviluppo in serie di Neumann:

$$(7) \quad (e - \zeta a)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} a^r \zeta^r.$$

Essendo gli elementi del primo membro della (7) delle funzioni razionali di ζ prive di poli nell'interno del cerchio $|\zeta| \leq \frac{1}{\rho(a)}$, vi convergeranno assolutamente le n^2 serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} (a^r)_{ik} \zeta^r, \quad 1 \leq i, k \leq n,$$

e di conseguenza anche la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} \mu(a^r) \zeta^r.$$

In virtù della (2) quindi anche la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} \varphi(a^r) \zeta^r$$

avrà un raggio di convergenza non inferiore a $1/\rho(a)$. D'altronde questo raggio di convergenza è, per il teorema di Cauchy, dato da: $1/\lim_{r \rightarrow \infty}'' \varphi(a^r)^{1/r}$, per cui si ha:

$$\frac{1}{\lim_{r \rightarrow \infty}'' \varphi(a^r)^{1/r}} \geq \frac{1}{\rho(a)},$$

che è equivalente alla (6). Così risulta dimostrato il teorema II.

OSSERVAZIONE. — Tornando al teorema I, può risultare spesso interessante esprimere la costante λ che vi compare, mediante un'altra che interviene in una proprietà intrinseca della φ . Questo si può fare se alla condizione (A) si aggiunge la più restrittiva:

(A') $\varphi(\xi a) = |\xi| \varphi(a)$ per ogni matrice a e numero complesso ξ .

Dimostreremo anzitutto:

III. — Se la φ soddisfa le (A) e (B), esiste una costante ν indipendente da a e b tale che per ogni coppia di matrici a, b si ha:

$$\varphi(ab) \leq \nu \varphi(a) \varphi(b).$$

Si osservi che si ha:

$$\mu(ab) = \max_{1 \leq i, k \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right| \leq \max_{1 \leq i, k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |b_{jk}| \leq n \mu(a) \mu(b).$$

Applicando ora le (2), (3) e la relazione precedente si ha:

$$\varphi(ab) \leq \beta \mu(ab) \leq n \beta \mu(a) \mu(b) \leq \frac{n\beta}{\alpha^2} \varphi(a) \varphi(b),$$

cioè il teorema. Ora possiamo dimostrare:

IV. - Se la φ soddisfa le (A), (A') e (B), una costante che soddisfa le condizioni del teorema III soddisfa anche quelle del teorema I.

Sia ξ un autovalore di a con $|\xi| = \rho(a)$; come b del teorema III si scelga una matrice di cui la prima colonna è costituita da un autovettore relativo a ξ di a , e i rimanenti elementi sono nulli. Si ha evidentemente $b \neq 0$ e quindi $\varphi(b) \neq 0$ ed inoltre:

$$ab = \xi b.$$

Applicando a questa relazione la (A') ed il teorema III si ha:

$$\rho(a) \varphi(b) = \varphi(\xi b) = \varphi(ab) \leq \nu \varphi(a) \varphi(b),$$

da cui, avendosi $\varphi(b) \neq 0$, risulta:

$$\rho(a)' \leq \nu \varphi(a),$$

che coincide con la (4) dalla quale, come si è visto, segue il teorema I.

Geometria. — *Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche.* Nota II^(*) di ERMANNO MARCHIONNA, presentata^(**) dal Socio O. CHISINI.

4. Riteniamo utile aggiungere alcune osservazioni sui legami delle varie irregolarità di V_d con le deficienze con le sovrabbondanze di certi sistemi lineari tracciati su V_d .

Indichiamo con E la sezione di V_d con un generico iperpiano S_{r-1} ; come al solito E^h sarà l'intersezione di h varietà generiche di $|E|$; potremo quindi supporre che E^h sia la sezione di V_d con uno spazio S_{r-h} . Sia $P_g(V_d)$ il genere geometrico di V_d .

Severi definisce *irregolarità d -dimensionale* di V_d la differenza

$$q_d(V_d) = P_g(V_d) - P_a(V_d)$$

ed assume come *irregolarità $(d-h)$ -dimensionale* di V_d l'irregolarità $(d-h)$ -dimensionale di E^h , cioè

$$q_{d-h}(V_d) = q_{d-h}(E^h) = P_g(E^h) - P_a(E^h) \quad (24).$$

Osserviamo ora che, se $|K|$ è il sistema canonico di V_d , si ha

$$(I_4) \quad s|K| = q_d(V_d) \quad (25).$$

(*) Continuazione della Nota I apparsa in questo Volume dei « Rendiconti », a p. 396

(**) Nella seduta dell'8 marzo 1958.

(24) SEVERI [10], p. 160.

(25) Infatti $s|K| = \dim |K| - \delta(K) + (-1)^d j|K|$; $\dim |K| = P_g(V_d) - 1$; $\delta(K) = P_a(V_d) - 1 + (-1)^d$; $j|K| = 1$; di qui l'asserto.

Analogamente, se $K(X^h)$ indica il sistema canonico di una varietà non singolare $(d-h)$ -dimensionale X^h , si avrà

$$(2_4) \quad s|K(X^h)| = q_{d-h}(X^h);$$

in particolare

$$q_{d-h}(V_d) = q_{d-h}(E^h) = s|K(E^h)|.$$

Ciò posto, ricordiamo che, qualora i sistemi $|X|$ ed $|X + D - K|$ siano ampi, le singole deficienze dei sistemi $|D + iX| \cdot X^i$ dipendono solo da $|D|$ e non dal sistema ausiliario $|X|$ ⁽²⁶⁾. Pertanto le varie sovrabbondanze $s||D + iX| \cdot X^i|$, che compaiono nelle relazioni scritte nel comma *m*) del n. 3 (Nota I), dipendono soltanto da $|D|$.

In particolare le sovrabbondanze $s||K + iX| \cdot X^i|$ non dipendono dal sistema $|X|$, purché $|X|$ sia ampio; e siccome il sistema $|E|$ è ampio, si ha

$$s||K + iX| \cdot X^i| = s||K + iE| \cdot E^i| = s|K(E^i)| = q_{d-i}(V_d).$$

D'altra parte

$$s||K + iX| \cdot X^i| = s|K(X^i)| = q_{d-i}(X^i);$$

quindi

$$q_{d-i}(X^i) = q_{d-i}(V_d).$$

Per semplicità porremo nel seguito $q_s(V_d) = q_s$.

Dalle cose dette si deduce che per $D = K$ le relazioni scritte nel comma *m*) del n. 3 (Nota I) diventano

$$(3_4) \quad \text{def}|K + iX| \cdot X^i = q_{d-i+1} + q_{d-i};$$

in particolare per $i = d-1$ (essendo $q_1 = 0$) si ha

$$(4_4) \quad \text{def}|K + (d-1)X| \cdot X^{d-1} = q_2 \quad (27).$$

Verifichiamo ora che

$$(5_4) \quad s|D| = (-1)^d s|K - D|.$$

Scegliamo il sistema ausiliario ampio $|X|$ in modo che sia ampio non solo $|X + D - K|$ ma anche $|X + (K - D) - K| = |X - D|$.

(26) Cfr. HODGE [3], p. 294.

(27) Queste relazioni si trovano scritte in forma equivalente a p. 295 della Nota [3] di HODGE. Infatti ivi si prova che $\text{def}|K + iX| \cdot X^i$ uguaglia il numero g_{d-i} degli integrali $(d-i)$ -pli di prima specie indipendenti attaccati a V_d , e tale numero è appunto uguale alla somma $q_{d-i+1} + q_{d-i}$, (come ha mostrato SEVERI in [10], p. 187).

Per $i = 1$, la (3₄) è contenuta parzialmente in noti teoremi dovuti rispettivamente ad ENRIQUES e SEVERI (cfr. ad esempio [1], p. 112; [8] n. 20).

Allora possiamo applicare la (1₃) della Nota I non solo al sistema $|D|$ ma anche a $|K - D|$. Si ha così

$$s|D| = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{def} |D + iX| \cdot X^i;$$

$$s|K - D| = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{def} |K - D + iX| \cdot X^i.$$

Ma

$$(6_4) \quad \text{def} |D + iX| \cdot X^i = \text{def} |K - D + (d-i)X| \cdot X^{d-i} \quad (28);$$

di qui segue appunto che $s|D| = (-1)^d s|K - D|$.

Ciò mostra tra l'altro che, se Z è lo zero dell'equivalenza ipersuperficiale, si ha

$$(7_4) \quad s|Z| = (-1)^d s|K| = (-1)^d q_d.$$

Inoltre, se nella (6₄) si pone $D = Z$ (cosa lecita se $X - K$ è ampio, il che implica che X sia non speciale e regolare ⁽²⁹⁾) si ottiene

$$\text{def} |iX| \cdot X^i = \text{def} |K + (d-i)X| \cdot X^{d-i};$$

e, tenendo conto delle (3₄), (4₄),

$$\text{def} |iX| \cdot X^i = q_{i+1} + q_i \quad (\text{per } i > 1)$$

$$\text{def} |X| \cdot X = q_2 \quad (30).$$

La (7₃) della Nota I per $D = Z$ diventa

$$s|Z| = \text{def} |X| \cdot X - s||X| \cdot X|$$

cioè

$$s||X| \cdot X| = q_2 + (-1)^{d+1} q_d.$$

Riassumendo: *La sovrabbondanza del sistema caratteristico ⁽³¹⁾ di un sistema ampio $|X|$, sufficientemente ampio rispetto al sistema canonico $|K|$, è uguale a $q_2 + (-1)^{d+1} q_d$ ⁽³²⁾.*

5. Diamo ora una nuova dimostrazione della (5₄). Tale dimostrazione è basata su ipotesi leggermente più restrittive, ma mette in luce un'altra relazione (la 3₅) che ci sembra di qualche interesse.

(28) Cfr. [3], p. 296. Hodge perviene alla (6₄) sfruttando il Teorema di dualità di SERRE (Cfr. [7]).

(29) Si ricordi il teorema II di Kodaira riportato nel n. 1 (Nota I).

(30) Queste due uguaglianze sono equivalenti alla relazione: $\text{def} |iX| \cdot X^i = g_i$, determinata da HODGE in [3], p. 295.

La relazione $\text{def} |X| \cdot X = q_2$ è contenuta in un teorema di KODAIRA avente portata più ampia (cfr. [4], p. 123). Tale teorema estende classici risultati di CASTELNUOVO (cfr. ad esempio [1], p. 136) e di B. SEGRE ([6], n. 54).

(31) Questo sistema è a priori incompleto: la sua sovrabbondanza è per definizione quella del sistema completo $||X| \cdot X|$ da esso individuato.

(32) Facciamo notare che - a differenza della trattazione svolta nei nn. 2, 3 (Nota I) - le dimostrazioni delle relazioni (3₄) e seguenti sono subordinate alla teoria dei «faisceaux», in quanto dipendono da risultati di Hodge ottenuti con detta teoria.

Verifichiamo innanzitutto per altra via che

$$s|Z| = (-1)^d q_d.$$

Infatti

$$s|Z| = \dim|Z| - \delta(Z) + (-1)^d j|Z| \quad ; \quad \dim|Z| = 0;$$

$$j|Z| = P_g(V_d) \quad ; \quad \delta(Z) = (-1)^d p_a(V_d) \quad ; \quad p_a(V_d) = P_a(V_d) \quad (33)$$

quindi

$$s|Z| = (-1)^d (P_g(V_d) - P_a(V_d)) = (-1)^d q_d.$$

Ciò posto, sia D un'ipersuperficie non singolare di V_d , e $|K|$ il sistema canonico di V_d (effettivo o virtuale). La dimostrazione della

$$s|D| = (-1)^d s|K - D|$$

si ottiene appoggiandosi alla (8_r) della Nota I:

$$(-1)^{d+1} (j|C| - j|A| - j|C \cdot B|) = s|A| - s|C| + s||C| \cdot B| - \text{def}|C| \cdot B.$$

Poniamo dapprima $C = D$, $B = D$, quindi $A = C - B = Z$. Si ha

$$j|C| = \dim|K - D| + 1 \quad ; \quad j|A| = \dim|K| + 1;$$

$$j||C| \cdot B| = \dim||K| \cdot D| + 1 \quad (34).$$

D'altra parte

$$\dim|K| = \dim|K - D| + \dim|K| \cdot D + 1,$$

$$\dim|K| \cdot D = \dim||K| \cdot D| - \text{def}|K| \cdot D;$$

sostituendo il tutto nella (8_r) si ottiene

$$(1_5) \quad (-1)^{d+1} \text{def}|K| \cdot D = s|Z| - s|D| + s||D| \cdot D| - \text{def}|D| \cdot D.$$

Poniamo ora $C = K$, $B = D$, $A = C - B = K - D$. Si ha

$$j|C| = 1, \quad j|A| = \dim|D| + 1, \quad j||C| \cdot B| = j||K| \cdot D| = \dim||D| \cdot D| + 1$$

e, poiché $\dim|D| \cdot D = \dim|D| - 1$, si deduce:

$$j|C| - j|A| + j||C| \cdot B| = \text{def}|D| \cdot D.$$

Sostituendo nella (8_r) si ottiene

$$(2_5) \quad (-1)^{d+1} \text{def}|D| \cdot D = s|K - D| - s|K| + s||K| \cdot D| - \text{def}|K| \cdot D.$$

Siccome $s|Z| = (-1)^d q_d$, $s|K| = q_d$, le (1₅), (2₅) diventano rispettivamente

$$(3_5) \quad (-1)^{d+1} \text{def}|K| \cdot D + \text{def}|D| \cdot D = (-1)^d q_d - s|D| + s||D| \cdot D|,$$

$$(4_5) \quad (-1)^{d+1} \text{def}|D| \cdot D + \text{def}|K| \cdot D = -q_d + s|K - D| + s||K| \cdot D|.$$

Pertanto per d pari si ha

$$(5_5) \quad s|D| - s||D| \cdot D| = s|K - D| + s||K| \cdot D|,$$

(33) KODAIRA-SPENCER [5].

(34) Questo perché $|K(D)| = ||K + D| \cdot D|$.

e per d dispari

$$(6_5) \quad s|D| - s||D| \cdot D| = -s|K - D| - s||K| \cdot D|.$$

Notiamo che i sistemi $||K| \cdot D|$ e $||D| \cdot D|$ sono residui l'uno dell'altro rispetto al sistema canonico della varietà $(d-1)$ -dimensionale D . Ora se la proprietà da dimostrare è vera per le V_{d-1} (ed allora si ha $s||D| \cdot D| = (-1)^{d-1} s||K| \cdot D|$) essa risulta valida anche per le V_d : ciò segue dalla (5_5) per d pari, e dalla (6_5) per d dispari. Basta quindi che il teorema sussista per $d = 2$. Ma ciò è notorio⁽³⁵⁾; pertanto l'asserto è dimostrato.

Osservazione. - Per le cose dette si ha

$$\dim|D| = \delta(D) + (-1)^{d+1}(\dim|K - D| + 1) + s|D|;$$

$$\dim|K - D| = \delta(K - D) + (-1)^{d+1}(\dim|D| + 1) + (-1)^d s|D|.$$

Di qui si ricava che le dimensioni virtuali di due sistemi residui l'uno dell'altro rispetto al sistema canonico sono legate dalle seguenti relazioni:

$$\delta(D) + \delta(K - D) + 2 = 0, \quad \text{per } d \text{ dispari};$$

$$\delta(D) = \delta(K - D), \quad \text{per } d \text{ pari};$$

(cose notissime per $d = 1, 2$).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1948.
- [2] F. HIRZBRUCH, *Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, «Ergebnisse der Mathematik», Neue Folge, 9 (1956).
- [3] W. V. D. HODGE, *A note on the Riemann-Roch theorem*, «Journ. London Math. Soc.», 30 (1955).
- [4] K. KODAIRA, *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, «Ann. of Mathem.», 59 (1954).
- [5] K. KODAIRA e D. C. SPENCER, *On arithmetic genera of algebraic varieties*, «Proc. Nat. Acad. U.S.A.», 39 (1953).
- [6] B. SEGRE, *Quelques résultats nouveaux dans la géométrie sur une V_3 algébrique*, «Mem. Acad. Roy. Belgique» (2), 14 (1936).
- [7] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité*, «Comm. Math. Helvet.», 29 (1955).
- [8] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, «Rend. Circ. Matem. Palermo», 28 (1909).
- [9] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (2ª memoria) «Annali di Matem.» (4), 32 (1951).
- [10] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (3ª memoria) «Annali di Matem.» (4), 41 (1956).
- [11] D. C. SPENCER, *Cohomologie and the Riemann-Roch theorem*, «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 39 (1953).
- [12] O. ZARISKI, *Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi*, «Ann. of Math.», 55 (1952).

(35) Cfr. ENRIQUES, [1] p. 134. D'altra parte la cosa si ottiene immediatamente dalla (5_5) osservando che per $d = 2$ le sovrabbondanze $s||D| \cdot D|$ ed $s||K| \cdot D|$ sono nulle, perché relative a serie lineari della curva D .

Geometria. — *Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta.* Nota II di EDOARDO VESENTINI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Parte dei risultati conseguiti nella Nota precedente avente lo stesso titolo⁽¹⁰⁾, relativamente a particolari tipi di strutture analitiche complesse sopra una varietà kähleriana compatta V , fibrato da rette complesse, sussistono per più generali tipi di strutture fibrato analitiche complesse su V , aventi per fibre degli spazi vettoriali complessi di dimensione complessa qualsiasi. Il punto di partenza per tali estensioni essendo ancora una disuguaglianza integrale⁽¹¹⁾, e la tecnica sostanzialmente la medesima della Nota I continuiamo quest'ultima con le seguenti considerazioni, che ne costituiscono un naturale complemento.

7. Sia data sopra la varietà kähleriana compatta V , di dimensione complessa n , una struttura fibrato W — avente per fibra uno spazio vettoriale complesso \mathbf{C}_m , di dimensione complessa $m (\geq 1)$, e per gruppo di struttura il gruppo lineare complesso $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$ operante su \mathbf{C}_m — definita, in relazione al ricoprimento coordinato $\{U_j\}$ (considerato nel n. 1), da un sistema di funzioni di transizione $\{w_{jk}\}$ i cui elementi sono rappresentazioni di classe C^∞

$$w_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbf{C}),$$

tali che

$$w_{jk} \cdot w_{kl} = w_{jl} \quad \text{in } U_j \cap U_k \cap U_l.$$

Nel seguito supporremo che W sia analitica complessa — cioè che gli elementi della matrice $w_{jk} \in \mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$ siano funzioni olomorfe in $U_j \cap U_k$ — e daremo ad una struttura siffatta il nome di \mathbf{C}_m -struttura.

Com'è noto, è possibile ridurre il gruppo di struttura $\mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$ di W al gruppo unitario $\mathbf{U}(m)$, ossia esistono delle rappresentazioni di classe C^∞

$$v_j : U_j \rightarrow \mathbf{GL}(m, \mathbf{C})$$

e

$$u_{jk} : U_j \cap U_k \rightarrow \mathbf{U}(m)$$

tali che in $U_j \cap U_k$ sia

$$(20) \quad w_{jk} = v_j^{-1} \cdot u_{jk} \cdot v_k.$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(10) E. VESENTINI, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8) 23, 232–241 (1957), da citarsi nel seguito come Nota I. Le numerazioni dei paragrafi e delle formule nella presente Nota II proseguono quelle della Nota I.

(11) Dovuta a S. NAKANO ([11], Lemma 1, p. 7). I numeri in parentesi quadra rinviano alla Bibliografia; e precisamente a quella posta alla fine della Nota I o della presente Nota II, secondochè essi sono compresi fra [1] e [8] o fra [9] e [12].

Denotando con $(\bar{v}_j)_{-1}$ la matrice trasposta della complessa coniugata \bar{v}_j di v_j , la matrice $h_j = \| h_{j\lambda\mu} \|$ ($\lambda, \mu = 1, 2, \dots, m$) espressa dalla

$$(21) \quad h_j = (\bar{v}_j)_{-1} \cdot v_j,$$

è una matrice hermitiana definita positiva in U_j . La matrice

$$(22) \quad \theta_j = h_j^{-1} \cdot \partial h_j$$

definisce una connessione in W , la cui forma di curvatura è espressa dalla

$$(23) \quad \Theta_j = \bar{\partial} \theta_j \quad (12).$$

Posto

$$(24) \quad \chi_j = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \Theta_j,$$

risulta

$$(\bar{\chi}_j)_{-1} = h_j \cdot \chi_j \cdot h_j^{-1},$$

ossia

$$(25) \quad h_j \cdot \chi_j = (\bar{h}_j \chi_j)_{-1};$$

$h_j \chi_j$ è dunque una matrice hermitiana.

OSSERVAZIONE. - Nel caso in cui sia $m = 1$, cioè qualora W sia una struttura analitica di rette complesse, F , definita dalle funzioni di transizione

$$f_{jk} = w_{jk},$$

riprendendo le notazioni del n. 1, si riconosce subito che può assumersi nella (21).

$$h_j = a_j^{-1},$$

avendosi così, in base alle (22) e (23),

$$\theta_j = -\partial \log a_j,$$

e

$$\Theta_j = \partial \bar{\partial} \log a_j.$$

Pertanto in questo caso la χ_j espressa dalla (24) coincide con la γ_j definita dalla (1) (13).

Sia φ una forma differenziale esterna di tipo (p, q) a coefficienti in W . Rispetto al ricoprimento coordinato $\{U_j\}$ considerato, φ è definita localmente in U_j da una matrice $\varphi_j = \| \varphi_j^\lambda \|_{-1}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, m$) a m righe ed una colonna, i cui elementi φ_j^λ sono forme differenziali definite in U_j , di classe C^∞ e tipo (p, q) , tali che risulti identicamente in $U_j \cap U_k$

$$\varphi_j = w_{jk} \cdot \varphi_k.$$

(12) Cfr. [11], § 2, pp. 5-6. Per le nozioni sulle connessioni negli spazi fibrati, cfr. [9] e [10] Chap. 3.

(13) La χ_j definita dalla (24) differisce per il segno dalla omonima matrice χ_j definita da S. Nakano con la formula (1.10) di [11]. Abbiamo introdotto questo cambiamento di segno - di cui va tenuto conto qualora si confronti la (27) con il Lemma 1 di [11] - per rispettare completamente l'analogia testè rilevata, con il caso $m = 1$.

Da quest'ultima relazione e dalla (20) segue che, se $\psi = \{\psi_j = \|\psi_j^\lambda\|_{-1}\}$ ($\lambda = 1, 2, \dots, m$) è un'altra forma differenziale esterna di tipo (p, q) , a coefficienti in W , risulta identicamente in $U_j \cap U_k$

$$\sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} h_{j \lambda \mu} \varphi_j^\mu \wedge * \bar{\psi}_j^\lambda = \sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} h_{k \lambda \mu} \varphi_k^\mu \wedge * \bar{\psi}_k^\lambda,$$

sicché è possibile definire il *prodotto interno* (φ, ψ) mediante l'integrale

$$(26) \quad (\varphi, \psi) = \int_V \sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} h_{j \lambda \mu} \varphi_j^\mu \wedge * \bar{\psi}_j^\lambda.$$

Denotando con $e(\chi)$ il prodotto esterno di χ per φ , S. Nakano ha dimostrato ([11], Lemma 1, p. 7) che, *qualora* φ *sia armonica* ⁽¹⁴⁾, *risulta*

$$(27) \quad (e(\chi) \wedge \varphi, \varphi) \leq 0.$$

8. Qualora la forma φ sia di tipo (n, p) o (p, n) (con $p > 0$), l'integrando del primo membro della (27) può essere esplicitato agevolmente. Siano anzitutto:

$$(28) \quad \varphi_j^\lambda = \frac{1}{p!} \varphi_{j \alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1^* \dots \beta_p^*} dz_j^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge \bar{dz}_j^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \bar{dz}_j^{\beta_p} \quad (\beta_1, \dots, \beta_p = 1, \dots, n),$$

$$(29) \quad \varphi_j^\lambda = \frac{1}{p!} \varphi_{j \alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1^* \dots \beta_p^*} dz_j^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge \bar{dz}_j^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \bar{dz}_j^{\beta_p} \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_p = 1, \dots, n),$$

le rappresentazioni locali della componente λ -esima φ_j^λ di $\varphi = \{\varphi_j = \|\varphi_j^\lambda\|_{-1}\}$ ($\lambda = 1, \dots, m$) — secondoché φ è di tipo (n, p) o (p, n) ; e

$$\chi_{j \nu \lambda} = \sqrt{-1} \chi_{j \nu \lambda \alpha \beta^*} dz_j^\alpha \wedge \bar{dz}_j^\beta \quad (\nu, \lambda = 1, \dots, m; \alpha, \beta = 1, \dots, n),$$

la rappresentazione locale dell'elemento $\chi_{j \nu \lambda}$ della matrice $\chi_j = \|\chi_{j \nu \lambda}\|$.

Essendo

$$ds^2 = 2 g_{\alpha \beta^*} dz^\alpha \bar{dz}^{\beta^*} \quad (g_{\alpha \beta^*} = \bar{g}_{\beta \alpha^*})$$

la metrica Kähleriana fissata in V , dalle (28) e (29) discende che $\Lambda \varphi^\lambda$ è espresso in U_j rispettivamente dalle

$$\Lambda \varphi_j^\lambda = \frac{\sqrt{-1} (-1)^{(n-1)}}{p!} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} g^{\alpha \beta^*} \sum_{\beta_2 < \dots < \beta_p}^{1 \dots n} (-1)^\alpha \varphi_{j \alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1^* \dots \beta_p^*} dz_j^{\alpha_1} \wedge \dots$$

$$\dots \wedge \hat{dz}_j^{\alpha_p} \wedge \dots \wedge dz_j^{\alpha_2} \wedge \bar{dz}_j^{\beta_2} \wedge \dots \wedge \bar{dz}_j^{\beta_p},$$

$$\Lambda \varphi_j^\lambda = \frac{\sqrt{-1} (-1)^{n-1}}{p!} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} g^{\alpha \beta^*} \sum_{\alpha_2 < \dots < \alpha_p}^{1 \dots n} (-1)^\beta \varphi_{j \alpha_1 \dots \alpha_p \beta_1^* \dots \beta_p^*} dz_j^{\alpha_2} \wedge \dots$$

$$\dots \wedge dz_j^{\alpha_p} \wedge \bar{dz}_j^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \hat{\bar{dz}}_j^{\beta_p} \wedge \dots \wedge \bar{dz}_j^{\beta_2},$$

(14) Per le nozioni sulle forme armoniche a coefficienti in W , cfr. ad esempio [4], n. 15.4, p. 111-119. Qui uniamo le stesse notazioni di [11], [12].

sicché risulta rispettivamente

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \sum_{\varrho, \sigma}^{1 \dots m} h_{j \varrho \sigma} (e(\chi) \Lambda \varphi)^{(\sigma)} \wedge (*\bar{\varphi})^{(\varrho)} = \\
 & = c_1 H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*} \varphi_{j 1 \dots n \beta_1^* \dots \beta_p^*}^\lambda \cdot \overline{\varphi_{j 1 \dots n \varepsilon_1^* \dots \varepsilon_p^*}^\mu \cdot g^{\alpha \beta_1^*} \cdot g^{\varepsilon_1 \eta_1^*} \dots g^{\varepsilon_p \eta_p^*} \delta_{\eta_1^* \eta_2^* \dots \eta_p^*}^{\beta_1^* \beta_2^* \dots \beta_p^*}} dV \\
 (31) \quad & \sum_{\varrho, \sigma}^{1 \dots m} h_{j \varrho \sigma} (e(\chi) \Lambda \varphi)^{(\sigma)} \wedge (*\bar{\varphi})^{(\varrho)} = \\
 & = c_2 \cdot H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*} \cdot \varphi_{j \alpha_1 \dots \alpha_p 1^* \dots n^*}^\lambda \cdot \overline{\varphi_{j \varepsilon_1 \dots \varepsilon_p 1^* \dots n^*}^\mu \cdot g^{\alpha_1 \beta^*} \cdot g^{\eta_1 \varepsilon_1^*} \dots g^{\eta_p \varepsilon_p^*} \delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_p}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}} dV,
 \end{aligned}$$

ove: sono sottintese al solito delle sommatorie, rispetto agli indici ripetuti una volta in basso ed una volta in volta in alto, per $\lambda, \mu, \rho, \sigma = 1, \dots, m$; $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta, \beta_1, \dots, \beta_p = 1, \dots, n$, con la condizione $\alpha_2 < \dots < \alpha_p$, $\beta_2 < \dots < \beta_p$ ⁽¹⁵⁾; dV denota l'elemento di volume rispetto alla metrica kähleriana di V ; c_1 e c_2 sono due costanti numeriche *positive* (costruite con i fattoriali $(n-p)!, p!$ e con potenze di 2 che qui non interessa precisare); $H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*}$ è espresso dalla

$$(32) \quad H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*} = \sum_{\nu}^m h_{j \mu \nu} \chi_{\nu \lambda; \alpha \beta^*}.$$

Dalla (25) si trae che

$$H_{j \mu \beta; \lambda \alpha^*} = \bar{H}_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*};$$

ossia la matrice quadrata $\|H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*}\|$ di ordine mn , le cui righe e colonne corrispondono rispettivamente agli indici $\lambda \alpha$ e $\mu \beta$ ordinati lessicograficamente, è una matrice hermitiana ⁽¹⁶⁾.

Qualora le coordinate z_j^α in U_j siano scelte in guisa che valgano le (3) e (4), le (30) e (31) divengono in un punto $z \in U_j$ (n. 1), a meno di fattori *positivi* costanti (della natura di c_1 e c_2), c'_1 o c'_2

$$\begin{aligned}
 (30') \quad & \sum_{\varrho, \sigma}^{1 \dots m} h_{j \varrho \sigma} (e(\chi) \Lambda \varphi)^{(\sigma)} \wedge (*\bar{\varphi})^{(\varrho)} = \\
 & = c'_1 \cdot \sum_{\beta_2 < \dots < \beta_p} \left(\sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*} \varphi_{j 1 \dots n \alpha^* \beta_2^* \dots \beta_p^*}^\lambda \cdot \overline{\varphi_{j 1 \dots n \beta^* \beta_2^* \dots \beta_p^*}^\mu} \right) \cdot dV, \\
 (31') \quad & \sum_{\varrho, \sigma}^{1 \dots m} h_{j \varrho \sigma} (e(\chi) \Lambda \varphi)^{(\sigma)} \wedge (*\bar{\varphi})^{(\varrho)} = \\
 & = c'_2 \cdot \sum_{\beta_2 < \dots < \beta_p} \left(\sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*} \varphi_{j \beta_2 \dots \beta_p 1^* \dots n^*}^\lambda \cdot \overline{\varphi_{j \alpha \beta_2 \dots \beta_p 1^* \dots n^*}^\mu} \right) \cdot dV.
 \end{aligned}$$

(15) $\delta_{\eta_1^* \eta_2^* \dots \eta_p^*}^{\beta_1^* \beta_2^* \dots \beta_p^*}$ e $\delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_p}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p}$ denotano il classico tensore generalizzante il δ_i^k di Kronecker; cfr. ad esempio [5].

(16) [11], p. 8. Rileviamo che, in virtù del cambiamento di segno segnalato in ⁽¹³⁾, la matrice H_j differisce per il segno dalla omonima matrice introdotta da S. Nakano.

Esse risultano cioè delle somme, rispetto agli indici β_2, \dots, β_p ($\beta_2 < \dots < \beta_p$), delle forme hermitiane in parentesi rotonda.

Dalla diseuguaglianza (27) di S. Nakano consegue pertanto il

LEMMA 8.1. — *Supponiamo che le matrici hermitiane H_j siano semidefinite positive in ogni punto di U_j (per ogni $U_j \in \{U_j\}$). Ogni forma armonica $\varphi = \{\varphi_j = \|\varphi_j^\lambda\|_{-1}\} (\lambda = 1, \dots, m)$ di tipo (n, p) o (p, n) ($1 \leq p \leq n$) a coefficienti in W deve soddisfare nel punto z , rispettivamente, alle relazioni*

$$(33) \quad \sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*} \cdot \overline{\varphi_{j 1 \dots n \alpha^* \beta_2^* \dots \beta_p^*}^\lambda \cdot \varphi_{j 1 \dots n \beta^* \beta_2^* \dots \beta_p^*}^\mu} = 0,$$

$$(34) \quad \sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*} \cdot \overline{\varphi_{j \beta \beta_2 \dots \beta_p 1^* \dots n^*}^\lambda \cdot \varphi_{j \alpha \beta_2 \dots \beta_p 1^* \dots n^*}^\mu} = 0,$$

per ogni scelta di β_2, \dots, β_p , e rispetto ad un sistema di coordinate locali complesse z_j^α , in U_j , tali che nel punto z valgano le (3) e (4).

9. Supponiamo che in U_j sia possibile fissare un sistema di coordinate locali z_j^α , in guisa che per gli elementi della matrice H_j — che, riferiti al sistema z_j^α , denoteremo con $H'_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*}$ — si abbia identicamente in U_j

$$(35) \quad H'_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*} = 0 \quad \text{per } \lambda, \mu = 1, \dots, m; \alpha, \beta = b + 1, \dots, n,$$

— ove b è un intero opportuno, tale che $0 < b \leq n$ — mentre i rimanenti elementi $H'_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*}$ ($\lambda, \mu = 1, \dots, m; \alpha, \beta = 1, \dots, b$) costituiscono una matrice hermitiana definita positiva. Passiamo dalle coordinate z_j^α ad un sistema di coordinate t_j^α — tali che nel punto $z \in U_j$ considerato nel n. 8, siano soddisfatte le (3) e (4) — mediante le relazioni

$$z_j^\alpha = t_j^\alpha(z_j^\beta) \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n),$$

ove le $t_j^\alpha(z_j^\beta)$ sono funzioni di z_j^β olomorfe in U_j ed a determinante jacobiano diverso da zero in ogni punto di U_j . La matrice $H'_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*}$ ($\lambda, \mu = 1, \dots, m; \alpha, \beta = 1, \dots, n$) si trasforma nella matrice $H_{j \lambda \alpha; \mu \beta^*}$ i cui elementi sono espressi dalle

$$H_{j \lambda \alpha; \mu \beta} = \sum_{\varepsilon, \eta}^{1 \dots b} H'_{j \lambda \varepsilon; \mu \eta^*} \frac{\partial t_j^\varepsilon}{\partial z_j^\alpha} \overline{\frac{\partial t_j^\eta}{\partial z_j^\beta}} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, n; \lambda, \mu = 1, \dots, m),$$

sicchè le (33) e (34) si trasformano rispettivamente nelle relazioni

$$\sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} \sum_{\varepsilon, \eta}^{1 \dots b} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} H'_{j \lambda \varepsilon; \mu \eta^*} \frac{\partial t_j^\varepsilon}{\partial z_j^\alpha} \overline{\frac{\partial t_j^\eta}{\partial z_j^\beta}} \cdot \overline{\varphi_{j 1 \dots n \alpha^* \beta_2^* \dots \beta_p^*}^\lambda \cdot \varphi_{j 1 \dots n \beta^* \beta_2^* \dots \beta_p^*}^\mu} = 0,$$

$$(1 \leq \beta_2 < \dots < \beta_p \leq n)$$

$$\sum_{\lambda, \mu}^{1 \dots m} \sum_{\varepsilon, \eta}^{1 \dots b} \sum_{\alpha, \beta}^{1 \dots n} H'_{j \lambda \varepsilon; \mu \eta^*} \frac{\partial t_j^\varepsilon}{\partial z_j^\alpha} \overline{\frac{\partial t_j^\eta}{\partial z_j^\beta}} \cdot \overline{\varphi_{j \beta \beta_2 \dots \beta_p 1^* \dots n^*}^\lambda \cdot \varphi_{j \alpha \beta_2 \dots \beta_p 1^* \dots n^*}^\mu} = 0$$

che, essendo $\|H'_{j\lambda\alpha;\mu\beta}\|$ ($\lambda, \mu = 1, \dots, m; \alpha, \beta = 1, \dots, b$) definita positiva, equivalgono rispettivamente alle eguaglianze

$$dt_j^e \wedge * \varphi_j = 0$$

o

$$* \varphi_j \wedge \bar{dt}_j^e = 0$$

valide nel punto z , per $\varepsilon = 1, \dots, b$.

Passando di nuovo alle coordinate $z_j'^\alpha$, e denotando con φ'_j la forma φ_j riferita a queste ultime, si ha il

TEOREMA 9.1. - *Nelle ipotesi del Lemma 8.1, qualora in ogni intorno coordinato U_j sia possibile fissare un sistema di coordinate locali complesse $z_j'^\alpha$, tali che in U_j siano soddisfatte le (35), e che la matrice hermitiana $\|H'_{j\lambda\alpha;\mu\beta}\|$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, b; 0 < b \leq n$) sia definita positiva, ogni forma armonica $\varphi = \{\varphi_j\}$ (non identicamente nulla) di tipo (n, p) o (p, n) ($0 < p \leq n$) a coefficienti in W , è tale che, rispettivamente, i prodotti esterni*

$$dz_j'^1 \wedge \dots \wedge dz_j'^b \wedge \varphi'_j \quad \text{o} \quad \varphi'_j \wedge \bar{dz}_j'^1 \wedge \dots \wedge \bar{dz}_j'^b$$

non sono identicamente nulli in U_j .

COROLLARIO 9.2. - *Nelle ipotesi del teorema precedente, risulta*

$$H^{p,n}(V, W) = H^{n,p}(V, W) = 0$$

per $p > n - b$. In particolare, se $b = n$, non esiste alcuna forma armonica (non identicamente nulla) a coefficienti in W , di tipo (n, p) o (p, n) con $p > 0$ ⁽¹⁷⁾.

10. Sia W^* la \mathbf{C}_m -struttura duale di W , definita, rispetto al ricoprimento $\{U_j\}$, dalle funzioni di transizione $\{w_{jk}^*\}$, con

$$(36) \quad w_{jk}^* = (w_{jk})_{-1}^{-1} \in \mathbf{GL}(m, \mathbf{C}).$$

Dal teorema di dualità di Serre conseguono gli isomorfismi

$$H^{p,q}(V, W) = H^{n-p, n-q}(V, W^*),$$

che, in relazione al ricoprimento $\{U_j\}$, possono essere esplicitati nel modo seguente. Data la forma armonica $\varphi = \{\varphi_j = \|\varphi_j^\lambda\|_{-1}\}$ ($\lambda = 1, \dots, m$), di tipo (p, q) , a coefficienti in W , le forme

$$\psi_j = \bar{h}_j \cdot * \bar{\varphi}_j = \|\bar{h}_j \lambda_{\mu} \cdot * \bar{\varphi}_j^\mu\| \quad (\lambda = 1, \dots, m)$$

costituiscono le rappresentazioni locali in U_j di una forma armonica $\psi = \{\psi_j\}$ di tipo $(n - p, n - q)$, a coefficienti in W^* .

Dalle (20) e (36) si ha che

$$w_{jk}^* = v_j^{*-1} \cdot \bar{u}_{jk} \cdot v_k^*,$$

con

$$v_j^* = (v_j)_{-1}^{-1} \in \mathbf{GL}(m, \mathbf{C}) \quad , \quad v_k^* = (v_k)_{-1}^{-1} \in \mathbf{GL}(m, \mathbf{C}).$$

(17) Cfr. nel caso $(n, 1)$, il lemma 2 (p. 8) di [11]. Cfr. altresì [12], Theor. 4, 4.2, p. 24.

Pertanto, posto, analogamente al n. 7,

$$h_j^* = (\bar{v}_j^*)_{-1} \cdot v_j^*,$$

risulta

$$h_j^* = (h_j)_{-1}^{-1},$$

mentre la connessione $\theta_j^* = h_j^{*-1} \cdot \partial h_j^*$ in W^* è espressa dalla

$$\theta_j^* = (h_j)_{-1} \cdot \partial (h_j)_{-1}^{-1} = - (h_j^{-1} \cdot \partial h_j)_{-1} = - (\theta_j)_{-1},$$

e quindi la curvatura, $\Theta_j^* = \bar{\partial} \theta_j^*$, di quest'ultima è data dalla

$$\Theta_j^* = - (\Theta_j)_{-1}.$$

Avuto riguardo alle (24) e (32), dal teorema 9.1 segue il

TEOREMA 10.1. — *Sia W una \mathbf{C}_m -struttura su V , tale che le matrici hermitiane H_j associate a W siano semidefinite negative in ogni punto di U_j (per ogni $U_j \in \{U_j\}$). Qualora in ogni intorno coordinato U_j sia possibile fissare un sistema di coordinate locali z_j^α tali che in U_j valgano le (35) e che la matrice $\| H_{j\lambda\alpha; \mu\beta}^* \|$ ($\lambda, \mu = 1, \dots, m$; $\alpha, \beta = 1, \dots, b$; $0 < b \leq n$) sia definita negativa, ogni forma armonica $\varphi = \{\varphi_j\}$ di tipo $(0, p)$ o $(p, 0)$ ($0 \leq p < n$) a coefficienti in W , è tale che, rispettivamente, i prodotti esterni*

$$\varphi_j \wedge \overline{dz_j^\alpha} \quad (\text{se } \varphi \text{ è di tipo } (0, p)),$$

$$dz_j^\alpha \wedge \varphi_j \quad (\text{se } \varphi \text{ è di tipo } (p, 0))$$

si annullano identicamente in U_j , per $\alpha = 1, \dots, b$.

Dal corollario 9.2 si trae il

COROLLARIO 10.2. — *Nelle ipotesi del teorema precedente, risulta*

$$H^{0,p}(V, W) = H^{p,0}(V, W) = 0$$

per $p = 0, \dots, b-1$. In particolare, se $b = n$, non esiste alcuna forma armonica (non identicamente nulla) di tipo $(0, p)$ o $(p, 0)$, a coefficienti in W , con $p < n$ ⁽¹⁸⁾.

11. Una situazione del tipo indicato nel n. 11 può presentarsi ad esempio, qualora la varietà V possieda una proiezione olomorfa $\pi: V \rightarrow B$, del tipo considerato nel n. 6, sopra una varietà kähleriana compatta B , di dimensione complessa b . Rispetto ai ricoprimenti $\{U_j\}$ e $\{\mathcal{U}_j\}$ di V e di B considerati nella nota ⁽⁹⁾, a piè della p. 241 della Nota I, uniformizzati dalle coordinate locali complesse z_j^α ($\alpha = 1, \dots, n$) e ξ_j^τ ($\tau = 1, \dots, b$), π è rappresentata localmente dalle funzioni

$$\xi_j^\tau = g_j^\tau(z_j^\alpha),$$

olomorfe in U_j e soddisfacenti alle condizioni indicate (per le g^μ) nel primo capoverso del n. 6.

(18) Cfr. per un risultato analogo [12], Theor. 4, 4.2, p. 24.

Denotando con \tilde{W} una \mathbf{C}_m -struttura di base B , tale che le matrici hermitiane \tilde{H}_j di ordine mb , associate a W (nel senso indicato nel n. 8), in relazione al ricoprimento $\{\mathcal{U}_j\}$, siano *definite negative* in ogni punto di \mathcal{U}_j (per ogni $\mathcal{U}_j \in \{\mathcal{U}_j\}$), dal corollario 10.2 discende che *ogni forma armonica (non identicamente nulla) $\varphi = \{\varphi_j\}$ di tipo $(0, p)$ o $(p, 0)$, a coefficienti in $W = \pi^* \tilde{W}$, ha grado $p \geq b$* . Inoltre, dal teorema 10.1, si trae che in ogni U_j risulta identicamente

$$\varphi_j \wedge \overline{dg_j^\tau} = 0,$$

oppure

$$dg_j^\tau \wedge \varphi_j = 0,$$

per $\tau = 1, \dots, b$, secondoché, rispettivamente, φ sia di tipo $(0, p)$ o $(p, 0)$. Ne consegue che

La restrizione di ogni forma armonica φ di tipo $(0, p)$ o $(p, 0)$ a coefficienti in $W = \pi^ \tilde{W}$ ad una qualsiasi fibra non singolare (n. 6) di π è identicamente nulla.*

BIBLIOGRAFIA.

- [9] S. S. CHERN, *Differential geometry of fiber bundles*, « Proc. Int. Congr. of Math. » (Cambridge, Mass., 1950), vol. II, 397-441.
- [10] S. S. CHERN, *Topics in differential geometry*, Mimeographed Notes, « Institute for advanced study », Princeton, 1951.
- [11] S. NAKANO, *On complex analytic vector bundles*, « Journal of the Math. Soc. of Japan », 7, 1-12, (1955).
- [12] D. C. SPENCER, *Harmonic forms with coefficients in linear bundles*, Mimeographed Notes, Princeton, 1955.

Geometria. — *Sur la dérivation covariante des spineurs*^(*). Nota di ROLAND GUY, presentata^(**) dal Socio E. BOMPIANI.

Dans un article sur l'extension du calcul tensoriel aux géométries non affines [1] E. Cartan se demandait s'il existait une définition tout à fait générale de la dérivation covariante des tenseurs. Il répondait par l'affirmative, mais il faisait deux restrictions; par exemple pour une géométrie de Klein de groupe G , il est nécessaire:

1) d'utiliser des repères R d'un corps K tous homologues entre eux dans le groupe G ;

(*) Ces recherches ont put être entreprises grâce au Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

2) de définir par une *pure convention* (plus ou moins naturelle selon le groupe) une famille linéaire de translations infinitésimales permettant de passer d'un repère R_A d'origine A à un autre repère et à *un seul* $R_{A'}$ d'origine A' infiniment voisine de A (le repère $R_{A'}$, étant dit équipollent à R_A).

En appliquant ce programme dans son livre sur la théorie des spineurs, il obtenait alors une certaine expression de la différentielle absolue des spineurs [2].

Or les récents progrès de la géométrie différentielle globale permettent de considérer à nouveau le problème et d'obtenir en quelque sorte une définition canonique de la dérivée covariante des spineurs qui à l'avantage d'être globale, permettant en outre d'opérer une discrimination parmi les différentes définitions proposées par les physiciens.

1. TENSEURS DE TYPE $R(G)$ SUR UN ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL ⁽¹⁾. — Soit une variété différentiable V_4 de dimension 4, telle que dans l'intersection de deux systèmes de coordonnées admissibles, les dérivées des changements de coordonnées obéissent à des conditions de différentiabilité convenables. On suppose que sur V_4 sont définies:

1) une métrique riemannienne ds^2 partout de type hyperbolique normal;

2) un ensemble P^x en chaque point x de repères orthonormés R^x tel que, si l'on considère un recouvrement arbitraire de V_4 par des ouverts, U et V étant deux de ces voisinages, pour $x \in U \cap V$, il existe une matrice L_V^U du groupe de Lorentz (\mathcal{L}) et qu'on ait $R_V^x = R_U^x L_V^U$;

3) une connexion euclidienne, c'est à dire dans chaque voisinage U , une 1-forme Π_U à valeur dans l'algèbre de Lie $L(\mathcal{L})$ de \mathcal{L} . Une telle forme, un repère R^x étant donné, peut être représentée par une matrice (4×4) antisymétrique, que nous noterons aussi $\Pi_U(\omega_{\alpha\beta})$ dont les éléments sont des 1-formes différentielles linéaires sur U . Les matrices doivent satisfaire, pour $x \in U \cap V$ à

$$(1) \quad \Pi_V = L^{-1}{}^U_V \Pi_U L_V^U + L^{-1}{}^U_V dL_V^U.$$

Envisageons maintenant l'espace fibré principal

$$\varepsilon(V_4) = \bigcup_{x \in V_4} P^x$$

de base V_4 , de groupe structural \mathcal{L} , la fibre type pouvant être identifiée à ce groupe. Soit alors M un espace vectoriel (sur les complexes ou sur les réels) de dimension finie, qui sera l'espace de représentation d'une représentation linéaire $R(\mathcal{L})$ de \mathcal{L} .

On appelle *tenseur de type* $R(\mathcal{L})$ sur l'espace fibré principal ε , une application $z \rightarrow t(z)$ de ε dans M , telle que

$$(2) \quad t(zg) = R(g^{-1})t(z) \quad , \quad z \in \varepsilon \quad , \quad g \in \mathcal{L},$$

(1) Les définitions sont celles de [3]. Je remercie M. Lichnerowicz d'avoir attiré mon attention sur ce sujet.

ou, si l'on considère un recouvrement de V_4 par des voisinages U_i et au dessus de chacun de ces voisinages une section locale $z_i(x)$, pour $x \in U_i \cap U_j$, on ait $z_j(x) = z_i(x) g_{ij}(x)$. Si l'on pose $t_i(x) = t(z_i(x))$:

$$t_j(x) = t[z_i g_{ij}] = R(g_{ij}^{-1}) t(z_i(x)) = R(g_{ij}^{-1}) t_i(x),$$

les $t_i(x)$ pouvant être considérés comme les images par les homéomorphismes locaux définis par la structure fibrée d'une section d'un espace fibré de base V_4 , de fibre type M et de groupe structural $R(\mathcal{L})$. D'une manière plus simple, on peut dire qu'un tenseur sur un voisinage U de V_4 est une fonction $x \rightarrow t_U(x) \in M$, à valeurs dans M , telle que

$$(3) \quad t_V(x) = R(\mathcal{L}^{-1} \frac{U}{V}) t_U(x), \quad \text{pour } x \in U \cap V.$$

2. LA DÉRIVATION COVARIANTE DES TENSEURS, DES SPINEURS. — La représentation $R(\mathcal{L})$ induit dans l'espace tangent de la variété de groupe ou algèbre de Lie du groupe, une application compatible avec les lois de l'algèbre, qui est une représentation de $L(\mathcal{L})$ algèbre de Lie du groupe dans $L[R(\mathcal{L})]$ l'algèbre de Lie de la représentation $R(\mathcal{L})$ du groupe \mathcal{L} , qu'on appelle *représentation induite* par R et qu'on désignera par \bar{R}

$$\mathcal{L} \xrightarrow{R} R(\mathcal{L})$$

$$L(\mathcal{L}) \xrightarrow{dR} L[R(\mathcal{L})] = dR(\mathcal{L}) = \bar{R}(\mathcal{L}).$$

Pour des champs de tenseurs tels qu'ils ont été définis plus haut, on peut montrer, en utilisant la représentation \bar{R} , qu'on peut construire une forme différentielle linéaire à valeur tensorielle de type $R(\mathcal{L})$

$$(4) \quad Dt_V = dt_V + R(\Pi_V) t_V,$$

c'est à dire telle que

$$(5) \quad Dt_V = R(L^{-1} \frac{U}{V}) Dt_U,$$

dite la forme différentielle absolue du tenseur t pour la connexion Π envisagée.

3. DÉFINITION GLOBALE DES 4-SPINEURS ET DE LEUR DÉRIVÉE COVARIANTE. — Soient l'espace vectoriel P de deux variables complexes $\psi_A (A, B, \dots = 1, 2)$ dans lequel opère effectivement le groupe unimodulaire complexe S et le dual P^* (de variables $\varphi^{\bar{B}}$) de P dans lequel opère les transformations contragrédientes à celles de S formant le groupe S' . On considère l'espace M dans lequel opère le groupe \mathfrak{S} produit direct (ou kroneckerien) des groupes S et S' et tel que $M = P \dot{+} P'$.

On peut définir globalement les 4-spineurs contravariants sur la variété V_4 comme éléments $\Psi(x)$ d'un fibré $E' (V_4, M, \mathfrak{S})$ de base V_4 , de fibre type M , de groupe structural \mathfrak{S} . L'espace principal $\varepsilon' (V_4, \mathfrak{S})$ associé ⁽²⁾ à E' est

(2) Cfr. [4] § 2.

aussi l'espace fibré principal des repères spinoriels $\mathfrak{R}^x : \varepsilon'(V_4) = \bigcup_{x \in V_4} \mathfrak{S}^x$, \mathfrak{S}^x étant l'ensemble des repères \mathfrak{R}^x d'origine x ⁽³⁾. Cela revient à dire, d'après le § 1, que les 4-spineurs sont des tenseurs de type $\varphi^{-1}(\mathfrak{L})$, φ étant la représentation de \mathfrak{S} dans \mathfrak{L} . On sait, en effet que \mathfrak{L} est l'image par un homéomorphisme φ défini dans \mathfrak{S} , de noyau \mathfrak{N} cyclique d'ordre deux (si \mathfrak{S} et \mathfrak{L} sont réalisés matriciellement e et e' étant les matrices unité de \mathfrak{S} et de \mathfrak{L} , $\mathfrak{N} = \varphi^{-1}(e') = \{e, -e\}$). Le quotient $\mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ est isomorphe à \mathfrak{L} et \mathfrak{S} est le revêtement universel de \mathfrak{L} .

Le problème qui se pose alors est de définir, à partir des repères R^x les repères spinoriels \mathfrak{R}^x . C'est un problème d'extension. On dit que ε' est une extension de ε associée à l'homomorphisme φ de \mathfrak{S} dans \mathfrak{L} , s'il existe une représentation de ε' sur ε se projetant sur l'application identique de V_4 . Une telle extension n'est pas toujours possible comme l'a remarqué M. Ehresmann ⁽⁴⁾, mais M. A. Haefliger ⁽⁴⁾ en a déterminé les conditions. L'existence globale des spineurs n'est donc pas toujours assurée.

On peut alors envisager la *dérivation covariante des 4-spineurs* sur un voisinage U de V_4 de deux manières équivalentes:

a) comme la dérivée d'un champ de tenseurs sur $\varepsilon(V_4, \mathfrak{L})$ de type $\varphi^{-1}(\mathfrak{L})$ ⁽⁵⁾ relativement à la connexion Π (forme linéaire sur U à valeurs dans $L(\mathfrak{L})$;

b) comme la dérivée d'un champ de tenseurs sur $\varepsilon'(V_4, \mathfrak{S})$ de type \mathfrak{S} relativement à la connexion $\bar{\varphi}^{-1}(\Pi)$ ($\bar{\varphi}^{-1}$ étant la représentation de $L(\mathfrak{L})$ induite par φ^{-1}) ⁽⁶⁾.

4. CALCULS EFFECTIFS. — Soit $\tau_{\mu\nu}$ ($\mu\nu$ et tout indice grec numéroté de 1 à 4) la base de $L(\mathfrak{L})$, la forme de connexion Π s'écrira

$$(6) \quad \Pi = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \tau_{\mu\nu}.$$

Désignons par $\bar{\tau}$ l'image de Π par $\bar{R} = \bar{\varphi}^{-1}$, on a, d'après la définition de la représentation d'une algèbre

$$(7) \quad \bar{\tau} = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \bar{\varphi}^{-1}(\tau_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \bar{\tau}_{\mu\nu}$$

$\bar{\tau}_{\mu\nu}$ est alors la base de $L(\mathfrak{S})$. D'après E. Cartan ⁽⁷⁾, il est facile de la calculer à partir de $L(\mathfrak{L})$. L'espace riemannien V_4 est rapporté à une base ortho-normée \vec{e}_α satisfaisant aux conditions

$$(8) \quad e_\alpha \otimes e_\beta - e_\beta \otimes e_\alpha = 2g_{\alpha\beta}$$

(3) Car une fois un élément \mathfrak{R}^x de $\varepsilon'(V_4)$ choisi, \mathfrak{S} peut être réalisé au moyen des repères de \mathfrak{S}^x .

(4) Cfr. [5].

(5) φ^{-1} est l'application R du § 2.

(6) a) et b) sont deux manières équivalentes car $L(\mathfrak{S}) = L[\varphi^{-1}(\mathfrak{L})]$.

(7) E. CARTAN [2] II, p. 81.

et les \vec{e}_α étant considérés comme éléments générateurs d'une algèbre de Clifford locale C_x réalisée par des matrices (4×4) à éléments complexes γ_α , on a ⁽⁸⁾

$$(9) \quad \bar{\tau} = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \bar{\tau}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu.$$

Les corepères, ϑ^α associés aux repères \vec{e}_α sont tels que

$$(10) \quad ds^2 = -(\vartheta^1)^2 - (\vartheta^2)^2 - (\vartheta^3)^2 + (\vartheta^4)^2$$

et

$$(11) \quad g_{11} = g^{11} = g_{22} = g^{22} = g_{33} = g^{33} = -1, \quad g_{44} = g^{44} = 1, \quad g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta.$$

Nous prendrons les γ_α égaux à

$$(12) \quad \gamma_1 = -\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = -\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3 = -\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient pour les éléments de base de $L(\mathcal{S})$:

$$(13) \quad \bar{\tau}_{12} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad \bar{\tau}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\tau}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\tau}_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\tau}_{24} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\tau}_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut introduire la matrice

$$(14) \quad (S^A_B) = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} S^A_{\mu\nu B} = \begin{pmatrix} i\omega^{12} - \omega^{34} & , & -\omega^{13} + i\omega^{23} + i\omega^{24} - \omega^{14} \\ \omega^{13} + \omega^{23} - i\omega^{24} - \omega^{14} & , & -i\omega^{12} + \omega^{34} \end{pmatrix}$$

et la matrice \bar{S}^A_B , conjuguée transposée de S^A_B , alors

$$(15) \quad \bar{\tau} = \frac{1}{2} \Omega = \begin{pmatrix} -S^A_B & 0 \\ 0 & \bar{S}^A_B \end{pmatrix}$$

et matriciellement

$$(16) \quad \delta\psi = \frac{1}{2} \Omega\psi.$$

(8) On sait qu'à chaque vecteur de l'espace tangent T_x à V_4 en x , on peut faire correspondre une matrice (4×4) à éléments complexes fournissant une représentation fidèle de C_x . Cf. [8] ou [9] ou [2].

Ψ^\bullet étant la matrice colonne

$$(17) \quad \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \\ \Psi^3 \\ \Psi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dot{\psi}_1 \\ \dot{\psi}_2 \end{pmatrix}$$

écrite au moyen des 2-spineurs covariants et contrevariants. On arrive d'après (4) à

$$(18) \quad D\Psi^\bullet = d\Psi^\bullet + \bar{\tau}\Psi^\bullet = d\Psi^\bullet + \frac{1}{2}\Omega\Psi^\bullet$$

qui est, aux différences près, le résultat obtenu par M. E. Cartan ⁽⁹⁾.

Il est possible d'écrire ceci au moyen d'une seule matrice S_A^B (2×2) dans la notation des 2-spineurs: ⁽¹⁰⁾

$$(19) \quad \begin{cases} \delta\psi \cdot (\delta\psi_1, \delta\psi_2) = \psi \cdot (\psi_1, \psi_2) (-S_A^B) \\ \delta\Phi^\bullet \begin{pmatrix} \delta\Phi^1 \\ \delta\Phi^2 \end{pmatrix} = \bar{S}_A^B \Phi^\bullet \begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

5. LA PRÉSENTE DÉFINITION DES SPINEURS ET CELLE DE M. M. RIESZ. — M. Marcel Riesz a donné une définition globale des spineurs sur une variété ⁽¹¹⁾ que nous allons comparer à la nôtre en introduisant dans sa définition le langage des espaces fibrés.

En tout point x de la variété riemannienne V_4 , M. Riesz introduit une algèbre de Clifford C_x (§ 2, 4). Aux repères lorentziens (nos repères ortho-normés) $\Sigma_x, \dot{\Sigma}_x, \ddot{\Sigma}_x, \dots$ de vecteurs de base $\gamma_{k\Sigma}, \gamma_{k\dot{\Sigma}}, \gamma_{k\ddot{\Sigma}}, \dots$ (§ 3), il associe des idéaux à gauche de C_x (§ 5).

$$I_\Sigma = \{\eta_\Sigma, \xi_\Sigma, \tau_\Sigma, \dots\}, \quad I_{\dot{\Sigma}} = \{\eta_{\dot{\Sigma}}, \xi_{\dot{\Sigma}}, \tau_{\dot{\Sigma}}, \dots\}, \quad I_{\ddot{\Sigma}} = \{\eta_{\ddot{\Sigma}}, \xi_{\ddot{\Sigma}}, \tau_{\ddot{\Sigma}}, \dots\}, \dots$$

Tout élément l du groupe de Lorentz \mathcal{L} induit dans C_x un automorphisme (l), auquel correspond un nombre $R_l \in C_x$, dont l'ensemble forme un groupe qui est le groupe des spineurs \mathcal{S} (nous avons noté cette correspondance — § 3, ici — $\varphi(R_l) = (l)$) (§ 6). Les $\gamma_{k\Sigma}$ se déduisent l'un de l'autre par une transformation $l \in \mathcal{L}$: $\gamma_{k\ddot{\Sigma}} = l\gamma_{k\Sigma}$, considérés comme éléments de C_x , ils sont

(9) E. CARTAN [2] p. 85. Les différences proviennent de la signature du ds^2 de la base de l'algèbre C_x et de l'ordre des composantes de Ψ dans (17).

(10) Dans [3] le groupe G agit à droite dans l'espace fibré des repères (qui forment une matrice colonne), à gauche sur le fibré des corepères (qui forment une matrice ligne). Le produit de deux matrices se fait « colonnes par lignes » et pour un élément A_i^j d'une matrice, i indique le rang de la ligne, j le rang de la colonne.

Ici, les vecteurs contrevariants sont indiqués par une colonne, les éléments covariants par une ligne, la multiplication se fait « lignes par colonne », l'indice des haut de S_B^A ou S_B^A indique le rang de la ligne, l'indice du bas le rang de la colonne le groupe agit dans les fibrés respectifs en sens contraires de ceux de [3]. Nous avons préféré laisser pour le calcul effectif les dispositions habituelles aux physiciens.

(11) Cfr. [7]. On met entre parenthèses le numéro des paragraphes de ce mémoire.

tels que $\gamma_{k\Sigma} = R_l^{-1} \gamma_{k\Sigma} R_l$ (§ 7). On peut introduire alors entre éléments des idéaux la correspondance suivante: par $D_R I_\Sigma \stackrel{d}{=} I_\Sigma R$, on passe d'un élément d'un idéal à l'élément d'un autre idéal $\eta_\Sigma = \eta_\Sigma R$. On considère alors la réunion I_x des éléments de tous les idéaux en x : $I_\Sigma, I_\Sigma, \dots$ et entre ces éléments la relation d'équivalence $\xi = \eta \pmod{D_R}$ si $\xi = \eta R$; on notera $\xi = \eta_\Sigma$ si $\eta = \eta_\Sigma$. Les classes d'équivalence relativement à D_R sont appelées par M. Riesz *spineurs à gauche* (on a une définition analogue pour les spineurs à droite).

On peut introduire dans I_x une deuxième correspondance: par $L_{R^{-1}} I_\Sigma = R^{-1} I_\Sigma$, on reste dans l'idéal I_Σ , il y a permutation entre les éléments de cet idéal. Cette correspondance induit dans l'ensemble des classes d'équivalence ou ensemble quotient $I_x/D_R = S_x$ une correspondance: on peut faire opérer S à gauche. Si on nomme $\psi, \psi' \in S_x$

$$\psi = (\psi_\Sigma, \psi_\Sigma, \psi_\Sigma, \dots) \quad , \quad \psi' = (\psi'_\Sigma, \psi'_\Sigma, \psi'_\Sigma, \dots)$$

on a

$$L\psi = (L\psi_\Sigma, L\psi_\Sigma, \dots) = R^{-1} \psi = \psi'.$$

Dans le cas où l'on se restreint à des idéaux minimaux, un idéal est de dimension 4⁽¹²⁾ et dans celui d'une représentation matricielle de C_x , il est constitué par le produit d'une matrice colonne variable X et d'une ligne fixe L . On peut introduire alors une base de 4 matrices colonnes indépendantes σ_μ et écrire

$$\psi_\Sigma = l^\mu \sigma_\mu \cdot L.$$

Alors

$$\psi_\Sigma R = l^\mu \sigma_\mu (LR) = l^\mu \sigma_\mu L'$$

on est dans un autre idéal. Si

$$R^{-1} \psi_\Sigma = l^\mu R^{-1} \sigma_\mu \cdot L = l^\mu \alpha_\mu^\nu \sigma_\nu \cdot L = \psi'_\Sigma$$

on reste dans le même idéal.

Ainsi $S_x: \{\psi_\Sigma, \psi'_\Sigma, \dots\} \pmod{D_\S L}$, variété colonne, est isomorphe à notre espace M et l'espace

$$S(V_4) = \bigcup_{x \in V_4} S_x$$

est un espace fibré de fibre S_x , de groupe structural \S agissant à gauche. Ceci montre l'identité des deux définitions.

Dans notre cas, \S ne peut pas agir à droite comme ici, ce qui est un avantage de la définition des spineurs comme éléments d'idéaux, mais notre définition fait mieux ressortir la « synthèse entre tenseurs riemanniens et spineurs », elle permet de relier la dérivation covariante des spineurs à la dérivation covariante de *tous* les tenseurs qui fournissent les différentes représentations d'un groupe G : on a ainsi un procédé canonique de dérivation des spineurs.

(12) Cfr. [6].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. CARTAN, « Ann. of Math. », t. 38, pp. 1-13 (1937).
 [2] E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*, t. I et II, Hermann, Paris 1938.
 [3] A. LICHNEROWICZ, *Th. globale des connexions*, Cremonese, Roma 1955.
 [4] C. EHRESMANN, *Colloque de topologie*, Bruxelles 1950.
 [5] A. HAEFLIGER, « C. R. Acad. Sc. », t. 243, p. 558, Paris 1958.
 [6] M. RIESZ, « C. R. », 10^{me} Congrès Math. Scandinaves, pp. 121-148, Copenague 1947.
 [7] M. RIESZ, « C. R. », 12^{me} Congrès Math. Scandinaves, pp. 241-259, Lund 1954.
 [8] O. VEULEN, Princeton, Inst. for adv. stud. - Lectures « Geom. Compl. Domains ». (1935-36)
 [9] H. S. RUSE, « Proc. Roy. Soc. » Edin. t. 57, p. 97 et sq. (1937).
 [10] E. M. CORSON, *Introduction to tensors spinors*. Blackie, London 1954.

Meccanica. — *Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite.* Nota II di FRANCA GRAIFF, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

10. CONDIZIONI DI CONGRUENZA PER DEFORMAZIONI INFINITESIME IN UNA V_n . — Ho dimostrato che le condizioni necessarie di integrabilità della seguente equazione differenziale in s_i :

$$(20) \quad \xi_{ik} = s_{i/k} + s_{k/i}$$

sono, in forma implicita:

$$(21) \quad \frac{1}{2} a^{js} (\xi_{is/hk} - \xi_{is/kh} + \xi_{hs/ik} - \xi_{hs/ih} + \xi_{ih/sh} - \xi_{ih/sk}) = \\ = a^{js} (-\xi_{qs} R_i^q{}_{hk} + s^q{}_i R_{qs}{}^{hk} + s^q{}_s R_{iq}{}^{hk} + s^q{}_h R_{is}{}^{qk} + s^q{}_k R_{is}{}^{hq} + s^q R_{is}{}^{hk|q}) .$$

Dalle quali, mediante opportune combinazioni lineari, si ricavano le:

$$(22) \quad \frac{1}{2} (\theta_{|ik} + \xi_{ik|s}{}^s - \xi_{is/k}{}^s - \xi_{ks|i}{}^s) = R_{jk} s^j{}_i + R_{ij} s^j{}_k + R_{ik|j} s^j$$

$$(23) \quad \Delta_2 \theta - \xi_{ik}{}^{i\bar{k}} - R_{ik} \xi^{ik} = R_{|i}{}^i s^i.$$

Esse possono considerarsi condizioni di congruenza quando s è infinitesimo, perché allora esso può interpretarsi come vettore spostamento nella V_n considerata, ed il tensore (20) può quindi essere interpretato come corrispondente tensore di deformazione.

Si mostra ora in che modo si possa eliminare s dalle (21), ottenendo così le cercate condizioni di congruenza in forma esplicita. Questa eliminazione metterà in evidenza il diverso comportamento (di fronte al problema

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

propostoci) di quelle varietà che ammettono «movimenti» in sé (cioè spostamenti senza deformazione) da quelle che non ne ammettono: questo è dovuto al fatto che per le prime, il sistema (20) ammette soluzioni con almeno un parametro arbitrario, mentre per le seconde il vettore spostamento risulta univocamente determinato dalla (20) stessa.

Si consideri, ora, la condizione di congruenza (23), combinazione lineare delle precedenti: essa non contiene la derivata dello spostamento, ed è lineare nelle componenti dello spostamento stesso. D'altra parte in condizioni di congruenza, qualunque variazione di uno scalare S , funzione del posto, deve essere del tipo:

$$(23\ a) \quad \delta S = S_{,i} s^i.$$

Si prendano allora in considerazione altri $(n-1)$ invarianti costruiti col solo tensore di Riemann, o col suo contratto, o, se necessario, col suo derivato; se ne costruiscano mediante le (21), (22), le loro variazioni e si imponga che queste soddisfino a delle condizioni di integrabilità del tipo (23 a). Questo equivale a formare opportune combinazioni lineari delle (21), (22), e delle loro derivate.

Se gli invarianti sono stati scelti in modo tale che i loro gradienti costituiscano n vettori tra essi linearmente indipendenti, si viene così a impostare un sistema lineare di n equazioni nelle n incognite s_i , risolubile col metodo di Kramer. Trovato così il vettore \mathbf{s} , lo si sostituisce nelle (21) che danno in tal modo le cercate condizioni di congruenza in forma esplicita.

Per $n > 2$ e per varietà del tutto generiche, R_{ik} è un tensore doppio simmetrico che ammette n invarianti intrinseci non legati tra di loro: questi possono essere gli n invarianti intrinseci di prima specie (costruiti col tensore fondamentale) o quelli di seconda specie (costruiti col tensore emisimmetrico di Ricci) o gli n invarianti principali⁽¹⁰⁾. I gradienti di questi n invarianti costituiranno quindi, sempre in generale, i cercati n vettori tra essi linearmente indipendenti, che daranno la possibilità di impostare il sistema atto a determinare completamente lo spostamento \mathbf{s} . Per le (22) inoltre, le variazioni di questi n invarianti saranno esprimibili mediante ξ_{ik} e le sue derivate fino alle seconde; così pure lo saranno le soluzioni \bar{s}_i del sistema proposto; le cercate condizioni di congruenza quindi per $n > 2$ e per varietà del tutto generiche, saranno differenziali del *terzo ordine* in ξ_{ik} .

Ma la scelta di un'opportuna ennupla di invarianti atti alla determinazione dello spostamento, dipende da proprietà intrinseche della V_n considerata; non sempre è possibile: non lo è mai, ad esempio, per varietà a curvatura costante, per le quali il tensore di Riemann è isotropo e costante.

Si prenderà ora in considerazione questo caso particolare per n qualsiasi; mentre si esamineranno separatamente i casi $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$ per varietà a curvatura non costante.

(10) M. PASTORI, *Significato degli invarianti intrinseci di un tensore doppio simmetrico*, « Rend. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. », vol. LXXX, 1948.

11. CASO DI VARIETÀ A CURVATURA COSTANTE. — Per varietà a curvatura costante, essendo:

$$R_{i\ h\ k}^j = K (a_{ih} \delta_k^j - a_{ik} \delta_h^j)$$

con K costante, le (21), (22), (23) diventano rispettivamente:

$$(21') \quad \frac{1}{2} a^{js} (\xi_{is|kh} - \xi_{is|kh} + \xi_{hs|ik} + \xi_{ik|sh} - \xi_{ks|ih} - \xi_{ih|sk}) = K (\xi_{ih} \delta_k^j - \xi_{ik} \delta_h^j)$$

$$(22') \quad \frac{1}{2} (\theta_{|ik} + \xi_{ik|s}^s - \xi_{is|k}^s - \xi_{ks|i}^s) = -(n-1) K \xi_{ik}$$

$$(23') \quad \Delta_a \theta - \xi_{ik}^{i\ k} + K (n-1) \theta = 0.$$

Poiché in esse non compare il vettore s , il sistema (20) risulta completo e lo spostamento non resta univocamente determinato dalla deformazione.

Le (21'), (22'), (23') sono le note condizioni di congruenza per varietà a curvatura costante⁽¹¹⁾. Esse sono differenziali del *secondo ordine*.

Le (21') impongono l'annullarsi di un tensore che ha tante componenti distinte quante quelle del tensore di Riemann e che soddisfa alle identità (16'); le (21') sono necessarie e sufficienti per n qualsiasi.

Le (22') impongono l'annullarsi di un tensore doppio simmetrico Q_{ik} , la cui divergenza, per la (18), è identicamente:

$$Q_{ik}^{i\ k} = \frac{1}{2} Q_{,i} \quad \text{con} \quad Q = Q_{ik} a^{ik}.$$

Esse sono equivalenti a quelle che si ottengono annullando il tensore:

$$\Omega_{ik} = Q_{ik} - \frac{1}{2} Q a_{ik}$$

coincidente col tensore (18) a divergenza identicamente nulla. Sotto questa forma sono state date dal prof. Finzi per $n = 3$ ⁽¹²⁾. Sia nella prima che nella seconda forma, esse sono necessarie e anche sufficienti per $n = 3$; in tal caso infatti l'isotropia del tensore di Riemann contratto ha come conseguenza l'isotropia del tensore di Riemann⁽¹³⁾.

Le (23'), necessarie per n qualsiasi, sono anche sufficienti per $n = 2$ ⁽¹⁴⁾.

12. — CASO DI $n = 2$. — Per $n = 2$, il tensore di Riemann e quello di Riemann contratto sono sempre isotropi; oltre all'invariante lineare R non si possono costruire altri invarianti intrinseci i cui gradienti individuino direzioni diverse da quelle di $R_{,i}$. Per poter quindi scrivere, oltre alla (23)

(11) Cfr. A. PALATINI, loco primo citato.

(12) B. FINZI, *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui*, questi « Rendiconti », vol. XIX, 1934.

(13) B. FINZI, M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Bologna 1949.

(14) B. FINZI, *Sopra il tensore di deformazione di un velo*, « Rend. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. », vol. LXIII, 1930.

una seconda equazione utile ai fini del problema, bisogna ricorrere ad un secondo invariante costruito col derivato del primo: l'invariante $R_{/j} R^{/j}$, il cui gradiente, in generale, individua una direzione diversa da quella di $R_{,i}$. Il sistema che definisce lo spostamento è quindi il seguente:

$$\begin{cases} \delta R = R_{,i} s^i \\ \delta (R_{/j} R^{/j}) = (R_{/j} R^{/j})_{,i} s^i. \end{cases}$$

Le corrispondenti condizioni di congruenza si esprimono quindi, nel caso più generale, mediante ξ_{ik} e le sue derivate fino alle quarte.

Il problema è stato risolto ed esaurientemente discusso in altre Note ⁽¹⁵⁾.

Qui si desidera sottolineare il fatto che, mentre per una generica V_2 le condizioni di congruenza risultano del *quarto ordine* in ξ_{ik} , per una V_n ($n > 2$) pure generica, esse risultano del *terzo ordine*.

13. CASO DI $n = 3$. - In questo caso il tensore di Riemann ed il tensore di Riemann contratto sono legati tra loro in modo tale che dall'uno si può ricavare l'altro ⁽¹⁶⁾.

Dato che il problema richiede la scelta di 3 invarianti costruiti con tali tensori, conviene considerare solo invarianti del primo o del secondo.

Si prenda allora in considerazione il tensore di Riemann contratto R_{ik} ; i suoi tre invarianti principali coincidono, come è noto, con le tre radici $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ dell'equazione secolare (di terzo grado):

$$(24) \quad \| R_{ik} - \omega a_{ik} \| = 0.$$

a) Sia: $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$; siano inoltre questi tre invarianti non costanti. Anche gli invarianti intrinseci di prima specie risultano allora indipendenti l'uno dall'altro e non costanti. Essi sono:

$$R = R_{ik} a^{ik}$$

$$Q = R_{ik} R^{ik}$$

$$C = R_{ik} R^{i,j} R^{kj}.$$

Per quanto si è detto, sarà allora soddisfatta la disequazione:

$$(25) \quad \epsilon^{ikr} R_{,i} Q_{,k} C_{,r} \neq 0.$$

(15) B. FINZI, *Sopra il tensore di deformazione di un velo*, « Rend. Ist. Lomb. di Sc. e Lett. », vol. LXIII, 1930. Da tale discussione segue che le condizioni di congruenza si riducono dal quarto al terzo ordine per quelle superfici aventi le linee $K = \text{cost.}$ geodeticamente parallele, e quindi anche per le superfici di rotazione, e al secondo ordine per le superfici a curvatura costante.

F. GRAIFF, *Sulle condizioni di congruenza per una membrana*, « Rend. Ist. Lomb. di Scienze e Lettere », vol. 92, 1957.

(16) B. FINZI-M. PASTORI, *Calcolo tensoriale ed applicazioni*, Bologna 1949.

Il sistema atto a determinare univocamente le componenti s_i dello spostamento sarà dunque il seguente:

$$(26) \quad \begin{cases} \delta R = R_{,i} s^i \\ \delta Q = Q_{,i} s^i \\ \delta C = C_{,i} s^i. \end{cases}$$

I primi membri delle tre equazioni vengono espressi (per le (22)) mediante ξ_{ik} e le sue derivate fino alle seconde; siano \bar{s}_i le soluzioni del sistema (26): anch'esse si esprimeranno mediante ξ_{ik} e le sue derivate fino alle seconde.

Sostituendo i valori trovati nelle (21), si otterranno le condizioni di congruenza in forma esplicita: esse risultano differenziali del *terzo ordine* in ξ_{ik} .

Le condizioni di congruenza trovate sono anche sufficienti: siano infatti le (21), dove al posto di s_i si ponga \bar{s}_i , soddisfatte da un certo tensore ξ_{ik} ; esse affermano che la variazione del tensore di Riemann della V_3 considerata è dovuta al seguente cambiamento infinitesimo di coordinate:

$$x'^i = x^i - \bar{s}^i$$

e quindi ξ_{ik} , causa di questa variazione, ha la forma: ⁽¹⁷⁾

$$\xi_{ik} = \bar{s}_{i|k} + \bar{s}_{k|i}.$$

Si può accennare al fatto che le variazioni dei tre invarianti R, Q, C , dovute alla seguente variazione del tensore fondamentale:

$$\mu_{ik} = \xi_{ik} - (\bar{s}_{i|k} + \bar{s}_{k|i})$$

sono identicamente nulle: le (25), infatti, diventano delle identità se, in esse, si sostituisce a s_i, \bar{s}_i . Il tensore μ_{ik} soddisfa quindi a tre identità.

b) Sia: $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3$; e siano ancora questi tre invarianti non costanti.

La (25) non sarà più allora soddisfatta, poiché anche R, Q, C saranno uniti tra di loro da una relazione: solo due di essi possono infatti considerarsi indipendenti, data l'ipotesi; siano questi, ad esempio R e Q . È necessario allora trovare una terza condizione di congruenza che sostituisca la terza delle (26). Posto:

$$D = R_{|j} R^{/j}$$

la condizione cercata è la:

$$(27) \quad \delta D = D_{,i} s^i.$$

Il primo membro della (27) si esprimerà mediante ξ_{ik} e le sue derivate fino alle terze; così pure lo spostamento \bar{s}_i , soluzione del sistema sopra considerato. Le condizioni di congruenza saranno quindi del *quarto ordine* in ξ_{ik} .

c) Sia: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. Allora R_{ik} è un tensore isotropo e, per il teorema di Schur, la varietà è a curvatura costante. Le condizioni di congruenza

(17) H. WEYL, loco citato, p. 234.

necessarie e sufficienti sono quindi le (22'), differenziali del *secondo ordine* (cfr. n. 11)

d) Sia: $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$; siano inoltre questi tre invarianti principali costanti.

Anche R, Q, C saranno allora costanti, pur essendo indipendenti l'uno dall'altro. Il sistema (26) risulta in questo caso:

$$(26') \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta R = 0 \\ \delta Q = 0 \\ \delta C = 0. \end{array} \right.$$

Lo spostamento s non compare in queste tre condizioni di congruenza indipendenti l'una dall'altra perché tali sono R, Q e C . Esse sono, per questo caso particolare, le condizioni di congruenza necessarie e anche sufficienti.

Che siano necessarie è evidente, dato che sono conseguenze delle (22).

Per dimostrare che sono sufficienti basta osservare che non esiste nessun'altra deformazione, oltre a quella congruente, che lasci inalterati gli invarianti costanti. Infatti, in una V_3 , il sistema (26') è soddisfatto, per quanto si è detto in a), dal tensore:

$$\mu_{ik} = \xi_{ik} - (\bar{s}_{i/k} + \bar{s}_{k/i})$$

dove \bar{s}_i sono le soluzioni del sistema (26): in questo caso quindi non è possibile costruire il tensore μ_{ik} ; rimane allora, come unica soluzione delle (26') la deformazione congruente (20).

Per determinare poi lo spostamento, bisogna ricorrere ad altri invarianti costruibili con R_{ik} , ma non costanti. Questi possono essere i coefficienti di rotazione del Ricci, relativi alle tre direzioni principali di R_{ik} ; indicando queste ultime con λ^i (α è un indice ordinale) essi sono espressi dalle ⁽¹⁸⁾:

$$(\alpha\beta, \gamma) \equiv \lambda_{j/h}^{\alpha} \lambda_{\beta}^j \lambda_{\gamma}^h \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$$

e sono in numero di 9.

Se poi anche questi sono tutti costanti, lo spostamento s risulta indeterminato: logica conseguenza del fatto che una V_3 aventi costanti tanto gli invarianti principali di R_{ik} che i 9 coefficienti di rotazione del Ricci, ammette un gruppo transitivo di movimenti rigidi ⁽¹⁹⁾.

14. CASO DI $n = 4$. - Siano $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ le radici dell'equazione secolare (24) che, per $n = 4$ sarà di quarto grado.

a) Sia: $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_4$; siano ancora questi quattro invarianti non costanti.

(18) G. RICCI-CURBASTRO, *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni*, «Memoria della Soc. Ital. delle Sc.», to. XII, 1899.

(19) G. RICCI-CURBASTRO, loco citato.

Anche gli invarianti intrinseci di prima specie di R_{ik} risulteranno allora indipendenti l'uno dall'altro e non costanti. Essi sono: R, Q, C ed

$$E = R_{ik} R_{\rho}^i R^{\rho k} R_t^k.$$

Nelle ipotesi fatte sarà soddisfatta la disequazione:

$$(27) \quad \epsilon^{ikrs} R_{,i} Q_{,k} C_{,r} E_{,s} \neq 0.$$

Risulterà quindi determinato il seguente sistema atto ad individuare univocamente lo spostamento s :

$$(28) \quad \begin{cases} \delta R = R_{,i} s^i \\ \delta Q = Q_{,i} s^i \\ \delta C = C_{,i} s^i \\ \delta E = E_{,i} s^i. \end{cases}$$

Per le solite ragioni, in questo caso le condizioni di congruenza risulteranno del *terzo ordine* in ξ_{ik} .

b) Sia: $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 = \omega_4$; allora la (27) non sarà soddisfatta, essendo i quattro invarianti R, Q, C, E legati da una relazione; soltanto tre di essi infatti possono considerarsi indipendenti. Siano questi R, Q, C ; posto:

$$F = \epsilon^{ikrs} R_{ikrs}$$

la condizione di congruenza che sostituirà la quarta equazione del sistema (28) sarà là:

$$\delta F = F_{,i} s^i$$

c) Sia: $\omega_1 = \omega_2 \neq \omega_3 = \omega_4$ oppure:

$$\omega_1 \neq \omega_2 = \omega_3 = \omega_4.$$

Le relazioni che legano in questo caso i quattro invarianti R, Q, C, E sono due; soltanto due di essi possono considerarsi quindi indipendenti; siano questi R e Q ; gli altri due invarianti necessari per impostare il solito sistema possono essere: F e:

$$G = R_{ikrs} R^{ikrs}.$$

Ancora le condizioni di congruenza risulteranno del *terzo ordine*.

d) Sia: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$; allora R_{ik} è un tensore isotropo ed il suo invariante R è costante ⁽²⁰⁾:

$$R_{ik} = \frac{R}{4} a_{ik}$$

Sostituendo questa espressione di R_{ik} nelle (22) si ottengono le condizioni di congruenza necessarie e sufficienti, nelle ipotesi fatte:

$$(29) \quad \theta_{/ik} + \xi_{ik,s} s^s - \xi_{is,k} s^s - \xi_{ks,i} s^s = \frac{R}{2} \xi_{ik}.$$

(20) G. RICCI-CURBASTRO, *Sulle varietà a invarianti principali eguali*, questi « Rendiconti », vol. XXXIII, 1924.

Esse sono differenziali del *secondo ordine* (conformemente al n. 11).

e) Sia: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$; siano inoltre questi invarianti costanti; il sistema (28) diventa allora:

$$(28) \quad \begin{cases} \delta R = 0 \\ \delta Q = 0 \\ \delta C = 0 \\ \delta F = 0. \end{cases}$$

Per quanto si è nel caso analogo per $n = 3$, queste sono, nelle ipotesi fatte, le condizioni di congruenza necessarie e sufficienti. Lo spostamento s potrà determinarsi prendendo in considerazione altri quattro invarianti non costanti ed indipendenti tra di loro.

Si può osservare infine che: la possibilità di scegliere in una V_n , n invarianti costruiti col tensore di Riemann, non costanti e non legati da alcuna relazione, dà come conseguenza la possibilità di valutare completamente uno spostamento infinitesimo nella V_n stessa; esclude quindi che la V_n possa ammettere dei « movimenti in se stessa », delle soluzioni cioè della (20) contenenti almeno un parametro arbitrario ⁽²¹⁾.

Meccanica. — *Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica.* Nota di CARLO CATTANEO, presentata ^(*) dal Socio A. SIGNORINI.

Vari Autori ⁽¹⁾ hanno mostrato, con procedimenti diversi, che la trasformazione di Lorentz può dedursi da postulati che sono comuni alla cinematica relativistica e alla cinematica classica senza l'intervento del postulato, più propriamente relativistico, dell'invarianza della velocità della luce nel vuoto, cui è riservato il compito di dirimere un'alternativa e di precisare il valore e il significato fisico di una certa costante universale.

(21) L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton 1926, p. 88.

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) W. IGNATOWSKJ, « *Physicalische Zeitschrift* », 11, p. 972 (1910); M. PLANK, *Acht Vorlesungen über theoretische Physik*, Leipzig, p. 11 (1910); P. FRANK e H. ROTHE, « *Ann. d. Physik* », 24, p. 825 (1911); « *Physicalische Zeitschrift* », 13, p. 750 (1912); F. SEVERI, *Riduzione dei principii di relatività ai loro elementi logici e psicologici*, « *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei* » (1924); *Elementi logici e psicologici dei principii di relatività*, « *Scientia* » (1925); *Esame delle obiezioni di ordine generale contro la relatività del tempo*, « *Scientia* » (1925); Y. UENO e H. TAKENO, *On equivalent Observers*, « *Progress of Theor. Phys.* », 8, p. 291 (1952); Y. UENO, *On the equivalency for the observers in the special relativity*, « *Progress of Theor. Phys.* », 9, p. 74 (1953).

Si cfr. anche le seguenti pubblicazioni del prof. M. G. GALLI, ove la trasformazione di Lorentz viene discussa, sottilmente e con visione completa, sia da un punto di vista logico-deduttivo sia da un punto di vista sperimentale-induttivo: *Ottica relativistica generalizzata*,

Riprendo qui la questione indicando un procedimento dimostrativo che se in parte si accosta a quello di Ignatowskj credo ne elimini alcune manchevolezze, comuni del resto a tutte le deduzioni, più note o meno, della trasformazione di Lorentz.

I. POSTULATI FONDAMENTALI. — Enuncio, in una forma che ritengo abbastanza completa ma che sostanzialmente è quella tradizionale, i primi postulati della relatività ristretta, postulati che, limitatamente all'ambito cinematico, sono tutti comuni anche alla fisica classica.

I. EVENTO. UNIVERSO. — L'ente primitivo fondamentale della cinematica è l'evento *E*. Esistono infiniti eventi la cui totalità costituisce l'universo *U*.

II. RIFERIMENTO GALILEIANO. — Esiste uno spazio di riferimento *S* a tre dimensioni dotato delle seguenti proprietà:

a) *Vale in esso, per le figure in quiete, l'ordinaria geometria euclidea.* È evidentemente libera in *S* la scelta di un sistema di coordinate, in particolare di un'arbitraria terna cartesiana trirettangola *Oxyz*, atto a individuare i singoli punti di *S*.

b) *Possono associarsi ad S le nozioni (che si assumono come primitive) di contemporaneità (anche in posizioni diverse) e di durata temporale.* Ciò consente di associare ad *S* un tempo pantopico *t* di cui è disponibile soltanto l'origine e l'unità di misura.

c) *Lo spazio S, munito di una terna cartesiana Oxyz e di un tempo t, costituisce un riferimento R ≡ (Oxyz, t) — che dicesi riferimento spazio-temporale galileiano — per U.* Ad ogni evento di *U* corrisponde pertanto in *R* una ben determinata quaterna di coordinate *x, y, z, t* (ciascuna suscettibile di variare tra $-\infty$ e $+\infty$) e viceversa.

d) *Lo spazio S è isotropo e omogeneo (l'omogeneità valendo sia in posizione sia nel tempo) rispetto a tutti i fenomeni fisici (in particolare cinematici).* Fisicamente ciò val quanto dire che un esperimento fisico eseguito in un laboratorio *L* che sia in quiete nello spazio *S* dà, *ceteris paribus*, un risultato indipendente dall'ubicazione e dall'orientamento di *L* in *S*, nonché dall'istante in cui l'esperimento ha inizio.

Il complesso dei postulati I–II permette di costruire in *S* tutta la cinematica, sia di un unico punto sia di un sistema, anche continuo, di punti. Esso permette in particolare di definire in *S* quei moti di insieme, detti moti traslatori uniformi, caratterizzati dal fatto che tutti i punti del sistema sono animati da una stessa velocità vettoriale, costante nel tempo. Naturalmente i postulati I–II non consentono, da soli, di costruire la cinematica dei moti relativi.

III. PRINCIPIO DI RELATIVITÀ. — *Esistono infiniti spazi tridimensionali, sovrapposti e mobili l'uno rispetto all'altro, tali che:*

« Ottica », V, 3–4 (1951); *Ottica e Cinematica*, « Ottica », 5, 6 (1953); dello stesso si cfr. anche una breve Nota critica in « Ottica », VI, 1–4 (1952).

Sono grato al prof. Galli al quale debbo la segnalazione del lavoro di Ignatowskj, che mi era sfuggito.

a) *Ciascuno di essi gode di tutte le proprietà II del riferimento S.*

b) *Essi sono caratterizzati dal fatto di muoversi l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio uniforme.* Fissato uno di essi S, ogni altro S' è individuato da un vettore \mathbf{v} di S che rappresenta la velocità di traslazione di S' rispetto ad S. Essi costituiscono pertanto una totalità ∞^3 . Naturalmente un riferimento $R' \equiv (O' x' y' z', t')$ di S' è individuato rispetto a un riferimento $R \equiv (Oxyz, t)$ di S da un certo numero di parametri (sei) che tengano conto sia della velocità vettoriale \mathbf{v} di S' rispetto ad S, sia della scelta delle terne in S e in S'.

c) *Essi sono tra loro fisicamente indistinguibili e quindi equivalenti di fronte alla formulazione di tutte le leggi fisiche* (in particolare cinematiche). Questo postulato, classicamente limitato all'ambito meccanico, viene esteso in relatività a tutti i fenomeni fisici. Comunque, nell'ambito cinematico, che è il solo che attualmente ci interessa, esso è comune alla fisica classica come alla relativistica.

d) *Ogni relazione cinematica che leghi due riferimenti galileiani R ed R' dipende con continuità dai parametri che individuano R' rispetto ad R (o viceversa). Ogni funzione dell'evento E, che sia differenziabile in R (ove è espressa nelle variabili x, y, z, t) è differenziabile in R' (ove è espressa in x', y', z', t').* Questo ultimo postulato è in relazione col carattere oggettivo del concetto di evento e di fenomeno in genere.

2. CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO GALILEIANO. — Dall'assioma II c discende che, note le coordinate x, y, z, t di un evento in un riferimento galileiano R, risultano completamente determinate le sue coordinate x', y', z', t' in ogni altro riferimento R'. Ciò val quanto dire che x', y', z', t' sono funzioni univoche e invertibili di x, y, z, t

$$(I) \quad x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

(si è posto per brevità $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = t$; $x'_1 = x', x'_2 = y', x'_3 = z', x'_4 = t'$). Conformemente a III d riterremo le f_i e le loro inverse almeno di classe C_2 . Naturalmente le f_i devono dipendere ulteriormente, con continuità, dai parametri che in R individuano R'.

Le (I) comportano una corrispondenza biunivoca anche tra i differenziali delle variabili, cioè tra le componenti spazio-temporali di un fenomeno elementare nei due riferimenti

$$dx'_i = \sum_1^4 \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Tale corrispondenza, per l'omogeneità di S (II d), deve essere indipendente dal luogo e dal tempo in S ($\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \text{cost.}$). Ciò val quanto dire che le (I) e le loro inverse sono *lineari*.

Senza menomare la generalità fisica scegliamo gli assi $Oxyz$ in S con l'unica condizione che l'asse x riesca parallelo, ma non necessariamente con-

corde, alla velocità v di S' . Diremo v la componente algebrica (l'unica non nulla) di tal velocità secondo l'asse x . In S' poi, scelta a piacere un'origine dei tempi t' , si assumeranno come assi $O' x' y' z'$ le rette di S' che all'istante $t' = 0$ sono sovrapposte agli assi $Oxyz$ (che si tratti effettivamente di rette è provato dalla linearità delle (1)). Sceglieremo infine l'origine dei tempi in S nell'istante di S in cui O' coincide con O . Con tale scelta le trasformazioni (1) notoriamente si riducono (tornando alle notazioni primitive) alla forma (tralascio per brevità la dimostrazione ben nota):

$$(3) \quad x' = A_{11}(v) \cdot (x - vt) \quad , \quad y' = A_{22}(v) \cdot y \quad , \quad z' = A_{33}(v) \cdot z \quad , \\ t' = A_{41}(v) \cdot x + A_{44}(v) \cdot t$$

ove nei coefficienti A , tuttora incogniti, si è messa in evidenza la dipendenza dal parametro v , che individua S' in S .

Per differenziazione dalle (3)₁ (3)₄ si deduce, in forma ancora parzialmente indeterminata, la regola di composizione delle velocità secondo l'asse x :

$$(4) \quad u' = \frac{A_{11}(v) (u - v)}{A_{41}(v) \cdot u + A_{44}(v)}$$

ove con $u = dx/dt$ si è indicata la velocità algebrica rispetto ad S di un punto mobile sull'asse x e con $u' = dx'/dt'$ la velocità dello stesso punto rispetto a S' .

Delle funzioni incognite $A_{11}(v)$, $A_{22}(v)$, $A_{33}(v)$, $A_{44}(v)$, $A_{41}(v)$ fin da ora può dirsi:

1° Per $v = 0$ esse assumono i seguenti valori

$$(5) \quad A_{11}(0) = A_{22}(0) = A_{33}(0) = A_{44}(0) = 1 \quad , \quad A_{41}(0) = 0 \quad .$$

Infatti per $v = 0$ le (3) si devono ridurre alla trasformazione identica.

2° A_{11} , A_{22} , A_{33} , positive per $v = 0$, devono conservarsi tali in tutto il loro campo di definizione, perché non venga mai meno la invertibilità delle (3):

$$(6) \quad A_{11}(v) > 0 \quad , \quad A_{22}(v) > 0 \quad , \quad A_{33}(v) > 0 \quad .$$

3° A_{11} , A_{22} , A_{33} , A_{44} sono funzioni *pari*, A_{41} è funzione *dispari* di v :

$$(7) \quad A_{11}(-v) = A_{11}(v) \quad , \quad A_{22}(-v) = A_{22}(v) \quad , \\ A_{33}(-v) = A_{33}(v) \quad , \quad A_{44}(-v) = A_{44}(v) \quad , \quad A_{41}(-v) = -A_{41}(v) \quad .$$

Infatti in virtù della (3)₂ un segmento solidale a S' , di lunghezza l' , disposto parallelamente all'asse y' , appare in S , istante per istante, diretto come y e di lunghezza $l = l'/A_{22}(v)$. Cambiando v in $-v$, ossia invertendo il moto di S' rispetto ad S , il risultato deve essere il medesimo, a causa dell'isotropia di S (II d). Ne consegue la (7)₂. Per analogo motivo vale la (7)₃.

Del pari, stante la (3)₁, un segmento di lunghezza l' solidale a S' e disposto parallelamente a x' , in S appare, istante per istante, diretto come x e di lunghezza $l = l'/A_{11}(v)$. Poiché il risultato (contrazione o allungamento che sia) non può cambiare invertendo il moto di S' (a causa dell'isotropia di S) ne discende la (7)₁.

Finalmente consideriamo in S' un punto che si muova sull'asse x' con velocità algebrica u' . In S esso appare muoversi con la velocità u che si ricava dalla (4). Quest'ultima velocità, a causa dell'isotropia di S , deve semplicemente cambiare di segno se simultaneamente si inverte il moto di S' rispetto ad S e il moto del punto rispetto a S' . Ne consegue che la (4) deve continuare a sussistere mutandovi v in $-v$, u' in $-u'$, e u in $-u$; se ne trae

$$\frac{-A_{11}(-v) \cdot (u-v)}{-A_{41}(-v)u + A_{44}(-v)} = -\frac{A_{11}(v) \cdot (u-v)}{A_{41}(v)u + A_{44}(v)}.$$

Tenuta presente la (7)_x, ne conseguono simultaneamente la (7)₄ e la (7)₅.

3. DIGRESSIONE SUL MOTO RECIPROCO: LEMMA DI RECIPROCIITÀ. - Dai postulati ammessi può dedursi una proprietà di reciprocità tra S ed S' che per il suo carattere intuitivo viene ordinariamente ammessa senza dimostrazione, ovvero viene assunta come postulato indipendente.

Sia v , come si è detto, la velocità algebrica di S' rispetto ad S e sia w la velocità algebrica di S rispetto ad S' ; quest'ultima si presenta come una funzione univoca di v (cfr. III b):

$$(8) \quad w = \varphi(v).$$

Sulla $\varphi(v)$ può dirsi:

1° È definita in un intervallo I dell'asse v , finito o infinito, simmetrico rispetto all'origine $v = 0$ (II d, isotropia di S) ed è ivi continua (III d).

2° Non dipende da S ma è la stessa per ogni riferimento galileiano (postulato di relatività, III c).

3° È funzione dispari. Infatti invertendo gli orientamenti degli assi x e x' (con che v e w si mutano in $-v$ e $-w$) la (8) dà $-w = \varphi(-v)$ e quindi, sempre per la (8),

$$(9) \quad \varphi(-v) = -\varphi(v).$$

4° È invertibile, poiché anche v è funzione univoca di w , e la funzione inversa φ^{-1} si identifica con la φ (postulato di relatività, III c). Se ne trae, data la continuità, che φ è funzione strettamente monotona in I e che per ogni v vale l'identità

$$(10) \quad \varphi[\varphi(v)] = v.$$

Questa equazione funzionale, tenuto conto del carattere monotono e dispari della φ , riduce la sua scelta alla coppia di funzioni

$$(11) \quad \varphi(v) = \pm v.$$

Se infatti, supposta φ decrescente, per un particolare valore $\bar{v} < 0$ fosse $\varphi(\bar{v}) > -\bar{v}$, da un lato ne seguirebbe, per la disparità di φ , $\varphi(-\bar{v}) < \bar{v}$; dall'altro, per la sua decrescenza, $\varphi[\varphi(\bar{v})] < \varphi(-\bar{v})$. Dalle due ultime disuguaglianze conseguirebbe $\varphi[\varphi(\bar{v})] < \bar{v}$, in contraddizione con la (10). In modo perfettamente analogo si dimostra assurda una disuguaglianza del tipo

$\varphi(\bar{v}) < -\bar{v}$ (per $\bar{v} < 0$), e il risultato resta valido anche nella ipotesi che φ sia crescente.

La scelta del segno nella (11), intuitivamente ovvia, può farsi al modo seguente. Sia S'' un terzo riferimento galileiano che si muova parallelamente all'asse x con velocità u rispetto ad S ed u' rispetto ad S' . In S'' intendiamo scelti gli assi e l'origine dei tempi in modo che per $t'' = 0$ essi si sovrappongano a quelli di S (e quindi, come potrebbe verificarsi, a quelli di S'). Tra u, u', v sussiste la (4). Se ora cambiamo tra loro i compiti di S' e di S'' , u si muta in v , v in u ed u' , in virtù della (11), in $\pm u'$. La formula (4) dà allora:

$$(12) \quad \pm u' = \frac{A_{11}(u) \cdot (v - u)}{A_{41}(u) \cdot v + A_{44}(u)}.$$

Eliminando u' tra la (4) e la (12) si ricava la relazione

$$(13) \quad \frac{A_{41}(v)}{A_{11}(v)} u + \frac{A_{44}(v)}{A_{11}(v)} = \mp \frac{A_{41}(u)}{A_{11}(u)} v \mp \frac{A_{44}(u)}{A_{11}(u)}$$

valida per una scelta generica di u e v in I . Posto ivi $u = 0$ e tenute presenti le (7) si trae

$$(14) \quad \frac{A_{44}(v)}{A_{11}(v)} = \mp 1.$$

Ma ancora le $(7)_1$, $(7)_4$ mostrano che nelle (14), (13), (12), (11) soltanto il segno inferiore è accettabile. Resta così dimostrato il seguente

LEMMA DI RECIPROCIITÀ. — *Se v è la velocità algebrica di S' rispetto ad S , la velocità algebrica di S rispetto ad S' vale $-v$.*

4. LA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ. — Con la scelta corretta del segno la (14) dà

$$(15) \quad A_{44}(v) = A_{11}(v).$$

Tenuto conto della (15), la (13), adottati i segni inferiori e separate le variabili, si scrive

$$(16) \quad \frac{A_{11}(v)}{A_{41}(v)} v = \frac{A_{11}(u)}{A_{41}(u)} u$$

da cui si deduce

$$(17) \quad A_{41}(v) = -A_{11}(v) \frac{v}{c^2}$$

ove si è indicato con $-c^2$, ma senza riguardo al suo segno effettivo, tuttora incognito, il valore, necessariamente costante, del rapporto (16). Esso ha le dimensioni del quadrato di una velocità ed ha il significato di una costante universale. Le formule (3) si scrivono allora:

$$(18) \quad x' = A_{11}(v) \cdot (x - vt) \quad , \quad y' = A_{22}(v) \cdot y \quad , \quad z' = A_{33}(v) \cdot z \quad , \\ t' = A_{11}(v) \cdot \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)$$

mentre la formula di composizione delle velocità non ha più altra indeterminazione che quella della costante c^2 :

$$(19) \quad u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}.$$

Anche la determinazione di A_{11} si fa facilmente. Eliminata t tra $(18)_1$ e $(18)_4$, si ottiene

$$(20) \quad x = \frac{x' + vt'}{A_{11}(v) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

D'altra parte la (18) medesima, scritta scambiando il compito di S e di S' (con che v si muta in $-v$ per il lemma di reciprocità) dà direttamente

$$(21) \quad x = A_{11}(-v) (x' + vt').$$

Tenuto presente il carattere pari e positivo di A_{11} (cfr. (6) e (7)) il confronto tra (20) e (21) dà senza incertezza

$$(22) \quad A_{11}(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Non resta che la determinazione di $A_{22}(v)$ e di $A_{33}(v)$ che è pure immediata. Invertito il compito di S e di S' (con che per il lemma di reciprocità v si muta in $-v$) le $(3)_2$ $(3)_3$ danno

$$(23) \quad y = A_{22}(-v) y' \quad z = A_{33}(-v) z'.$$

Tenuta presente la parità di A_{22} e di A_{33} , le (23), confrontate con le $(3)_2$ $(3)_3$ medesime provano essere

$$A_{22} = A_{33} = 1.$$

In definitiva le (3) assumono proprio l'aspetto della trasformazione speciale di Lorentz

$$(24) \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Sono ben note le conseguenze formali delle (24) e della (19), in particolare l'esistenza di una velocità, reale o immaginaria, uguale a $\pm c$, che risulta invariante da un riferimento all'altro. Ma i postulati I-II-III, da soli, nulla dicono sul valore della costante universale c .

La separazione tra cinematica classica e cinematica relativistica comincia al momento in cui un ulteriore postulato permette di precisarne il valore. La fisica classica, in virtù del suo postulato del tempo assoluto ($t' = t$) pone senz'altro uguale a zero la costante $1/c^2$ con che le (24) si riducono alla trasformazione di Galileo, tutte le grandezze geometriche assumono carattere assoluto e la (19) diviene la regola classica di composizione $u' = u - v$, secondo la quale soltanto una velocità infinitamente grande risulta invariante al variare del riferimento. La relatività ristretta invece attribuisce a c un valore reale e finito, identificandola con la velocità della luce nel vuoto, che un postulato esplicito, ben giustificato del resto, dichiara invariante. L'eventualità di un valore immaginario per c non sembra avere un significato fisico.

Astronomia. — *Determinazione delle densità delle componenti in un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse.* Nota I di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

È noto che la densità media delle stelle componenti un sistema binario fotometrico si può conoscere indipendentemente dalla loro parallasse. Ora in questa Nota mi propongo di dimostrare che ciò vale anche per i sistemi binari visuali; cosa che, fino ad ora, non mi sembra sia stata posta in rilievo da altri.

A tale scopo, dalla formula fondamentale della teoria delle orbite, prese rispettivamente per unità di misura la massa del sole, l'anno, e l'unità astronomica, la somma $\mu_1 + \mu_2$ delle masse di un sistema binario è data da:

$$(1) \quad \mu_1 + \mu_2 = \frac{a^3}{P^2}$$

essendo a il semiasse maggiore dell'orbita relativa descritta dalla stella secondaria intorno la principale e P il periodo. Ricordando che il semiasse espresso in unità astronomiche è uguale al semiasse a'' espresso in secondi diviso per la parallasse p'' in secondi, la (1) diventa:

$$(2) \quad \mu_1 + \mu_2 = \frac{(a'')^3}{(p'')^3 P^2}$$

mentre il volume del sistema è dato da:

$$(3) \quad V = \frac{4}{3} \pi (R_1^3 + R_2^3)$$

essendo R_1 ed R_2 i raggi delle due stelle in unità astronomiche.

Ora il rapporto fra i raggi R ed R' di due stelle qualsiasi è legato alle loro grandezze bolometriche assolute M ed M' ed al rapporto delle temperature effettive T e T' dalla formula:

$$(4) \quad M' - M = 5 \log \frac{R}{R'} + 10 \log \frac{T}{T'}$$

Se prendiamo come stella campione il sole e chiamiamo con h la seguente quantità dipendente solo dalle grandezze fisiche solari:

$$(5) \quad h = -M' - 5 \log R' - 10 \log T'$$

la (4) diventa:

$$(6) \quad -M = 5 \log R + 10 \log T + h.$$

Ma la grandezza bolometrica assoluta M è legata a quella apparente m ed alla parallasse p dalla nota formula:

$$(7) \quad -M = -m - 5 - 5 \log p'' = 5 \log R + 10 \log T + h$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

onde ricavando R in unità astronomiche, si ha:

$$(8) \quad R = (p'')^{-1} T^{-2} \cdot 10^{-1-0,2h-0,2m}.$$

Se calcoliamo mediante questa espressione i raggi R_1 ed R_2 delle due stelle di un sistema binario visuale, ne facciamo i cubi e li introduciamo nella (3), la densità media $\bar{\rho}$ del sistema, ottenuta facendo il rapporto fra la (2) e la (3), che contengono entrambi al denominatore $(p'')^3$ e indipendente da p'' .

Abbiamo infatti tenendo presente la (8)

$$(9) \quad \frac{4}{3} \pi (R_1^3 + R_2^3) = \frac{4 \pi}{3 \cdot 10^3 (1+0,2h) (p'')^3} \left[\frac{10^{-0,6m_1}}{T_1^6} + \frac{10^{-0,6m_2}}{T_2^6} \right].$$

Onde la densità media $\bar{\rho}$ sarà:

$$(10) \quad \bar{\rho} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{V} = \frac{C (a'')^3}{\left[\frac{10^{-0,6m_1}}{T_1^6} + \frac{10^{-0,6m_2}}{T_2^6} \right] P^2}$$

che può scriversi:

$$(11) \quad \frac{C (a'')^3}{P^2} = \bar{\rho} \left[\frac{10^{-0,6m_1}}{T_1^6} + \frac{10^{-0,6m_2}}{T_2^6} \right]$$

in cui C è una costante data da:

$$(12) \quad C = \frac{3}{4 \pi} 10^{3(0,2h+1)}.$$

Ricordo che le temperature effettive T_1 e T_2 delle due stelle sono ricavabili dal loro tipo spettrale; mentre m_1 ed m_2 grandezze bolometriche apparenti sono deducibili (una volta nota la temperatura) dalle rispettive grandezze fotovisuali apparenti; ed a'' semiasse maggiore dell'orbita relativa e P , periodo in anni, si ricavano dalle osservazioni micrometriche.

2. Per determinare il valore della costante, calcoliamo prima di tutto h data dalla (5). Per il sole, secondo il Kuiper, si ha:

$$M = 4,62 \quad ; \quad T = 5712^\circ \quad \text{e inoltre} \quad R_\odot = 696350 \text{ Km.} = 0,004653 \text{ u.a.}$$

per cui $h = -6,10527$.

Il valore di C secondo la (12) è dunque $0,11537 \cdot 10^{-15}$.

Ma per le unità di misura scelte, la densità media $\bar{\rho}$ calcolata in base alla (11) è misurata prendendo per unità la densità di un corpo avente per massa la massa del sole e per raggio l'unità astronomica; onde riferire $\bar{\rho}$ alla densità dell'acqua bisogna perciò moltiplicare C per $1,993 \cdot 10^{33}$ che è la massa solare in grammi e dividerla per il cubo di $1,4967 \cdot 10^{13}$ che è il valore in centimetri della unità astronomica. Eseguendo i calcoli si ha per la nuova costante da sostituire a C :

$$(13) \quad K = 6,86 \cdot 10^{-23} \quad \text{se si prende per unità di densità quella dell'acqua o}$$

$$(14) \quad K_1 = 4,87 \cdot 10^{-23} \quad \text{se si prende per unità la densità del sole.}$$

La densità, media di un sistema binario può dunque determinarsi — senza conoscere il valore della parallasse, difficilmente preciso — per mezzo della relazione (11), in cui a seconda che si voglia prendere per riferimento la densità dell'acqua o la densità media del sole, la costante C va sostituita o con K o con K_1 .

3. Conosciuta la densità media del sistema, possiamo — sempre senza conoscere la parallasse — determinare le densità delle singole componenti. Dalla nota formula di astrofisica, deducibile immediatamente dalla legge di Stefan, abbiamo per le grandezze bolometriche assolute:

$$(15) \quad M_2 - M_1 = 5 \log \frac{R_1}{R_2} + 10 \log \frac{T_1}{T_2}$$

che per le due stelle di uno stesso sistema, aventi ugual parallasse, equivale:

$$(16) \quad m_2 - m_1 = 5 \log \frac{R_1}{R_2} + 10 \log \frac{T_1}{T_2}$$

in cui m_1 ed m_2 sono le grandezze bolometriche apparenti. Conoscendo m_1 ed m_2 , T_1 , T_2 , si ricava R_1/R_2 e di conseguenza $(R_1/R_2)^3$ che è uguale al rapporto dei due volumi. Poniamo allora:

$$(17) \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 = \alpha$$

essendo α nota.

Per determinare il rapporto fra le masse μ_1/μ_2 possiamo procedere in due modi, di cui il primo senz'altro più rigoroso. Se si conosce il moto assoluto di una delle due stelle componenti il sistema binario (ad esempio S_1) ciò che può farsi osservando con lo strumento meridiano le sue coordinate equatoriali, si può dedurre allora il moto assoluto di S_2 una volta che si conosca l'ellisse descritta da S_2 intorno ad S_1 . Sappiamo poi dalla meccanica che le due stelle descrivono ciascuna una ellisse intorno al baricentro del sistema, i semiassi maggiori delle quali stanno fra loro in ragione inversa delle masse. In questo caso si ha subito

$$(18) \quad \beta = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Quando non è possibile determinare β in tal maniera, possiamo ricorrere alla relazione massa-luminosità.

Come è noto, secondo la teoria di Eddington, sull'equilibrio stellare, esiste una relazione tra la massa di un astro e la quantità di energia totale L da esso irradiata. Tale relazione — sulla base di molti dati osservati — può porsi nella forma assai semplice;

$$(19) \quad L = \mu^k$$

in cui L è l'energia irradiata, μ la massa (essendo prese per unità l'energia irradiata e la massa del sole) e k è una costante che, secondo il Russell equivale a 3,33 e secondo studi recenti del Baize a 3,58, per stelle normali.

Per i calcoli seguenti prenderò k uguale a quest'ultimo valore. Notoriamente si ha poi

$$(20) \quad M = \text{cost} - 2,5 \log L$$

che tenendo presente la (19) diviene, prendendo $k = 3,58$:

$$(21) \quad M = \text{cost} - 8,95 \log \mu.$$

Scrivendo questa relazione per le due stelle di uno stesso sistema, sottraendo membro a membro e ricordando che nel nostro caso $M_2 - M_1 = m_2 - m_1$ abbiamo:

$$(22) \quad m_2 - m_1 = 8,95 \log \mu_1 - 8,95 \log \mu_2$$

da cui

$$(23) \quad \beta = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 10^{\frac{m_2 - m_1}{8,95}}.$$

Tenendo presente la (17) e la (23) abbiamo

$$(24) \quad \frac{V_1 + V_2}{V_2} = \alpha + 1 \quad ; \quad \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_2} = \beta + 1$$

da cui $\frac{\mu_1 + \mu_2}{V_1 + V_2} \cdot \frac{V_2}{\mu_2} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}$ e cioè ricordando che ρ_1 e ρ_2 indicano la densità media delle singole componenti:

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_2} = \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}$$

da cui

$$(25) \quad \rho_2 = \bar{\rho} \frac{\alpha + 1}{\beta + 1}.$$

Si ha inoltre:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{V_2}{V_1} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

e perciò

$$(26) \quad \rho_1 = \frac{\beta}{\alpha} \rho_2.$$

Le espressioni (25) e (26) determinano ρ_1 e ρ_2 , essendo dati $\bar{\rho}$, α , β , la cui conoscenza non ha richiesto l'introduzione della parallasse. Ovviamente ρ_1 e ρ_2 sono espresse nella unità di misura che è stata scelta per $\bar{\rho}$.

In una prossima Nota tratterò i diversi casi che possono presentarsi nei sistemi binari di stelle, calcolando inoltre vari esempi in proposito.

Astrofisica. — *Un modello della struttura interna di Algol A.*
Nota II (*) di SERGIO SEGRE, presentata (**) dal Socio G. ARMELLINI.

5. NUCLEO ISOTERMICO. — Se, nel corso dell'integrazione numerica della regione esterna, non si giunge ad un punto dove non è stabile l'equilibrio radiativo, si arresta l'integrazione allo strato dove $L(r)$ si è ridotto a zero. All'interno di tale strato sarà $L(r) = 0$, e anche $\frac{dT}{dr} = 0$ (cfr. (5)), e quindi $T = \text{cost}$. In questo caso, il nucleo è isotermico e in esso non vi è generazione di energia perché quivi $\frac{dL}{dr} = 0$ e, per la (4), $\epsilon = 0$. La generazione di energia avviene tutta in uno strato sottile, adiacente alla faccia interna dell'involucro esterno, il quale è in equilibrio radiativo. Questo stato può essere raggiunto da stelle vecchie in cui l'idrogeno al centro è stato completamente trasformato in elio. Per il nucleo isotermico sarà quindi $X_i = 0$.

In realtà, nell'integrazione numerica non si arriva mai ad un punto dove $L(r) = 0$ esattamente, poiché la corrispondente variabile logaritmica dovrebbe raggiungere $-\infty$. Approssimiamo quindi la condizione $L(r) = 0$ con $\log \frac{L(r)}{L} = -2,0$. Lo stato del nucleo è ora descritto dalle (1), (2), (3), dove T va considerato costante e uguale a $T_e(r_f)$. Posto

$$(28) \quad K = \frac{k}{\mu H} T_e(r_f)$$

$$(29) \quad \rho = \rho_c e^{-\psi}; \quad (30) \quad r = \alpha \xi; \quad (31) \quad \alpha = \left[\frac{K}{4\pi G \rho_c} \right]^{1/2},$$

dalle (1), (2), (3) si ottiene la

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) = e^{-\psi},$$

analoga all'equazione di Lane-Emden, la quale va integrata con le condizioni iniziali

$$\psi = 0, \quad \frac{d\psi}{d\xi} = 0 \quad \text{per } \xi = 0.$$

(N. B. — La $\psi(\xi)$ qui definita non ha nulla a che vedere con la $\psi(y) = \log \frac{M(r)}{M}$ introdotta sopra; adopero tuttavia il medesimo simbolo, in quanto è ormai uso corrente di fare così).

Questa soluzione è stata calcolata e pubblicata da Chandrasekhar e Wares (1949). Nota la ψ , si ricavano immediatamente ρ dalla (29), P da $P = K\rho$ e $M(r)$ dalla $M(\xi) = 4\pi\alpha^3 \rho_c \xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}$ che si ottiene integrando la (3), espressa nelle nuove variabili.

(*) Continuazione della Nota I apparsa a p. 301 di questi « Rendiconti ».

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

Attualmente le condizioni sulla frontiera si riducono alle

$$(32) \quad M_e(r_f) = M_i(r_f) \quad , \quad P_e(r_f) = P_i(r_f) ,$$

in quanto la condizione per L è automaticamente soddisfatta, mentre quella per la T è soddisfatta in virtù della definizione (28). La soluzione per il nucleo dipende dal parametro ρ_e (analogamente a P_e e T_e per quanto riguarda il nucleo convettivo), e si deve esaminare se sia possibile un valore di questo parametro tale che renda soddisfatte le (32). Si potrebbe fare una trattazione del tutto simile a quella per il nucleo convettivo; preferiamo tuttavia illustrare un secondo metodo, dovuto a Chandrasekhar.

Si introducono le funzioni

$$(33) \quad U(r) = \frac{d \log M(r)}{d \log r} \quad ; \quad V(r) = - \frac{d \log P(r)}{d \log r} .$$

Su di un piano cartesiano con ascissa e ordinata rispettivamente U e V , si può allora tracciare la curva espressa parametricamente dalle (33). Tale curva rappresenta l'intera soluzione, ogni suo punto corrispondendo ad un ben determinato r (oppure ξ , nel nucleo). La curva consisterà di due rami: uno corrispondente al nucleo isothermico, l'altro all'involucro esterno. Ricordare le due soluzioni (esterna ed interna), significa adattare opportunamente questi due rami, come ora mostreremo.

Per il nucleo, trasformando nelle nuove variabili, le (33) diventano

$$(34) \quad U(\xi) = \frac{\xi e^{-\psi}}{\frac{d\psi}{d\xi}} \quad , \quad V(\xi) = \xi \frac{d\psi}{d\xi} ;$$

queste sono tabellate da Chandrasekhar e Wares. Per l'involucro esterno, ricordando le (8), si hanno invece le:

$$(35) \quad U = \frac{d\psi}{dy} \quad , \quad V = - \frac{d\lambda}{dy} .$$

Da queste, la U e la V si calcolano direttamente nel corso dell'integrazione numerica per l'involucro; in corrispondenza al punto dove si arresta l'integrazione, oltre alle y_f , ψ_f , λ_f , τ_f , si hanno quindi anche le U_{ef} , V_{ef} .

Le condizioni da soddisfarsi alla frontiera sono le:

$$(36) \quad \frac{U_{if}}{U_{ef}} = \frac{V_{if}}{V_{ef}} = \frac{\mu_i}{\mu_e} .$$

Le (36) si ottengono direttamente dalla definizione (33) e dalle (1), (2), (3), (32). La $X_i = 0$ implica che dev'essere $1/\mu_i = 0,745$ e per un dato X_e , anche μ_e è determinato.

La prima fra le condizioni (36) esprime che, se si considerano i due rami che corrispondono sul piano (U, V) all'intera soluzione, quelle fra le loro estremità che corrispondono alla frontiera devono essere allineate con l'origine del piano cartesiano. La seconda fra le condizioni (36) indica quale debba essere il distacco fra tali estremità. A chiarimento, si veda il diagramma seguente dove le due estremità cui si accenna sono indicate con A e B .

Il procedimento che in pratica si adotta nella ricerca di un modello valido è il seguente. Sul piano (U, V) si traccia il ramo corrispondente alla soluzione per il nucleo isotermico. Si eseguono poi integrazioni dell'involucro esterno per diversi valori di X_e e ciascuno darà luogo ad un certo valore di U_{ef} e di V_{ef} . Per ciascun modello che si vuol tentare, si segna sul piano (U, V) il punto con coordinate U_{ef}, V_{ef} (il punto A del diagramma). Si trova il punto B graficamente, prolungando OA fino ad incontrare il ramo « isotermico ». Le coordinate di B, che si leggono dal grafico, non sono altro che

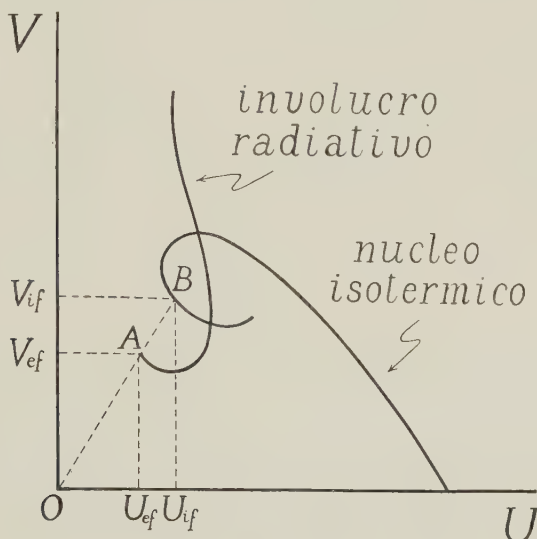


Fig. 1.

U_{if} e V_{if} . Perché il modello sia valido, deve essere $\frac{U_{ef}}{U_{if}} = \frac{\mu_e}{\mu_i} = 0,745 \mu_e$ (cfr. (36)), sicché si prenderanno in considerazione soltanto quei valori di X_e per cui vale questa relazione.

Una volta trovato un modello valido, la soluzione è completamente determinata, poiché, noto $U_{if} \equiv U_i(\xi_f)$, si risale a ξ_f , onde si ottiene ρ_e dalla

$$\log \rho_e = \tau_f - 2 \gamma_f + 2 \log \xi_f - \log \frac{4 \pi R^3}{M} \quad [\text{cfr. (30), (31), (8)}].$$

Noto ρ_e , si possono ricavare le variabili fisiche dalle (29) e seguenti.

La ricerca dei modelli validi con nucleo isotermico è inoltre semplificata dal seguente criterio, dovuto a Schönberg e Chandrasekhar (1942). Configurazioni d'equilibrio corrispondenti ad un involucro radiativo e un nucleo isotermico sono stabili solo se la percentuale di massa contenuta nel nucleo è compresa tra due limiti, di cui quello inferiore è circa 6,5%, mentre quello superiore è compreso tra 35% e 10%. (Il limite superiore è funzione decrescente di μ_i/μ_e ; il valore 35% corrisponde a $\mu_i/\mu_e = 1$, e poiché il limite superiore decresce rapidamente con l'aumento di μ_i/μ_e , si può con buona approssimazione assumere un limite superiore di circa 20%). Ciò

significa che è inutile tentare di adattare le due soluzioni (esterna ed interna) se si trova che ψ_f non è compreso tra $-1,1871$ e $-0,6990$. Si possono così eliminare rapidamente certi modelli, ed evitare calcoli laboriosi.

Le relazioni che si sono ottenute nel modo indicato sono abbastanza generali, e si possono applicare alle stelle dei primi tipi spettrali della sequenza principale che hanno la regione esterna in equilibrio radiativo.

6. RISULTATI PER ALGOL A. - Dalle tavole di Keller e Mayerott (1955), si è trovato che l'opacità κ può essere espressa empiricamente (in unità C.G.S., usate anche nel seguito) da

$$\kappa = 7,6 \times 10^{23} (0,9 + X) \rho^{0,9} T^{-3,5}.$$

Secondo Aller (1954), il tasso ϵ di generazione dell'energia può essere espresso nella forma che abbiamo postulato e con i seguenti valori delle costanti che vi figurano:

$$n = 20, \quad m = 4,$$

$$\log \epsilon_{c0} = -144,5450,$$

$$\log \epsilon_{p0} = -29,0054.$$

Meltzer (1957) ha analizzato e criticato le numerose misure fatte su Algol A nei passati 30 anni, e giunge alle seguenti conclusioni. La parallasse è incerta. Molti osservatori ottengono valori vicini a $\pi = 0'',032$, mentre una determinazione accurata del 1951 diede $\pi = 0'',0408$. Dai dati riportati da Meltzer, si ottiene la seguente tabella, misurando M in grammi, R in centimetri ed L in erg al minuto secondo

	log M	log R	log L
$\pi = 0'',0408$	33,663598	11,240362	35,683711
$\pi = 0'',032$	33,997080	11,319543	35,867711

Si sono eseguite integrazioni numeriche per un esteso «range» di valori di X_e , sia per $\pi = 0'',0408$ che per $\pi = 0'',032$, e si sono ottenuti i seguenti risultati.

Per $\pi'' = 0'',032$, solo con $X_e = 0,93$ è stato possibile costruire un modello valido, che è risultato a *nucleo convettivo*. Con il metodo esposto si ottiene:

$$\begin{aligned} y_f &= -0,8997, & X_i &= 0,73, \\ \psi_f &= -0,9397, \\ \lambda_f &= 2,0596, \\ \tau_f &= -0,0542, & \Gamma(\xi_f) &= 0,3690, \\ \varphi_f &= -0,0142, & \log Q_f &= 0,0927, \\ \xi_f &= 1,18, \\ \vartheta_f &= 0,7903. \end{aligned}$$

Per $\pi = 0'',0408$, l'unica soluzione possibile è stata per $X_e = 0,49$, con un *nucleo isotermico*. Con il metodo esposto si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma_f &= -1,2468, \\ \psi_f &= -0,9882, \\ \lambda_f &= 2,7848, \\ \tau_f &= 0,1560, \\ \varphi_f &= -2,0000, \\ \xi_f &= 5,4, \\ \psi_f &= 2,2193, \\ e^{-\psi_f} &= 0,1087, \end{array} \right. \quad \begin{array}{ll} U_{ef} = 0,7540 & , \quad V_{ef} = 1,2613, \\ U_{if} = 1,3712 & , \quad V_{if} = 2,3113, \\ \log \rho_c &= 2,6963. \end{array}$$

L'unicità delle soluzioni ottenute è garantita dalla seguente circostanza. Per $\pi = 0'',032$, se si esaminano modelli con valori di X_e che si allontanino dal valore $X_e = 0,93$, si trova che la differenza tra i due membri dell'equazione di raccordo, (27), cresce con andamento continuo, sicché non accenna affatto a ritornare a zero, come dovrebbe per un eventuale ulteriore modello valido. Per $\pi = 0'',0408$ accade una cosa analoga, dove però il campo dei possibili valori di X_e per i modelli isotermici è già ristretto dal criterio di Schönberg-Chandrasekhar (n. 5).

In base alla teoria qui svolta si ottiene un modello valido in corrispondenza a ciascuna delle due serie di valori di L , R , M dati dall'esperienza. Attualmente non è possibile fare una scelta definitiva. Tuttavia gli sviluppi moderni della teoria dell'evoluzione stellare darebbero ragioni per preferire il modello a *nucleo convettivo*, che corrisponde, nella nostra analisi, a $\pi = 0'',032$. Questo è in accordo con gli argomenti di carattere spettroscopico, presentati da Meltzer (1957), a favore di tale valore della parallasse.

BIBLIOGRAFIA.

- ALLER, *Astrophysics*, vol. II, Ronald Press Co., New York, 1954.
 CHANDRASEKHAR, *An introduction to the study of stellar structure*. University of Chicago Press, 1939.
 CHANDRASEKHAR, WARES, « *Astroph. Journ.* », 109, p. 551 (1949).
 COMRIE, *British Ass. Adv. Sci. Mathematical Tables*, vol. 2 (1932).
 COWLING, « *Monthly Notices* », 94, p. 768 (1934).
 KELLER, MAYEROTT, « *Astroph. Journ.* », 122, p. 32 (1955).
 MELTZER, « *Astroph. Journ.* », 125, p. 359 (1957).
 NAUR, « *Danske Math. Fys. Meddelelser* », 29, n. 5 (1954).
 SCHONBERG, CHANDRASEKHAR, « *Astroph. Journ.* », 96, p. 161 (1942).

Fisica. — *Instabilità delle pareti di Bloch dovuta ad atomi interstiziali in un materiale ferromagnetico con struttura cubica a corpo centrato* ^(*). Nota di GIUSEPPE BIORCI, ANDREA FERRO e GIORGIO MONTALENTI, presentata ^(**) dal Corrisp. R. DEAGLIO.

1. La presenza di atomi interstiziali di carbonio e di azoto in un cristallo ferromagnetico dà luogo a singolari proprietà magnetiche, fra cui segnatamente la variazione della permeabilità nel tempo, dopo un processo di smagnetizzazione ⁽¹⁾.

L. Néel ⁽²⁾ ha dato una esauriente teoria del fenomeno. Essa si fonda sull'ipotesi che la presenza di un atomo interstiziale, per esempio di carbonio nelle posizioni del tipo $(1/2, 0, 0)$, in un cristallo ferromagnetico cubico a corpo centrato, per esempio ferro, è associata ad una energia $w \cos^2 \varphi$, essendo φ l'angolo fra la retta congiungente i due atomi del cristallo più prossimi all'atomo interstiziale e la direzione dell'intensità di magnetizzazione nella regione del cristallo prossima all'atomo interstiziale stesso. Quando si smagnetizza il cristallo, per esempio per mezzo di campi alternativi, le pareti di Bloch assumono un assetto del tutto casuale rispetto a quello che avevano prima della smagnetizzazione, e quindi, in un primo istante, la distribuzione di atomi di carbonio nelle tre direzioni principali del cristallo può ritenersi isotropa rispetto all'assetto delle pareti. Col trascorrere del tempo, però, gli atomi di carbonio si ripartiscono secondo le tre direzioni in modo da conseguire l'equilibrio termodinamico compatibile coll'energia w ; quindi in ogni regione del cristallo, si avrà un lieve eccesso di atomi interstiziali nelle posizioni allineate con la direzione dell'intensità di magnetizzazione nella regione stessa. Questa distribuzione non più isotropa (in ogni regione del cristallo) degli atomi interstiziali ha come conseguenza una minor mobilità delle pareti di Bloch. La permeabilità che si osserva dopo la smagnetizzazione va dunque diminuendo nel tempo fino a raggiungere un valore costante, corrispondente alla definitiva distribuzione anisotropa degli atomi interstiziali.

Se dopo la smagnetizzazione si applica un campo $H(t)$ (t essendo il tempo contato a partire dalla fine della smagnetizzazione), lo spostamento $u(t)$ di una parete di Bloch è dato, secondo Néel ⁽²⁾, dalla

$$(1) \quad R(u) + H(t) \cdot (\bar{J}_1 - \bar{J}_2) + W_0 \int_0^t f[u(t) - u(\tau)] \cdot g(t - \tau) d\tau = 0$$

(*) Lavoro eseguito presso il Centro Studi per l'Elettrofisica, all'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris, Torino.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) J. A. EWING, « Proc. Roy. Soc. », 46, 269 (1889); G. WILD, A. PERRIER, « Archiv. des Scien. Phys. et Natur. », 7, 209 (1925); J. L. SNOEK, « Physica », 5, 663 (1938); 6, 661 (1939); 6, 591 (1939); 7, 515 (1940); 8, 734 (1941); 9, 862 (1942); 15, 244 (1949).

(2) L. NÉEL, « Jour. de Phys. et de Rad. », 13, 250 (1952); 12, 339 (1951).

ove $R(u)$ è la pressione agente sulla parete in assenza di atomi interstiziali; J_1 e J_2 sono le intensità di magnetizzazione dei due domini separati dalla parete; W_0 vale $cw^2/3 kT$ (c = concentrazione degli atomi interstiziali; k = costante di Boltzmann; T = temperatura assoluta); f è una funzione caratteristica della parete; g è una funzione che tiene conto delle costanti di tempo di diffusione dell'atomo interstiziale nel reticolo.

L'equazione (1) è in generale di assai difficile soluzione, a meno che la funzione $H(t)$ sia particolarmente semplice. Si supponga in particolare che $H(t)$ sia nulla fino all'istante t_1 , per assumere poi un valore costante. Si ammetta che sia possibile determinare la u in un tempo breve, tale che in esso $u(t)$ non vari apprezzabilmente. Allora, facendo riferimento alle sole pareti a 180° , che qui più ci interessano, e sostituendo t a t_1 per semplicità di scrittura, l'equazione (1) assume la forma:

$$(2) \quad R(u) + 2HJ_s + W_0f(u) \cdot G(t) = 0$$

ove J_s è l'intensità di saturazione del materiale; $G(t)$ è una funzione dedotta dalla g della (1), ed è uguale a zero per $t = 0$ e uguale ad uno per $t = \infty$.

La funzione $f(u)$, calcolata da Néel⁽²⁾ passa per l'origine, presente un massimo per $u = 660 \text{ \AA}$ circa nel ferro, decresce poi fino a diventare praticamente nulla per $u = 1600 \text{ \AA}$. Per le pareti a 90° la $f(u)$ ha un andamento diverso.

Nel presente lavoro si vuole provare che la semplice applicazione dell'equazione (2) non consente di giustificare il comportamento macroscopico del materiale. Mentre i tentativi fatti da altri Autori⁽³⁾ per giustificare tale discrepanza si fondano su presupposti criticabili, i fatti sperimentali trovano piena spiegazione se si ammette che ogni parete a 180° incontri nel suo moto, in presenza di atomi interstiziali, una posizione di instabilità. Non è quindi possibile applicare la (2) per valori di u superiori ad un valore limite, corrispondente circa al valore per cui $f(u)$ è massima.

2. Per esaminare l'effetto nella sua massima intensità conviene fare riferimento ai tempi $t = 0$ e $t = \infty$, cui corrispondono, per $G(t)$ i valori zero e uno. Per $t = 0$ l'equazione (2), risolta rispetto ad H fornisce

$$(3) \quad H_0 = - \frac{R(u)}{2J_s}$$

mentre per $t = \infty$ si ha:

$$(4) \quad H_\infty = - \frac{R(u) + W_0f(u)}{2J_s}$$

Dato un valore di H , la (3) e la (4) fornirebbero, in forma implicita, i corrispondenti valori di u a $t = 0$ e a $t = \infty$ senza ambiguità se ad ogni valore di H corrispondesse un solo valore di u . Per la (3) ciò è senz'altro vero per ogni valore di H , ma per la (4) c'è tutto un intervallo (H_1, H_2) di H (fig. 1), ove allo stesso valore di H corrispondono 3 valori di u (punti 1, 2 e 3 di fig. 1)

(3) P. BRISSONNEAU, «Comptes Rendis», 239, 346 (1954); 244, 868 (1957); 244, 1341 (1957).

a causa della forma della $R(u)$ e della $f(u)$. È evidente che delle tre posizioni possibili la parete assumerà quella corrispondente al punto 1, poiché per raggiungere le altre la parete dovrebbe passare per la posizione u_1 (fig. 1) ove la pressione resistente $R(u) + W_0 f(u)$ è maggiore della pressione applicata $2 H J_s$.

Ne consegue che il moto della parete è definito dalla curva a tratto intero di fig. 1, ossia la parete è trattenuta dalla pressione dovuta agli atomi interstiziali solo se il campo è inferiore ad H_2 . Se si applica un campo superiore

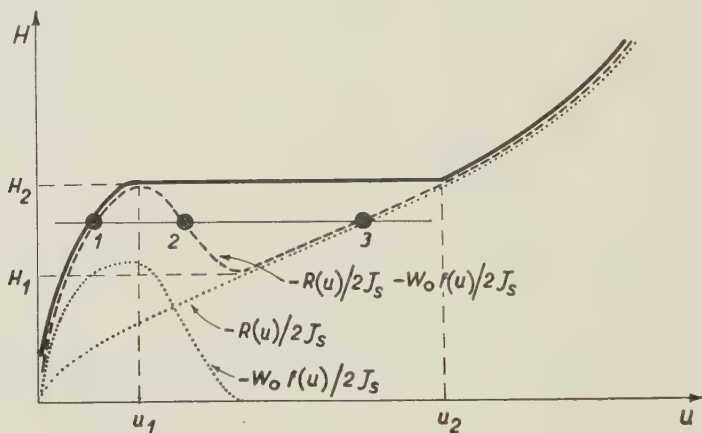


Fig. 1. - Spostamento di una parete di Bloch a 180° a vari valori di campo (curva intera).

(o uguale) ad H_2 la parete si muove fino ad occupare la stessa posizione che avrebbe occupato, sotto quel campo, anche in assenza di carbonio.

Se si definisce con Néel ⁽²⁾ « campo di viscosità » H_t (champ de traînage) la differenza fra le curve di equilibrio a $t = 0$ e a $t = \infty$ prese secondo parallele all'asse H , si può facilmente dimostrare, sempre facendo riferimento alla figura 1, che H_t è espresso da

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} H_t = - \frac{W_0 f(u)}{2 J_s} & \text{per } u < u_1 \\ H_t = - \frac{R(u_1) + W_0 f(u_1) - R(u)}{2 J_s} & \text{per } u_1 \leq u \leq u_2 \\ H_t = 0 & \text{per } u > u_2. \end{array} \right.$$

Il valore u_1 è quello per cui la curva $-[R(u) + W_0 f(u)]$ è massima; il valore u_2 è quello per cui il secondo membro della seconda delle (5) diventa zero.

Se l'instabilità della parete non venisse considerata, il campo di viscosità sarebbe definito dalla prima delle (5) in tutto il campo di u , e quindi riprodurrebbe proporzionalmente la funzione $f(u)$. A causa dell'instabilità, invece, il campo di viscosità riproduce la $f(u)$ solo fino al suo massimo, dopo di che decresce molto più lentamente che non la $f(u)$.

3. Se si considera ora un materiale reale, con un insieme di numerosissime pareti di Bloch, la previsione dell'effetto macroscopico osservabile

diventa oltremodo complessa. Si può però mostrare che l'effetto della instabilità è preponderante anche nel comportamento medio sperimentabile, descrivendo in modo schematico l'insieme delle pareti.

Si consideri intanto un materiale in cui le pareti a 180° danno contributi alla magnetizzazione totale gradi rispetto a quelli delle pareti a 90° . Ciò è ragionevole per il ferro o ferro silicio ricotti, ed è anche stato messo in evidenza con esperienze dirette, mediante la tecnica di Bitter-Elmore ⁽⁴⁾. Alla condizione di prevalenza del contributo alla magnetizzazione delle pareti a 180° ci si può anche ulteriormente avvicinare sottoponendo il provino ad una tensione meccanica uniforme ⁽⁵⁾.

Se le pareti a 180° fossero tutte parallele alla direzione del campo, e i domini avessero tutti uguali dimensioni, l'intensità di magnetizzazione macroscopica J sarebbe proporzionale allo spostamento u della singola parete secondo la relazione:

$$(6) \quad J = \frac{2J_s}{h} u$$

essendo h la distanza fra due pareti successive. Allora le curve macroscopiche di equilibrio a $t = 0$ ed a $t = \infty$ sarebbero proporzionali a quelle di fig. 1, relative ad una sola parete. Riportate come è consuetudine, esse apparirebbero come in fig. 2 *a*, in cui il tratto verticale della curva a $t = \infty$ è dovuto all'instabilità delle pareti. Se si tien conto invece che le pareti possono avere tutte le orientazioni rispetto al campo, si deduce che le condizioni di instabilità si verificano a valori di campo diversi per ogni parete. La figura 2 *b* mostra schematicamente le curve di equilibrio nel caso di tre orientazioni di pareti, e la figura 2 *c* nel caso di infinite orientazioni. In ogni

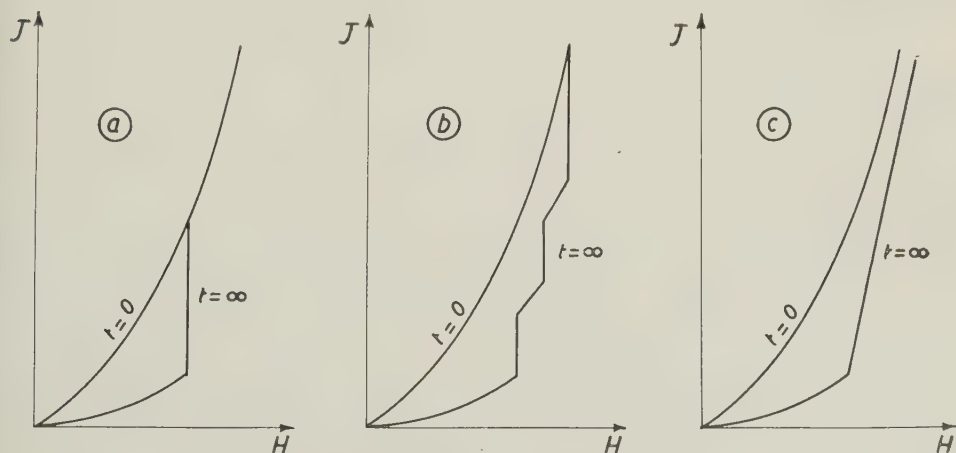


Fig. 2. - Curve macroscopiche (schematiche) a $t = 0$ e $t = \infty$.

- a) se tutte le pareti sono orientate parallelamente al campo;
- b) se esse hanno tre possibili orientazioni;
- c) se tutte le orientazioni sono possibili.

(4) H. C. WILLIAMS, R. M. BOZORTH, W. SHOCKLEY, « Phys. Rev. », 75, 155 (1949)

(5) R. M. BOZORTH, *Ferromagnetism*, Van Norstand, Co. N. Y. Cap. XIII.

caso dunque la curva di campo di viscosità macroscopica mostra un tratto ascendente che riproduce sostanzialmente la funzione $f(u)$, e poi decresce molto lentamente al crescere di J , a causa dell'instabilità delle pareti.

4. Le condizioni teoriche relative alla forma della $H(t)$ e alla rapidità della misura di u , ossia di J , sono facilmente realizzabili in pratica, la prima mediante una normale apparecchiatura per misure balistiche, la seconda operando su campioni di ferro con carbonio interstiziale ad una temperatura di circa -16°C . Infatti a quella temperatura le condizioni corrispondenti a $t = \infty$ sono realizzate dopo circa 30' dalla smagnetizzazione, mentre la misura di J , con un galvanometro usuale, richiede circa 5''.

Si è sperimentato su tre provini: uno di ferro ricotto, uno di ferro laminato ed uno di ferro silicio col 3,5 % di Si, opportunamente trattati. Su tutti i provini sono state rilevate le curve a $t = 0$ e a $t = 30'$. Inoltre sono state misurate le dimensioni dei domini in ciascuno di essi con la tecnica di Bitter-Elmore. Le curve di campo di viscosità rilevate sono riportate in fig. 3. Le dimensioni dei domini sono le seguenti:

ferro ricotto	$22 \pm 3,5 \mu m$
ferro laminato	$18 \pm 4,9 \mu m$
ferro silicio al 3,5 %	$72 \pm 1,1 \mu m$

Il ferro ricotto è stato poi sottoposto ad una tensione uniforme di $40\text{N}/(\text{mm})^2$ ⁽⁶⁾ al fine di ridurre il numero, e quindi l'effetto, delle pareti a 90° . La corrispondente curva di campo di viscosità è anch'essa riportata in fig. 3. I seguenti rilievi, a commento dei dati sperimentali, mostrano che i fatti osservati sono in accordo con la teoria svolta.

a) Tutte le curve presentano un tratto ripido iniziale, e poi decrescono molto più lentamente.

b) La parte iniziale, per i provini di ferro, è praticamente identica sia che il materiale sia ricotto, incrudito o teso. Infatti in tale zona H_t riproduce $f(u)$, che non dipende dalla curva di magnetizzazione a $t = 0$, ossia dalla $R(u)$.

c) La parte discendente cambia invece da provino a provino. Infatti in tale zona vale la seconda delle (5) per la quale H_t dipende da $R(u)$. L'incrudimento è stato fatto appunto per provocare una considerevole variazione di permeabilità, e quindi della $R(u)$, senza alterare gli altri parametri (per esempio dimensioni dei domini).

d) Dalle (6) si deduce che il rapporto fra l'ascissa del massimo nel ferro-silicio e l'ascissa del massimo nel ferro dovrebbe essere uguale al rapporto inverso delle dimensioni dei domini. Dalle curve di figura 3 si ricava per il primo rapporto il valore 0,30 e dalle osservazioni al microscopio (con la tecnica di Bitter-Elmore) si è ricavato per il secondo il valore 0,27. L'accordo è assai soddisfacente, dimostrando che l'applicazione dell'equazione (6)

(6) N indica l'unità coerente del sistema MKSA, il newton; 9,8 newton equivalgono a 1 Kg_p .

per trasferire i risultati relativi ad una parete, all'intero provino, è largamente giustificata.

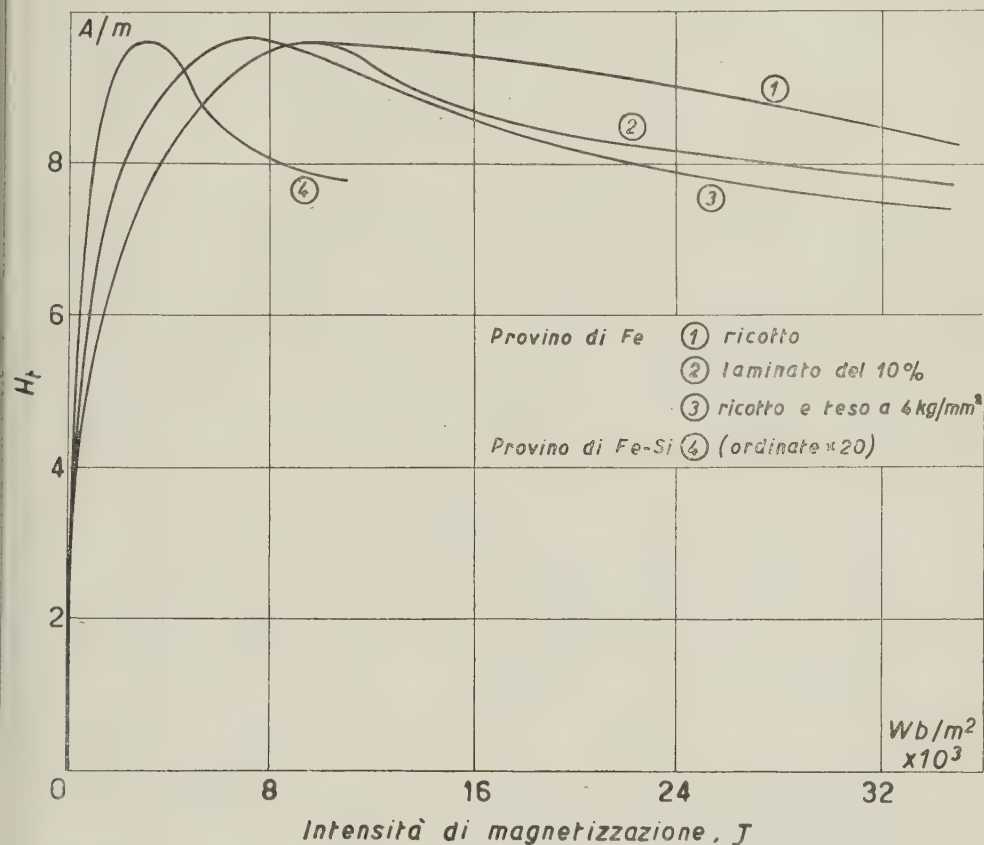


Fig. 3. — Curve di campo di viscosità per i diversi provini; il campo H considerato è quello che, nell'interno del solenoide di n spire, percorso dalla corrente I in ogni spira, è definito da: $H = nI$. Questo campo ha valore 1 (A/m) nei punti ove il classico campo magnetico ha il valore $(1/4\pi) 10^{-3}$ Oe.

5. In conclusione, per spiegare i fatti sperimentali occorre descrivere il moto della parete singola secondo la teoria di Néel, ma aggiungendovi l'osservazione relativa all'instabilità della parete.

Le curve sperimentali non si possono giustificare invocando un effetto composto di pareti a 90° e a 180° dato che l'andamento delle curve non muta se il provino è soggetto a tensione uniforme. Non si può sostenere d'altra parte che la dispersione delle $R(u)$ da parete a parete possa spiegare le curve sperimentali: infatti sarebbe irragionevole attribuire importanza a tale dispersione solo oltre il massimo del campo di viscosità.

Al contrario, tutti i fatti sperimentali sono in accordo con le conseguenze dell'ipotesi dell'instabilità.

La presente ricerca è stata eseguita sotto gli auspici dell'ARDC, USAF (Contr. AF 61-(514)-1331), tramite l'European Office ARDC.

Chimica. — *Reattività meta e para rispetto ai gruppi OCH_3 e SCH_3 . Determinazione approssimata del $\Delta\Delta F^\ddagger$ per l'effetto dell'inibizione sterica di risonanza sulla bromurazione del metossidurene (*)*.
Nota di GABRIELLO ILLUMINATI, presentata (**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Nei precedenti studi cinetici sui polimetilbenzeni ci siamo soprattutto occupati di sostituenti che non danno luogo a effetti sterici di rilievo; tali sono gli alogeni e i gruppi CH_3 e CN . Presentiamo ora, per la bromurazione, dati di reattività con i sostituenti di gruppo Vib OH , OCH_3 e SCH_3 , per alcuni dei quali (*p*- OCH_3 e *p*- SCH_3) sono da attendersi chiari effetti di inibizione sterica di risonanza a causa delle dimensioni, del tipo di simmetria, della polarizzabilità, dell'intensità della coniugazione e della posizione rispetto al reagente elettrofilo. I nuovi risultati cinetici sono riportati nella Tabella.

TABELLA.

Dati cinetici sulla bromurazione di alcuni ossi-, metossi- e metiltio-derivati dei polimetilbenzeni in acido acetico, a 30°.

Composto aromatico	Sostituente esaminato	R (a)	k/k_0 (b)
2-Ossimesitilene	<i>m</i> -OH	$5,95 \times 10^5$	14,205
2-Metossimesitilene . .	<i>m</i> - OCH_3	$8,11 \times 10^3$	0,194
3-Metossidurene	<i>p</i> - OCH_3	$8,21 \times 10^7$	$1,64 \times 10^5$
2-Metiltiomesitilene . .	<i>m</i> - SCH_3	$1,05 \times 10^3$	$2,515 \times 10^{-2}$
3-Metiltiodurene	<i>p</i> - SCH_3	$4,84 \times 10^5$	$0,969 \times 10^3$

(a) Velocità di bromurazione relativa al durene (= 1000).

(b) Reattività per posizione di attacco relativa all'idrocarburo capostipite (mesitilene o durene).

L'analisi del problema strutturale può essere illustrata graficamente in base all'equazione di Hammett. Nella figura è tracciata la retta $\rho - \sigma^\ddagger$ che ha come pendenza il valore di $\rho = -8,69$, da noi già determinato nel precedente lavoro (1). Disponendo degli appropriati valori delle costanti σ e σ^\ddagger , gli effetti sterici risultano dal grado di deviazione dei dati di reattivi-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale e Inorganica dell'Università di Roma e Centro di Chimica Generale del C.N.R.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) G. ILLUMINATI, «Ricerca Sci.», 28, (1958), N° 6 (giugno).

vità ($\log k/k_0$) dalla retta. Il diagramma indica che non vi sono rilevanti effetti sterici, come è infatti teoricamente prevedibile, per i gruppi OCH_3 e SCH_3 in posizione *meta*. Un deciso effetto di *parziale* inibizione sterica di risonanza si nota invece per il gruppo CCH_3 in posizione *para*. La linea

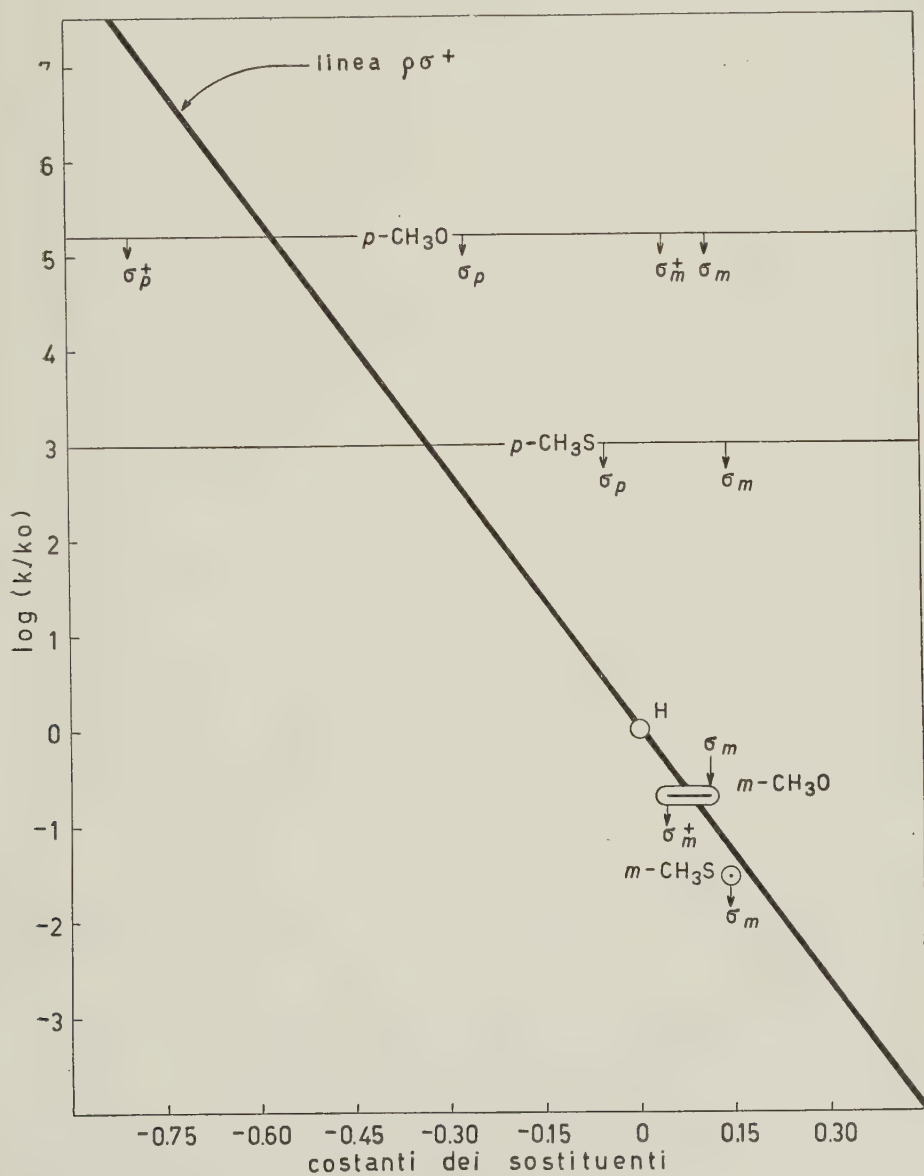


Fig. 1.

di reattività del $p\text{-OCH}_3$ interseca la retta $\rho - \sigma^+$ a una quota notevolmente più bassa di quella prevista dalla costante σ_p^+ ($-0,764$). La variazione di energia libera corrispondente a questa riduzione di reattività è di circa 2 kcal./mole e misura l'entità della destabilizzazione del complesso attivato

causata dalla rotazione del gruppo OCH_3 fuori del piano del sistema aromatico sotto la tensione prodotta dai gruppi che lo fiancheggiano in posizione *orto*. È anche interessante notare che malgrado questa azione deattivante dell'effetto sterico il gruppo $p\text{-OCH}_3$ riesce a produrre un effetto attivante residuo di risonanza molto forte; la linea di reattività del $p\text{-OCH}_3$ interseca infatti la retta $\rho - \sigma^+$ a una quota più elevata di quella prevista dalla costante σ_p ($-0,268$).

Una situazione del tutto analoga si presenta per il gruppo $p\text{-SCH}_3$. In tal caso però non si può calcolare il $\Delta\Delta F^+$ per il grado di inibizione sterica di risonanza in giuoco in quanto non è ancora nota la costante σ_p^+ . Per il gruppo SCH_3 la Tabella riporta per la prima volta dati quantitativi comprovanti un effetto p -orientante di questo gruppo molto forte.

Altri risultati interessanti che emergono dai presenti dati si possono riassumere come segue: 1° i gruppi OCH_3 e SCH_3 in posizione *meta* sono debolmente o moderatamente deattivanti; 2° il gruppo OH in posizione *meta* è moderatamente attivante, con $\sigma_m^+ = -0,133$, valore che noi riportiamo per la prima volta. Tali dati gettano nuova luce sulla trasmissione dell'effetto di risonanza dell'ossigeno e dello zolfo a un centro di reazione *meta* dimostrando, tra l'altro, che l'intensità di tale trasmissione non è sufficiente a far predominare l'effetto di risonanza su quello induttivo in posizione *meta* nel caso dei gruppi OCH_3 e SCH_3 pur trattandosi di reazioni in cui il reagente ha una domanda elettronica tra le più forti.

I risultati qui esposti brevemente saranno oggetto di una più dettagliata descrizione e di una più ampia discussione sul « Journal of the American Chemical Society » come Nota IX della serie *Sostituzioni nei polimetilbenzeni*. A tale Nota peraltro rimandiamo per la sintesi dei derivati durenici, che non è stata ancora riportata in letteratura.

Geologia. — *Contributo alla conoscenza del vulcanismo terziario veneto* (*). Nota di GIULIANO PICCOLI, presentata (**) dal Socio GB. DAL PIAZ.

Da qualche anno mi sto occupando delle manifestazioni vulcaniche terziarie venete. Esse furono studiate da G. e Gb. Dal Piaz, R. Fabiani, M. Stark, L. Maddalena, L. Riccoboni, C. Andreatta, A. Riedel e G. Schiavinato fra gli altri, sia dal punto di vista geologico-stratigrafico e tettonico, sia dal lato petrografico e chimico. Manca però ancora uno studio particolare degli apparati vulcanici e del tipo delle eruzioni che li originarono (se si eccettuano i Colli Euganei). Ciò è dovuto al fatto che nelle condizioni sottoma-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova sotto gli auspici del Centro di studio per la petrografia e la geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

rine, in cui si svolse prevalentemente l'attività eruttiva, non si formarono edifici vulcanici tipici, e alle difficoltà derivanti dall'intensa azione erosiva cui furono soggette le varie formazioni. Ricostruire dai depositi conservati in modo frammentario l'estensione e la forma degli apparati originari è un problema talora irrisolvibile. A queste difficoltà di studio fanno eccezione solo molti necks (R. Fabiani, G. Dal Piaz, G. Schiavinato), nonché le imponenti colate dei Lessini centro-orientali e delle regioni di Thiene-Bassano del Grappa.

Mi sono proposto il compito di ricostruire, nei limiti del possibile, la storia dei vari centri eruttivi ⁽¹⁾. A questo scopo sono state esaminate finora in dettaglio le aree comprendenti buona parte dei Colli Berici, parte dei Lessini occidentali e centrali, la zona compresa fra Marostica e Bassano ed una vasta porzione ad occidente della prima località citata, e sono state effettuate ricognizioni generali in tutta la regione eruttiva. I rilevamenti furono effettuati alla scala 1 : 10.000.

Il primo argomento da considerare riguarda la data del vulcanismo. È già noto come esso presentò la sua massima intensità nel tardo Cretaceo e nell'Eocene inferiore, nell'Eocene medio e nell'Oligocene medio-superiore, con manifestazioni tardive, mio-plioceniche secondo alcuni autori, nella sola area euganea. Anche la sostanziale uniformità delle manifestazioni, di carattere basico, con la nota eccezione dei tipi petrografici acidi euganei, è già acquisita nelle cognizioni scientifiche. Dall'esame dei rapporti con le formazioni sedimentarie o dei fossili contenuti negli estesi depositi piroclastici si può riconoscere uno spostamento dell'attività eruttiva da ovest verso est entro i limiti di tempo in cui detta attività si svolse (Cretaceo-Oligocene ed anche Mio-Pliocene per gli Euganei). Le manifestazioni più occidentali, nella zona del M. Baldo, presso il lago di Garda, sono riferibili alla parte basale del Cretaceo superiore, come hanno dimostrato gli studi micropaleontologici, tuttora inediti, di A. Rizzini. Nel suo lavoro di laurea, svolto sotto la guida di R. Malaroda, egli esaminò le microfaune di tufi basici fossiliferi intercalati ai depositi sedimentari, accertando la presenza nei detti tufi di forme tipicamente cretacee, tra le quali alcune *Globotruncane* (*Globotruncana fornicata*, *Gbt. lapparenti coronata*, *Gbt. lapparenti lapparenti*, *Gbt. cfr. renzi*, *Gbt. stephani*), che nel loro complesso si possono attribuire al Se-

(1) Per l'ampiezza dell'argomento, che può essere affrontato solo per gradi ed entro larghi limiti di tempo, mi sono valso e intendo valermi della più vasta collaborazione nella raccolta di dati ed osservazioni, che controllo poi personalmente e di cui mi riservo l'interpretazione. Ringrazio per il contributo finora apportato i dott.ri Carla Adami, Giovanna Bianchi, Aliprandò Franceschetti, Bortolo Franceschetti, Giuseppe Fregolent, Maria Elisa Passuello, Gastone Rigato, Elio Sommariva, Pisana Talamini, Eleonora Zanettin. Il professore G. Perin fornì, con i suoi collaboratori, un gran numero di osservazioni, ed eseguì il rilevamento alla scala 1 : 25.000 delle aree basaltiche dei Lessini veronesi, mettendo a disposizione i risultati del suo lavoro. In questa sede voglio rinnovargli i più vivi ringraziamenti.

noniano inferiore. In tutta l'area compresa fra il Garda e la Val Lagarina l'attività vulcanica si spense con l'Eocene medio. Nei Lessini occidentali e centrali le eruzioni iniziarono per lo più fra il Cretaceo superiore e l'Eocene o in questo ultimo periodo, e continuarono a varie riprese fino al Priaboniano. Nei Lessini orientali l'attività si protrasse fino all'Oligocene, essendo iniziata circa contemporaneamente a quella del resto dei Lessini. È prevalentemente oligocenico il parossismo vulcanico che originò i tipici necks ed altri apparati dei Berici (dove pure esistono formazioni eruttive più antiche), mentre infine nella zona Thiene-Bassano le ultime colate basaltiche stanno immediatamente al letto delle arenarie del Miocene inferiore, come i tufi nei Lessini orientali e zone vicine.

Mi pare valga la pena di far notare un'analogia con lo spostamento delle manifestazioni basaltiche siciliane. Esso avvenne in direzione da sud-ovest a nord-est, dai basalti giuresi di Roccapalumba, a quelli cretacei di Priolo, poi ai basalti terziari dei Monti Iblei (miocenici verso Augusta e Melilli, pliocenici presso Lentini e Francofonte), per finire con il grande edificio basaltico quaternario etneo.

Nel corso delle ricerche di campagna, su cui riferiscono in questa Nota, furono rinvenuti numerosi nuovi affioramenti, talora di notevole interesse. Ho curato in modo particolare la rappresentazione cartografica delle vulcaniti, suddividendole secondo la composizione (tufi stratificati o caotici, con proietti di varia natura, brecciole e brecce, lave scoriacee o compatte, ecc.); ho distinto le diverse fasi eruttive in formazioni apparentemente uniformi; ho cercato di collegare le osservazioni in zone vicine. L'estensione della ricerca alle aree non ancora studiate permetterà di certo un'interpretazione migliore e più completa dei fenomeni.

Volendo anticipare in questa sede solo i risultati più sicuri, svolgerò la mia rassegna in ordine geografico, a partire da occidente.

Nei *Monti Lessini* sono state esaminate o sono in corso di studio le formazioni eruttive affioranti sulle dorsali montuose a nord e nord-est di Verona. In questa zona il centro vulcanico maggiore e più interessante è quello del M. Tondo, fra la Valpantena e la Valle di Negrar. Grandi bancate di brecce e tufi, stratificati solo nella parte più alta, formano estesi depositi, che aumentano di spessore con un angolo di inclinazione sensibile man mano che ci si avvicina al M. Tondo. Il centro di queste eruzioni di età spilecciana si trovava, a quanto pare, nelle vicinanze del M. Tondo stesso. I tufi sono poi sormontati da calcari luteziani. In corrispondenza alla vetta del monte affiorano dei basalti a fessurazione globulare, che rappresentano con ogni probabilità il riempimento di un camino vulcanico di età eocenica media. Anche qualche colata sembra collegarsi a questo centro di attività. La presenza di fossili e di intercalazioni calcaree e marnose nelle parti più alte dei depositi tufacei documentano condizioni sottomarine. Fa meraviglia che in tale ambiente abbiano potuto sostenersi in alcuni punti delle inclinazioni dei fianchi dell'edificio vulcanico di un certo valore, e che oggi sono documentate dall'eteropia con i calcari giustapposti. Sembrano infatti da escludere

sensibili spostamenti tettonici locali che abbiano mutato in modo notevole gli originari rapporti di giacitura, poiché nella zona esiste solo una piana anticlinale accompagnata da faglie limitate sia come estensione che come rigetto. L'attività eruttiva deve essersi mantenuta quindi, con più riprese, dallo Spilecciano al Luteziano. A questo grande edificio eruttivo sono collegati numerosi filoni entro i calcari circostanti ed alcuni necks di brecce basaltiche. Uno fra questi, affiorante presso i Molini di Stallavena, ha circa 300 metri di diametro. Nella parte più elevata le brecce passano a tufi ben stratificati al centro del neck, testimoniando la presenza del mare fino a quel livello. Da notare che ai margini le brecce arrivano ad un'altezza di alcune decine di metri sopra al livello in cui sono conservati i tufi centrali, e si trovano dovunque in contatto laterale con la scaglia, di cui inglobano qua e là grossi blocchi. Si può pertanto dedurre che la cavità prodotta dall'esplosione che originò il neck fu di enormi dimensioni, ed anche abbastanza profonda. Piccole faglie di varia giacitura, a forte inclinazione, interessano i depositi sedimentari attorno al neck, e sono collegabili all'esplosione e forse ai movimenti finali di assestamento delle brecce in via di raffreddamento. Le ricerche sono ancora in corso in tutta la regione citata.

Molto più modesti sono i depositi eruttivi della dorsale fra la Valpanzana e la Val Squaranto, dove si riconoscono banchi di tufi, brecce di necks, filoni e, presso Montorio, un frammento di colata basaltica di provenienza lontana.

Nella zona del M. Magrè, a sud di Schio, entro un'area basaltica di porzioni vastissime, affiora un'interessante breccia di nuclei ultrafemici a facies intrusiva immersi nel basalto compatto. Sono in corso ricerche petrografiche da parte di E. Callegari per stabilire il chimismo delle rocce in questione ed il loro significato petrogenetico.

Nei *Colli Berici* ho concentrato finora le ricerche nella zona centro-orientale, dove oltre ai banchi di tufi si incontrano numerosissimi camini di esplosione di ogni misura. Alcuni risaltano quali dossi dalle formazioni sedimentarie circostanti, per un fenomeno di inversione del rilievo, ma in prevalenza sono solcati ed attraversati dai corsi d'acqua, che incisero le brecce erodibili. Per lo più si può notare in esse una straordinaria ricchezza di proietti calcarei di varie età, oltre che basaltici.

Le formazioni vulcaniche più antiche nei Berici sono i tufi fossiliferi intercalati fra la scaglia rossa e i calcari e le marne spilecciani, o compresi entro questi ultimi nella zona di Villaga, Barbarano e Nanto. Si tratta di tufi stratificati, a grana fine, di colore giallastro uniforme, spesso misti a materiale calcareo in proporzioni variabili, talora ricchi di macro- e microfossili. Si può osservare qua e là una stratificazione incrociata. Tufi del tutto analoghi si ritrovano intercalati alle rocce sedimentarie luteziane sia nella zona di Barbarano che nella Val Liona, dove assumono la massima estensione. Si possono riferire in parte al Luteziano inferiore ed in parte al Luteziano medio-superiore. Forse nelle vicinanze della stessa Val Liona, o nella zona alluvionata di fondovalle, era situato il centro eruttivo: lo si può

dedurre da una variazione granulometrica dei tufi in senso orizzontale. La grana diventa infatti più minuta man mano che ci si allontana dalla parte bassa della valle. La granulometria gradata e ricorrente in senso verticale testimonia il succedersi di atti esplosivi in ambiente subacqueo. Verso S. Gottardo e Brendola, come nella zona di Lonigo, depositi tufacei sono compresi dell'Eocene superiore, mentre sono oligocenici nei Berici settentrionali.

Di grande interesse si rivelano i numerosi necks, fra cui quelli famosi di Lumignano e del Gazzo di Zovencedo. Essi perforano le formazioni oligoceniche ed appartengono al tardo Oligocene (fino al Miocene inferiore), come poté dedurre il Fabiani. Sono situati spesso all'incrocio di faglie di distensione.

Un particolare addensamento di camini di esplosioni si osserva ad ovest di Castegnaro, Nanto e Mossano. Le breccie basaltiche contengono in taluni casi un grande numero di proietti calcarei appartenenti a livelli riconoscibili. Le esplosioni devono aver avuto una notevolissima intensità: brandelli (anche di notevoli dimensioni) di scaglia furono strappati alle pareti e si trovano entro le brecce alla stessa quota dei depositi oligocenici esterni. Per il neck di Lumignano, oltre quanto già descritto dal Fabiani, si può far notare come una disposizione ad anelli concentrici del materiale dimostri le forti azioni di attrito dovute alle pareti calcaree. La cavità, svasata ad imbuto verso l'alto, è riempita infatti alla periferia da materiale tufaceo finissimo, mentre al centro le brecce sono grossolane e contengono un maggior numero di inclusi (tufacei, ma specialmente basaltici e calcarei), angolosi e di forma varia. La stessa disposizione si osserva nel neck esistente vicino a S. Gottardo, anche se meno regolare, mentre per i numerosi necks minori non si può notare se non una lieve diminuzione di grana delle brecce ai margini esterni del camino. La svasatura superiore di alcuni necks indica che in questi casi non dovremmo trovarci lontani dall'originario orlo del cratere d'esplosione. La descrizione dei vari diatremiti, la loro ubicazione e il loro studio particolareggiato saranno argomento di un altro lavoro, quando le indagini saranno più complete. È però il caso di segnalare un'eccezionale formazione vulcanica a nord-est di Mossano, presso Case Olivari. Qui la parte centrale del camino di esplosione, anziché dalle solite brecce, presenti alla periferia, è occupata da basalto vacuolare. Esso ingloba nella parte più alta numerosi blocchi, anche molto grandi, di formazioni sedimentarie di livelli più elevati di quelle in posto circostanti. Mentre infatti i calcari circostanti sono sicuramente luteziani, i blocchi inclusi, calcarei o calcareo-marnosi, talora con piccole nummuliti, rappresentano facies priaboniane od oligoceniche, esistenti del resto in posto, con caratteri analoghi, sulle vette vicine. Si riconosce facilmente l'azione di metamorfismo termico subito dagli inclusi in esame ad opera del basalto. Si può pensare in questo caso ad un riempimento finale della cavità esplosiva da parte della lava in via di degassazione più lenta. In essa franarono blocchi dalle pareti del cratere, che rimasero fissati in una breccia a grandi elementi con cemento basaltico. Evidentemente così si estinse in quel punto il fenomeno effusivo.

Alcuni necks sono attraversati da filoncelli basaltici. Ma i filoni maggiori, situati in vicinanza di camini di esplosione, sono quelli di Case Mariotto (Zovencedo) e di Fontana dell'Orco (S. Gottardo). Il primo, segnalato da G. Rigato, è compreso in una zona di faglia, è a sua volta cataclasato, e presenta un'alterazione di probabile origine idrotermale. Esso non prosegue entro le brecciole del piccolo neck di Case Mariotto, verso cui è diretto. Il secondo filone nominato rappresenta uno dei maggiori dicchi dei Berici. Ha una potenza massima di 35 metri ed il suo sviluppo venne seguito da G. Fregolent per quasi 2 km. Nella letteratura era noto come un modesto filone doleritico presso C^{ne} Valmarana. Anche esso si svolge in vicinanza di un neck (di S. Gottardo), ma senza entrare in contatto con questo. Pare che il filone si sia formato in rapporto con il grande corpo eruttivo basaltico di Brendola.

Passando ora a considerare la zona a nord di *Bassano-Marostica-Thiene* si deve rilevare innanzitutto che qui prevalgono nettamente sui depositi piroclastici le formazioni laviche, indice di una più intensa attività effusiva. I basalti, sgorgati verosimilmente da fratture, si sono succeduti in colate estese e potenti per un lungo lasso di tempo. La formazione eruttiva più antica che si può osservare, affiorante nelle più profonde incisioni fluviali (per esempio del T. Lavarda), è una breccia di esplosione grossolana, a proietti basaltici arrotondati irregolari, talora rossastri, con geodi e vacuoli spesso riempiti di zeoliti e calcite. Il cemento tufaceo scuro, di grana da media a fine, presenta un notevole grado di compattezza. La breccia è ricoperta da basalti neri, vitrei, estremamente poveri di fenocristalli (questi ad occhio nudo sembrano essere dati solo dall'olivina), quasi privi di bolosità. Tali basalti si effusero pertanto caldissimi e fluidi, e formarono delle coperture laviche particolarmente estese, ben visibili nella zona presso Molvena. Dopo un periodo di stasi, nuovi banchi tufacei annunciano la ripresa dell'attività eruttiva, che diede luogo all'effusione di lave, molto meno calde. I basalti delle colate più alte sono infatti molto bollosi ricchi di fenocristalli di varie specie mineralogiche, ed oggi più facile preda dell'alterazione e dell'erosione. Tra Molvena e Marostica queste formazioni vulcaniche sono comprese fra i depositi sedimentari medio-oligocenici e quelli aquitaniani. L'attività ebbe un numero maggiore di fasi esplosive riconoscibili avvicinandosi a Marostica, dove i tufi e le breccie sono molto più abbondanti e ripetute. Presso Marsan poi sembra che l'attività vulcanica dal tipo lineare si sia evoluta in un vulcano di tipo centrale, in corrispondenza press'a poco al Monte di Gloss. Vicino a Marostica ho osservato assieme ad A. e B. Franceschetti begli esempi di «lava a cuscini», ulteriore testimonio dell'ambiente sottomarino di effusione. I tufi ridivengono più scarsi proseguendo verso nord e nord-ovest. Per non entrare in maggiori particolari prima di aver compiuto i debiti confronti, mi limito a segnalare la potenza anche cospicua di certe colate, e a prospettare la loro probabile rapida successione, come è indicato dal contatto immediato di varie colate sovrapposte senza intercalazioni sedimentarie o di altro tipo, ma con le parti scoriacee direttamente a contatto fra loro.

BIBLIOGRAFIA.

- ANDREATTA C., *I basalti della Valle dell'Alpone e i loro inclusi peridotitici*, « Boll. Soc. Geol. It. », 57 (1938); DAL PIAZ G., *Note sulla costituzione geologica di Albettonne*, Soc. Coop. Tip., Padova 1902; DAL PIAZ G., *Studio geologico del gruppo di Montegalda*, « Riv. di Min. e Cristall. It. », 28 (1902); DAL PIAZ G., *La costituzione geologica dei Colli Euganei*, « Acc. di Sc. Lett. e Art. di Padova », 51 (1934-35); DAL PIAZ Gb., *Sulla fauna, l'età e l'origine dei tufi basaltici dei dintorni di Brentonico nel Trentino*, Padova 1932; FABIANI R., *Sulla costituzione geologica delle colline di Sarcedo, nel Vicentino*, « Atti Ist. Veneto Sc. Lett. e Arti », 66 (1906-07); FABIANI R., *Sulle rocce eruttive e piroclastiche dei Colli Berici*, « Atti Acc. Scient. Ven. Trent. Istr. », 1911; FABIANI R., *La regione dei Berici*, « Uff. Idr. Mag. alle Acque di Venezia », 1911; FABIANI R., *La regione montuosa compresa fra Thiene, Conco e Bassano nel Vicentino*, « Uff. Idr. Mag. alle Acque di Venezia », 1912; FABIANI R., *Il Paleogene Veneto*, « Mem. Ist. Geol. Univ. Padova », 3 (1915); FABIANI R., *Il Terziario del Trentino*, « Mem. Ist. Geol. Univ. Padova », 6 (1922); FABIANI R., *Note illustrative della carta geologica delle Tre Venezie. Foglio Verona*, « Uff. Idr. Mag. alle Acque di Venezia », 1930; FABIANI R. e TREVISAN L., *Note illustrative alla carta geologica delle Tre Venezie. Foglio Schio*, « Uff. Idr. Mag. alle Acque di Venezia », 1939; MADDALENA L., *Studio petrografico dei basalti delle Bregonze nel Vicentino*, « Atti Soc. Ital. Sc. Nat. », 47 (1908); MADDALENA L., *Contributo allo studio petrografico delle rocce del Veneto*, « Mem. Ist. Univ. Padova », 2 (1914); MALARODA R. e SCHIAVINATO G., *Nuovi filoni e masse di rocce basiche dell'Altipiano dei Sette Comuni*, Padova 1954; PASA A., *L'Eocene inferiore del Veronese occidentale*, « Atti Soc. Ital. Sc. Nat. », 78, 1939; PERIN G., *Rilievo delle aree basaltiche dei Lessini Veronesi*. Studio inedito, Verona 1954; RIZZINI A., *Micropaleontologia e stratigrafia del Terziario del versante sud-orientale del Monte Baldo (Verona)*. Dissertazione di laurea in Scienze Geologiche presso l'Università di Padova, inedita, a.a. 1952-53; SCHIAVINATO G., *Ricerche chimico-petrografiche sui M. Berici*, « Rend. Soc. Miner. Ital. », 3 (1946); SCHIAVINATO G., *Limburgiti e basalti limburgitici della provincia magmatica euganeo-berico-lessinea*, « Rend. Soc. Miner. Ital. », 6 (1949); SCHIAVINATO G., *La provincia magmatica del Veneto sud-occidentale*, « Mem. Ist. Geol. Min. Univ. Padova », 17 (1950); TRENER G. B., *Note illustrative della carta geologica delle Tre Venezie. Foglio Trento*, « Uff. Idr. Mag. alle Acque di Venezia », 1933; UFF. IDR. MAG. ALLE ACQUE DI VENEZIA, *Fogli: Bassano del Grappa, Feltre, Padova, Peschiera, Riva, Rovigo, Schio, Trento, Verona della « Carta geologica delle Tre Venezie » alla scala 1:100.000*; ADAMI C., BIANCHI G., FRANCESCHETTI A., FRANCESCHETTI B., FREGOLENT G., PASSUELLO M. E., RIGATO G., SOMMAVILLA E., TALAMINI P., ZANETTIN E., sottotesi di laurea in vulcanologia presso l'Università di Padova, inedite.

Zoologia (Anatomia). — *Contributo alla conoscenza delle connessioni interneuroniche nel ganglio stellato di Sepia officinalis* (*). Nota di PASQUALE GRAZIADEI, presentata (**) dal Socio A. PENSA.

Il ganglio stellato nella *Sepia off.* è un centro nervoso destinato alla funzionalità del mantello. A questo centro giungono, dall'anello periesofageo, fibre nervose raccolte in un unico fascio, il nervo palleale. Di tali fibre, alcune hanno diametri normali, altre hanno calibro variante da 50 a 200 e più micron. Le fibre gigantesche prendono origine dalla fusione sinciziale dei neuriti di più cellule dei centri periesofagei.

Nel ganglio stellato si distingue una zona periferica, dove hanno sede le cellule nervose ed una zona centrale o neuropilo. Le cellule nervose sono disposte in più strati con l'unico prolungamento rivolto verso il neuropilo; esse sono ravvicinate tra loro così da lasciare solo stretti interstizi occupati da elementi capsulari di contorno. Nel pirenoforo delle cellule gangliari, trattate con metodi di riduzione argentea, si impregnano elettivamente in nero immagini grossolanamente reticolari che pare siano riconducibili a quelle menzionate da Holmgren e da Bochenek come apparato canalicolare o trofospongio. Nelle stesse cellule, trattate col metodo del Nissl, non si colorano zolle cromofile distinte, ma il neuroplasma assume una colorazione diffusa mentre la parte che nei preparati all'argento appare impregnata e di aspetto reticolare rimane incolore, risultandone spazi chiari di aspetto canalicolare. Alcuni di tali spazi sembrano comunicare con l'esterno e nel loro interno si scorge una sostanza irregolarmente granulare e quasi incolore e qualche nucleo di cellule che hanno assunto posizione endocellulare. Anche per questo vi sarebbe una corrispondenza con quanto avevano notato l'Holmgren ed il Bochenek.

Al neuropilo del ganglio si dirigono le fibre del nervo palleale che vi si distribuiscono suddividendosi e ramificandosi in rami sempre più fini di modo che alla costituzione del neuropilo prendono parte le loro ramificazioni e le loro collaterali ed espansioni terminali. Alcune fibre però e specialmente ramificazioni di fibre giganti, dal neuropilo, si ramificano nello strato delle cellule formandovi reticoli pericellulari. All'intreccio del neuropilo del ganglio partecipano anche i prolungamenti nervosi delle cellule del ganglio stesso e le loro collaterali che, ramificandosi e suddividendosi in rami più fini, conferiscono al neuropilo quel carattere di estrema finezza che lo accomuna a quella che nella sostanza grigia dei centri nevrassiali dei vertebrati è definita come rete nervosa diffusa.

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio del Sistema Nervoso della Università di Pavia (Dir. A. Pensa) e nell'Istituto Anatomico della Università di Genova (Dir. F. Rossi).

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

Alcuni dei prolungamenti nervosi dei neuroni gangliari si raggruppano, nel neuropilo, in fasci e si fondono in singole grosse fibre nervose di natura sinciziale nelle quali non è più visibile la primitiva indipendenza. Questi assoni giganteschi, come pure quelli di minori dimensioni derivati da cellule singole, si distribuiscono direttamente, per la via dei nervi stellari, alla muscolatura del mantello.

Gli assoni in parte giganteschi dei centri periesofagei, che attraverso il nervo palleale arrivano al ganglio stellato e qui terminano, sono da considerarsi elementi pregangliari; gli assoni delle cellule del ganglio stellato che attraverso i nervi stellari si distribuiscono al mantello sono da considerare postgangliari. Tanto i primi quanto i secondi sono elementi effettori. Nel ganglio esiste anche una componente sensitiva, centripeta, rappresentata dalle ramificazioni nel neuropilo di neuriti di cellule di senso dislocate alla superficie del corpo, nello strato epiteliale o immediatamente sottoepiteliale del mantello. I prolungamenti nervosi di questi neuroni centripeti percorrono i nervi stellari ed in parte si risolvono nel ganglio, in parte, attraversatolo, percorrono il nervo palleale e raggiungono così i centri periesofagei.

Per tutto quanto sopra è esposto vedasi fig. 1.

Resta ora da chiarire quali siano le modalità di connessione degli elementi nervosi (cellule e fibre) nel ganglio stellato e con i neuroni pregangliari. Autori precedenti avevano ritenuto, sulla base di esperienze fisiologiche (Froelich) e morfologiche (Sereni e Young), che nel ganglio stellato esistessero vere sinapsi. Sereni e Young (1932) ed ancora Young in particolare (1936, 1939) avevano insistito sulla presenza di formazioni a bottone o a clava, esistenti nel neuropilo gangliare, contraenti rapporti con le fibre giganti, ed anche notarono accostamenti a fibre giganti di altre fibre e che da tali Autori vennero ritenuti l'espressione di un accostamento sinaptico.

Da quanto ho potuto osservare in preparati allestiti con varie tecniche e principalmente con l'impregnazione argentea secondo Bielschowsky-Gros ritengo che non sia ancora sufficientemente provata la vera natura di quelle formazioni terminali a bottone cui gli Autori citati hanno accennato. Ho anzi potuto verificare che, molte volte, queste formazioni sono immagini parziali dovute al taglio trasversale di una fibra in corrispondenza della emissione, da parte di questa, di una collaterale. Anche quegli accostamenti di fibre a fibre giganti che qualche volta possono notarsi nel neuropilo, ritengo non possano ritenersi formazioni dotate di particolare significato.

L'esame dei preparati mi ha invece indotto a considerare con interesse una formazione sino ad ora non sufficientemente illustrata, vale a dire la porzione più fine del neuropilo che rappresenta una vera rete nervosa. Essa è formata dalle ramificazioni e dalle collaterali dei neuriti dei neuroni pregangliari, dalle collaterali dei neuriti originati dalle cellule del ganglio stesso e dalle ramificazioni dei neuroni centripeti di senso. Questa espansione finissima si estende, oltretutto nel neuropilo, anche nello strato cellulare dove forma, attorno ai pirenofori, delicatissimi canestri. Non è pertanto improbabile che la trasmissione dello stimolo si effettui nel ganglio, proprio a mezzo

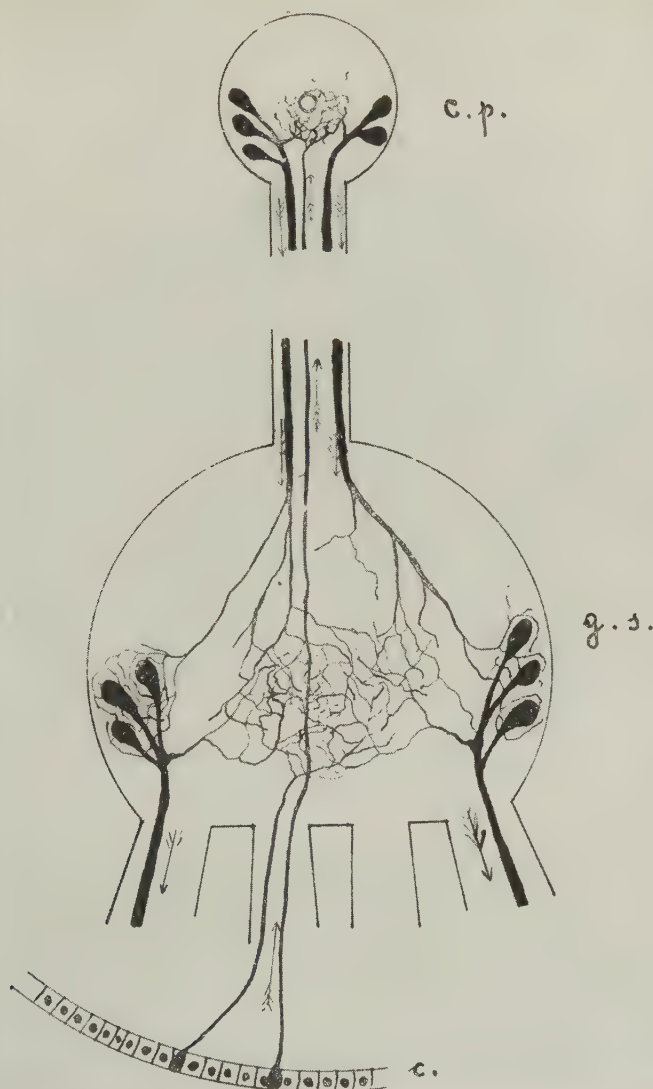


Fig. 1. - Schema di ganglio stellato della *Sepia*.

c. p., nervo palaleale con fibre eccitomotrici di primo ordine; g. s., ganglio stellare con neuropilo e cellule gangliari, cellule sensoriali e con fibre eccitomotrici di secondo ordine originatesi nel ganglio; c., fibre afferenti al ganglio di natura sensitiva.

di questa rete la quale, per la sua disposizione, permetterebbe una conduzione asso-somatica od asso-assonica a seconda che vengano utilizzate le porzioni della rete che avvolgono a canestro i pirenofori oppure solamente quelle porzioni strettamente limitate al neuropilo propriamente detto. L'inserimento, in questa rete, delle espansioni di neuriti afferenti il cui pirenoforo (fatto questo comune negli invertebrati) è dislocato alla periferia, può anche far ritenere possibile l'effettuarsi, a livello del ganglio, di riflessi semplici che si effettuano senza l'intervento dei centri superiori.

Zoologia. — *Individui sessuati e asessuati in Coscinasterias tenuispina* Lmk^(*). Nota di G. COGNETTI^(**) e R. DELAVAUT^(***), presentata^(****) dal Socio G. COTRONEI.

La *Coscinasterias tenuispina* è un Asteroide che vive nelle acque poco profonde della scogliera sommersa. Come è noto possiede una capacità rigenerativa che le permette una moltiplicazione per scissione (Kowalevsky⁽¹⁾, Crozier⁽²⁾, Tartarin⁽³⁾) e gli individui di questa specie presentano normalmente braccia rigeneranti, in genere da due a cinque, accanto a braccia più vecchie e di conseguenza più lunghe. Il 75 % degli esemplari è provvisto di sette braccia.

Nei mesi di settembre e ottobre 1957 abbiamo iniziato uno studio sul ciclo riproduttivo e sulla sessualità in questa specie utilizzando materiale del Golfo di Napoli. Abbiamo continuato poi le nostre ricerche nei mesi di gennaio e aprile 1958 su materiale della costa di Livorno. A Napoli sono stati studiati 128 individui provenienti dalle scogliere di Nisida e di Capo Posillipo, a Livorno altri 75 provenienti dalle scogliere di Antignano e Quercianella.

A causa della diversa lunghezza delle braccia abbiamo valutato la grandezza degli esemplari misurando il braccio più lungo dalla sua estremità all'apertura orale.

La prima constatazione che abbiamo fatto è che gran parte degli individui (52,2 %) non presenta le gonadi. I giovani con raggio massimo di lunghezza inferiore a 25 mm., ne sono sempre privi. La Tabella seguente si riferisce alla presenza di gonadi negli individui di diverse grandezze classificati con intervalli di lunghezza di 20 mm. ad eccezione dell'ultima categoria in cui l'intervallo, dato lo scarso numero degli individui, è di 30 mm. Nella prima colonna è segnata la lunghezza degli individui, nella seconda il numero degli individui esaminati, nella terza il numero degli individui provvisti di gonadi, nella quarta sono elencate le proporzioni degli individui muniti di gonadi rispetto al totale di ciascuna classe di grandezza, nella quinta è segnato il numero degli individui provvisti di gonadi in tutte le braccia, mentre

(*) Questo lavoro, eseguito parzialmente con fondi del C.N.R., è stato iniziato nella Stazione Zoologica di Napoli e completato nell'Acquario di Livorno e nell'Istituto Zoologico di Modena.

(**) Istituto di Biologia e Zoologia generale dell'Università di Sassari.

(***) Laboratoire de Biologie animale S.P.C.N. Parigi.

(****) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) A. KOWALEVSKY, «Z. Wiss. Zool.», 22 (1872).

(2) W. CROZIER, «Biol. Bull.», 39 (1915).

(3) A. TARTARIN, «Travaux Stat. Marine Endoume», 5 (1953).

le due colonne seguenti ci danno le proporzioni di questi fenotipi rispetto al totale di ciascuna classe (colonna 6) e rispetto agli individui con gonade (colonna 7).

Classe di grandezza in mm.	Frequenze	Frequenze individui sessuati	Proporzioni sessuati	Frequenze individui con gonadi in tutte le braccia	Proporzioni rispetto al totale	Proporzioni rispetto ai sessuati
1	2	3	4	5	6	7
20-40	62	19	0,31	7	0,11	0,37
40-60	104	46	0,44	24	0,23	0,52
60-80	38	33	0,87	22	0,58	0,67
80-110	9	8	0,89	6	0,67	0,75
Totale	203	106	0,52	59	0,29	0,56

Da tale Tabella risulta chiaramente che la frequenza degli individui provvisti di gonade aumenta con l'aumentare della lunghezza cioè dell'età e che in pari modo aumenta il numero degli individui provvisti di gonade in tutte le braccia non solo relativamente all'età ma anche relativamente agli individui provvisti di gonade. In ciò la *Coscinasterias tenuispina* si differenzia nettamente da altre specie di Asteroidi da noi esaminate, le quali presentano nei diversi individui gonadi più o meno sviluppate ma sempre al medesimo stadio di sviluppo in tutte le braccia fino dall'età più giovanile.

Occorre poi rilevare che negli esemplari in cui le gonadi non si trovano in tutte le braccia, queste si riscontrano di regola nelle braccia più vecchie e mancano in quelle rigenerate. E, se talvolta le gonadi sono presenti in braccia rigenerate, si sviluppano in quelle che abbiano raggiunto una lunghezza superiore sempre a un minimo di 25 mm. (corrispondente a quello in cui possono comparire le gonadi negli individui più giovani). Sono frequenti però anche individui che presentano fra le diverse braccia non rigenerate alcune che sono provviste di gonadi ed altre che ne sono sprovviste. Quindi l'assenza-presenza di gonadi è legata in taluni casi al grado di sviluppo delle braccia rigeneranti, in altri ne è indipendente.

L'aumento graduale della percentuale di individui provvisti di gonadi con l'aumentare della lunghezza dimostra inoltre l'esistenza di differenze nell'inizio della comparsa delle gonadi negli individui delle popolazioni esaminate; infatti in alcuni di questi le gonadi compaiono precocemente, in altri invece compaiono tardivamente quando non si ha addirittura assenza totale durante tutto il ciclo vitale. Fra queste condizioni estreme esistono poi condizioni intermedie; la gonade compare allora a metà del ciclo individuale.

Si può supporre, data la grande frequenza di individui rigeneranti e in base ai dati che ci fornisce la letteratura sull'alta capacità rigenerativa in questa specie, che gli individui asessuati non siano soltanto in fase di rigenerazione ma in fase di riproduzione agamica. A conferma di questa ipotesi vi è il caso dell'*Ophiactis virens*. In questa specie ad alto potere rigenerativo, si dividono attivamente per schizogonia solo i giovani individui che non hanno sviluppato le gonadi. I grossi esemplari con gonadi non presentano più divisione agamica (Simroth⁽⁴⁾). Un fatto simile si verifica anche in *Linckia multifora* (Mortensen⁽⁵⁾). È interessante inoltre considerare che in specie diverse di Asteroidi che abbiamo avuto occasione di esaminare (*Echinaster*, *Martasterias*, *Astropecten*) e nelle quali la rigenerazione rappresenta un fattore del tutto accidentale, lo sviluppo delle braccia rigenerate è accompagnato da una comparsa della gonade che non è tardiva ma precoce. Inoltre in queste specie, come si è già accennato, tutte le braccia presentano di regola gonadi al medesimo stadio di sviluppo.

L'assenza delle gonadi in individui di *Coscinasterias tenuispina* di *Ophiactis virens* e di *Linckia multifora* rappresenta quindi un fenomeno analogo a quello riscontrato ad esempio in certe stirpi di Planarie di acqua dolce nelle quali alla riproduzione scissipara è associata la mancanza di gonadi e di apparato copulatore^{(6),(7)}. Ciò dimostrerebbe quindi il valore generale di questo parallelismo con la sua estensione a tre specie di Echinodermi ad alta capacità rigenerativa.

Genetica. — Il probabile significato biologico della monogenia^(*).

Nota di GIOVANNA VITAGLIANO TADINI, presentata^(**) dal Corrisp. G. MONTALENTI.

In una Nota precedente⁽¹⁾ ho riferito alcuni dati da me raccolti sulla distribuzione dei sessi in *Asellus aquaticus*. In questa specie, analogamente a quanto è stato osservato da A. Vandel⁽²⁾ e da G. De Lattin⁽³⁾ in Isopodi terrestri, si manifesta una notevole variabilità della percentuale dei sessi fra le figliuolanze di diverse famiglie. La fig. 1 dimostra che, nella discendenza di 94 coppie trovate in natura (nel fiume Sarno, o nei canali e nelle pozze circostanti) e mantenute in laboratorio nelle condizioni costanti, specificate nella precedente Nota, la percentuale dei sessi può variare dallo zero

(4) H. SIMROTH, «Z. Wiss. Zool.», 28 (1877).

(5) T. MORTENSEN, «Mem. Ac. Roy. Sc. lettre. Copenhagen», 7 (1938).

(6) A. VANDEL, «Bull. Biol. France Belgique», 55 (1922).

(7) M. BENAZZI, «Acc. Naz. Lincei», 7 (1938).

(*) Lavoro eseguito presso il Centro di Biologia della Stazione Zoologica di Napoli.
(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) G. VITAGLIANO TADINI, «Rend. Acc. Naz. Lincei», fasc. 3, pp. 335-341 (1958).

(2) A. VANDEL, «Bull. Biol. France et Belg.», 72, 147-186 (1938); ibid., 79, 168-216 (1945).

(3) G. DE LATTIN, «Ztschr. Ind. Abst. u. Vererb. lehre», 84, 168-216; 536-567 (1952).

all'85 % di maschi. Le frequenze delle deposizioni che presentano le diverse percentuali sono distribuite presso a poco secondo una curva normale.

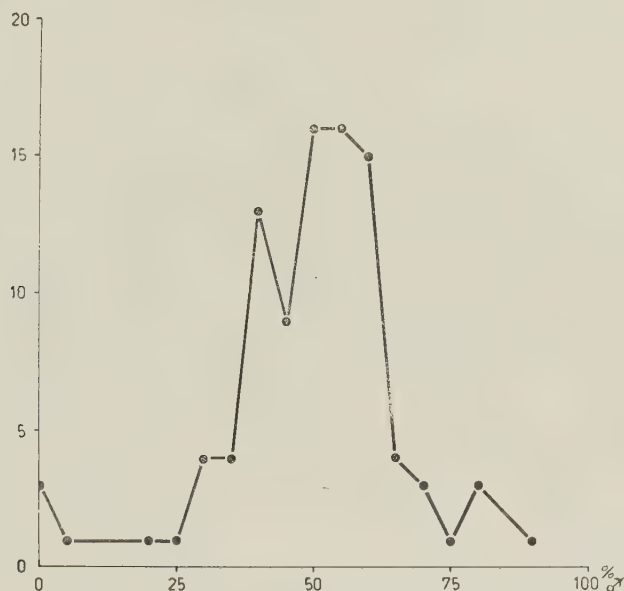


Fig. 1. — Distribuzione della percentuale dei sessi nei figli di 94 coppie di *Asellus* raccolte in natura.

In ascissa la percentuale dei ♂♂ ed in ordinata le frequenze delle coppie. Il numero medio di larve deposte, per coppia, è 53,1; il numero medio, per coppia, d'individui che hanno raggiunto lo stadio adulto è 50,8; il rapporto sessi sul totale di 4.783 individui è di 50,7 % ♂.

Dato l'alto numero di figli di ogni deposizione (33,7 media del primo parto; 75,7 media del secondo parto) è estremamente improbabile che queste deviazioni dal rapporto normale (50,8 ♂♂) che si trova nel totale siano dovute al caso.

Esiste dunque in questa specie il fenomeno della monogenia, secondo la definizione di Vandel, cioè la presenza di coppie la cui discendenza è costituita esclusivamente o in grande prevalenza da maschi o da femmine.

Ho indicato con A (arrenogeniche) le coppie i cui figli sono in prevalenza di sesso maschile; con T (teligeniche) quelle i cui figli sono in prevalenza di sesso femminile; con N quelle in cui il rapporto dei sessi dei figli non si discosta significativamente dalla normalità.

Ho riportato nella precedente comunicazione⁽¹⁾ alcuni dati che dimostrano che il fenomeno è dovuto a cause genetiche e ho accennato ad una possibile interpretazione del suo meccanismo determinante.

Nella presente Nota desidero svolgere alcune considerazioni circa il possibile significato biologico, cioè il valore selettivo di questo carattere. Sembra probabile che il carattere variabilità del rapporto sessi, che si pre-

senta in questa specie in modo così pronunziato, debba avere un valore selettivo positivo. Ci si domanda quindi quale possa essere il vantaggio, per una specie gonocoristica, di avere una così forte variabilità nella percentuale dei sessi delle singole famiglie.

TABELLA I.

Numero totale dei figli e numero dei sopravvissuti fino al differenziamento sessuale in diversi incroci di Asellus.

Tipo di incrocio	Parti	N. coppie	N. coppie con sterilità totale	Numero figli			Numero medio di figli per parto			o/o figli	
				Larve partorite	Vivi diff.	Morti	Larve partorite	Vivi diff.	Morti	Vivi diff.	Morti
Parentale	1°	94	0	3174	3039	135	33,7	32,3	1,4	95,8	4,2
	2°	24	0	1818	1744	74	75,7	72,6	3,1	95,9	4,1
$N_{F_I} \times N_{F_I}$	1°*	20	0	1129	1046	83	56,4	52,3	4,1	92,7	7,3
$A_{F_I} \times A_{F_I}$ consanguinei	1°	26	9**	279	192	87	10,7	7,3	3,3	69	31
	2°	17	9**	114	69	45	6,7	4	2,6	60,6	39,4
$A_{F_I} \times A_{F_I}$ non consanguinei	1°	12	4**	214	122	92	17,8	10,1	7,5	57	43
$T_{F_I} \times T_{F_I}$	1°	21	10**	152	70	82	7,2	3,8	3,9	46	54,6
$T_{F_I} \times A_{F_I}$	1°	25	2**	517	490	27	20,6	19,9	1,1	94,7	5,2
	2°	21	0**	685	623	62	32,6	29,6	3	90,8	9

(*) Le coppie dell'incrocio $N \times N$ hanno fatto un sol parto perché i coniugi erano stati precedentemente usati per altri incroci ($N \times A$).

(**) Le coppie degli incroci $A \times A$, $T \times T$, pur essendo state unite per lo stesso tempo delle coppie $T \times A$, hanno dato un numero di parti inferiore.

Una risposta a tale interrogativo può essere la seguente: trattandosi di una specie che, per le condizioni di vita, per la mobilità relativamente scarsa degli adulti, per l'assenza di forme larvali migranti, ha molte probabilità di venire frazionata, almeno temporaneamente, in piccole comunità riproduttive (*breeding units*), la monogenia può costituire una difesa contro i

pericoli della consanguineità. Se i figli di una coppia sono in prevalenza maschi, quelli di un'altra in prevalenza femmine, è evidente che si evita, o si limita, la possibilità di una riproduzione fra consanguinei. Per questa ragione tale sistema riproduttivo può essere favorito dalla selezione. Questa interpretazione può valere, probabilmente, anche per gli Isopodi terrestri studiati dal Vandel e dal De Lattin.

Allo scopo di meglio indagare il meccanismo genetico che sta alla base della monogenia e del vantaggio selettivo ch'essa presenta, ho eseguito diversi tipi di incroci. Riporto nella Tabella I alcuni risultati. In essa sono raccolti i seguenti dati: 1° numero degli individui che muoiono allo stadio di uova, o di embrioni; 2° totale delle larve partorite da ogni coppia; 3° numero di individui che muoiono durante la vita larvale, e prima di aver raggiunto la maturità sessuale (riconoscibile al differenziamento dei caratteri sessuali secondari); 4° numero di individui che raggiungono il differenziamento sessuale, cioè la capacità di riprodursi.

Il numero di individui che raggiunge il differenziamento sessuale, nelle coppie raccolte in natura rappresenta il 95,7 % dei figli concepiti; negli incroci $N \times N$ il 92,7 %; negli incroci $A \times A$ il 64,5 %; negli incroci $T \times T$ il 46 %; e nei $T \times A$ il 92,5 %.

Il numero medio di figli per coppia, che raggiunge l'età della riproduzione può considerarsi come una misura della idoneità (*fitness*) nel senso darwiniano. È massimo nello incrocio $N \times N$; alto nell'incrocio $T \times A$; molto basso invece negli incroci $A \times A$ e $T \times T$.

TABELLA II.

Numero medio dei giorni impiegati dalle larve dei vari tipi d'incrocio per raggiungere lo stato adulto.

Tipo d'incrocio	N. medio di giorni
$N \times N$	49
$A \times A$	69
$T \times T$	75
$T \times A$	51

Se poi si tiene conto del fatto, rappresentato dalla Tabella II che il tempo richiesto perché gli individui raggiungano la maturità sessuale è molto maggiore nei discendenti degli incroci $T \times T$ ed $A \times A$ rispetto agli $N \times N$ e $T \times A$, l'idoneità di quegli incroci risulta anche minore; ed ancora influisce in senso negativo il fatto che le coppie di questi tipi, presentano nell'unità di tempo, un minor numero di parti che non le coppie $N \times N$ o $T \times A$.

Come ho già detto nella Nota precedente⁽¹⁾, lo scarso numero di figli degli incroci $A \times A$ e $T \times T$ non è dovuto agli effetti della consanguineità, perché anche genitori non consanguinei danno simili risultati (Tabella I, incrocio fra non consanguinei). Quindi è evidente che gli incroci $A \times A$ e $T \times T$ presentano una idoneità molto minore che gli incroci $N \times N$ e $T \times A$.

Dai dati qui riassunti, ritengo pertanto di potere trarre le seguenti conclusioni: 1° la monogenia può probabilmente interpretarsi come un meccanismo di difesa contro gli accoppiamenti fra consanguinei; 2° l'incrocio $T \times A$ manifesta un evidente effetto di eterosi rispetto ad $A \times A$ e $T \times T$; 3° la scarsissima fertilità degli incroci $A \times A$ e $T \times T$ si può interpretare come un meccanismo di difesa contro la monogenia assoluta, la quale, in piccole comunità riproduttive potrebbe riuscire fatale, determinando la nascita di tutti individui di un sol sesso.

Genetica. — *Variabilità ambientale e selezione in Tisbe reticulata.* — *Influenza della salinità*^(*). Nota di BRUNO BATTAGLIA, presentata^(**) dal Corresp. U. D'ANCONA.

Ricerche precedenti^(1,2) hanno dimostrato che il policromatismo della *Tisbe reticulata* della laguna veneta è sotto il controllo di una serie di alleli multipli: V^v , V^M e v ; e che, nelle condizioni in cui furono eseguiti gli esperimenti, gli eterozigoti $V^v V^M$ sono più vitali dei rispettivi omozigoti. Si tratterebbe anche nel caso di *Tisbe* di un fenomeno di polimorfismo genico bilanciato. L'eterosi, aggiungendosi ad altri meccanismi che agirebbero mediante un adattamento differenziale delle varie forme a diverse condizioni ambientali, avrebbe un ruolo importante nell'impedire la perdita di alleli e nell'assicurare così il mantenimento della variabilità genetica nella popolazione. Si è visto inoltre che l'eccesso del numero osservato di eterozigoti rispetto al valore teorico, verificatosi nella F_2 degli incroci $V^v V^v \times V^M V^M$, è tanto più sensibile quanto maggiore è il grado di affollamento nelle culture, mentre con l'approssimarsi di condizioni di allevamento ideali, la mortalità differenziale tra omozigoti ed eterozigoti, durante il periodo uovo-adulto, viene ad essere notevolmente ridotta.

Che altri fattori ambientali, oltre al grado di affollamento, possano influire sul fenomeno era già stato constatato in precedenti ricerche preliminari⁽³⁾. Il problema viene ora ripreso utilizzando un metodo più preciso

(*) Lavoro eseguito presso l'Ist. di Zoologia e Anatomia comp. e la Stazione Idrobiologica dell'Università di Padova, con contributi del Centro di Studi Talassografici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) B. BATTAGLIA e E. PULZE, « Boll. Zool. », 24, 1 (1957).

(2) B. BATTAGLIA (in corso di stampa in « Evolution »).

(3) B. BATTAGLIA, « Boll. Zool. », 21, 199 (1954).

che offre condizioni di maggiore uniformità in modo che il margine d'errore venga attenuato il più possibile.

In questa Nota verranno riferiti i risultati di un esperimento eseguito con lo scopo di saggiare l'influenza del fattore 'salinità' sulla vitalità dei genotipi seguenti: $V^v V^v$, $V^M V^M$ e $V^v V^M$. Il metodo è analogo a quello adottato per saggiare l'influenza dell'affollamento⁽²⁾. Esso consiste nell'incrociare animali omozigoti $V^v V^v$ con omozigoti $V^M V^M$; le femmine della F_1 ($V^v V^M$), non appena hanno emesso il sacco ovigero, vengono suddivise in tre lotti di 24 femmine ciascuno isolate in singoli recipienti, a tre diverse salinità: 35 p. mille, 26 p. mille e 19 p. mille, alla temperatura di 18 °C circa.

TABELLA I.

F_2 degli incroci violacea omoz. \times maculata omoz., a tre diverse salinità. Tra parentesi, nella prima colonna, il numero delle femmine F_1 isolate con prole.

Salinità	Fenotipi			Totale	Frequenze geniche		χ^2 2 g. lib.
	<i>viol.</i>	<i>viol.-macul.</i>	<i>macul.</i>		V^v	V^M	
35 p. mille (23)	Oss. 434	901	478	1.813	0,488	0,512	2,2022 $P = 0,5-0,25$
	Teor. 453,25	906,50	453,25		0,500	0,500	
	Diff. -19,25	-5,50	+ 24,75		-0,012	+ 0,012	
26 p. mille (20)	Oss. 224	767	441	1.432	0,424	0,576	73,0320 $P < 0,001$
	Teor. 358	716	358		0,500	0,500	
	Diff. -134	+ 51	+ 83		-0,076	+ 0,076	
18 p. mille (22)	Oss. 121	377	186	684	0,452	0,548	19,5173 $< 0,001$
	Teor. 171	342	171		0,500	0,500	
	Diff. -50	+ 35	+ 15		-0,048	+ 0,048	

Gli individui, maschi e femmine, della F_2 che si sono sviluppati in queste diverse condizioni vengono quindi contati e classificati in base al loro fenotipo. I numeri totali di questi individui si riferiscono a due sacchi ovigeri per ciascuna femmina madre, fatti deporre in due recipienti diversi, comunque identici per quantità d'acqua, d'alimento, ecc.⁽²⁾. Le discendenze delle femmine di ciascun lotto sono state raggruppate dopo averne verificato statisticamente l'omogeneità. I risultati, esposti nella Tabella I, indicano che alla salinità del 35 p. mille, la quale offre condizioni migliori come è sug-

gerito dalla mortalità relativamente bassa avutasi tra gli individui della F_2 , le segregazioni osservate non si discostano significativamente dal rapporto teorico $1 V^v V^v : 2 V^v V^M : 1 V^M V^M$.

La situazione è diversa alle altre salinità. Al 26 p. mille si è avuto un lieve aumento della mortalità; inoltre la segregazione degli F_2 si discosta in misura altamente significativa dal rapporto mendeliano teorico, e ciò è principalmente dovuto ad un eccesso di individui del fenotipo *maculata* ($V^M V^M$) e a un fortissimo difetto di individui *violacea* ($V^v V^v$). Alla salinità del 18 p. mille la durata dello sviluppo (dal momento della deposizione del sacco ovigero alla comparsa nelle culture della prima femmina adulta ovigera), che alle due salinità precedenti era di circa 14 giorni, si è portata a 16 giorni circa. La mortalità, specie tra gli individui del primo sacco ovigero, è stata assai elevata. La segregazione osservata si discosta anche qui significativamente dal rapporto teorico $1 : 2 : 1$; si osserva ancora un eccesso di *maculata* e un difetto di *violacea*, non tuttavia così forti come alla salinità del 26 p. mille.

Il calcolo delle vitalità relative dei tre genotipi (cfr. Battaglia ⁽⁴⁾), attribuendo il valore unitario all'eterozigote $V^v V^M$, ci esprime la situazione sopra descritta ancor più chiaramente. Come si vede dalla Tabella II, i quozienti di vitalità sono diversi per ciascuna forma alle diverse salinità. Sarà utile ampliare la gamma delle salinità per mettere in evidenza l'optimum adattativo delle forme stesse.

È interessante notare come il fattore salinità operi in maniera diversa dal fattore «grado di affollamento» ⁽⁵⁾ il cui incremento comportava un proporzionale eccesso di individui eterozigoti e una corrispondente deficienza di entrambi gli omozigoti.

Il fatto che la vitalità degli eterozigoti $V^v V^M$ alla salinità del 26 p. mille è inferiore a quella degli omozigoti $V^M V^M$ (e in misura non significativa alla salinità del 35 p. mille), non comporta che il valore adattativo dell'eterozigote debba essere necessariamente inferiore. Non sempre infatti il valore adattativo di un genotipo è proporzionale alla vitalità dei suoi portatori ⁽⁴⁾. La maggiore fecondità di un genotipo, per esempio, può infatti - in certe condizioni - bilanciare la sua inferiore vitalità ⁽⁵⁾ e può di per sé costituire un valido fattore nell'affermazione del genotipo stesso ⁽⁶⁾. Nel caso di *Tisbe reticulata* può avere luogo un analogo fenomeno di 'compenso' come è suggerito dal fatto che tra i segreganti della F_2 , mentre il rapporto-sessi degli omozigoti è sempre a favore dei maschi - con l'unica lieve eccezione del genotipo $V^v V^v$ a 35 p. mille di salinità - negli eterozigoti esso è sempre a favore delle femmine (Tabella III). Questo fatto verrà meglio elaborato e discusso in altra Nota, anche perché in rapporto al problema della determinazione del sesso in *Tisbe*.

(4) TH. DOBZHANSKY, *Genetics and the origin of Species* (1951).

(5) A. B. DA CUNHA, «*Evolution*», 3, 239 (1949).

(6) E. B. SPIESS, M. KETCHEL e P. B. KINNE, «*Evolution*», 6, 208 (1952).

TABELLA II.

Vitalità relativa di $V^v V^v$, $V^v V^M$ e $V^M V^M$ calcolate dai dati riportati nella Tabella I.

Salinità	Genotipi		
	$V^v V^v$	$V^v V^M$	$V^M V^M$
35 p. mille	0,963	I	1,061
26 p. mille	0,584	I	1,149
18 p. mille	0,641	I	0,986

TABELLA III.

Rapporti dei sessi nei diversi genotipi (in % ♂♂).

Salinità	Genotipi		
	$V^v V^v$	$V^v V^M$	$V^M V^M$
35 p. mille	46,77	38,84	56,90
26 p. mille	55,80	32,20	59,41
18 p. mille	70,24	45,88	64,51

L'eccesso di femmine nei Tisbidi rappresenta comunque una condizione di vigore, come è dimostrato dalla estrema rarefazione del sesso femminile che si osserva, sia in *Tisbe reticulata* che in *T. gracilis*, in condizioni di *inbreeding* ^(7,8).

In conclusione, questi esperimenti dimostrano che il fattore 'salinità' esercita sui diversi genotipi di *Tisbe* un'azione selettiva, in certi casi estremamente intensa. La vitalità relativa dei genotipi stessi può venire sensibilmente modificata, per cui i geni V^v e V^M , sia in condizione omozigote che in condizione eterozigote, rendono i loro portatori adatti a differenti concentrazioni saline. Il mantenimento del polimorfismo, operante tramite i diversi meccanismi qui brevemente esposti, assicura la versatilità adattativa della popolazione.

Altri esperimenti sono in corso per indagare l'influenza del fattore termico sulla vitalità dei diversi genotipi.

(7) B. BATTAGLIA, « Ann. Biol. », 33, fasc. 5-6, 259 (1957).

(8) B. BATTAGLIA, « Rend. Accad. Naz. Linc. », ser. VIII, 24, fasc. 3 (1958).

Embriologia. — *Nuovi risultati sull'azione delle radiazioni ionizzanti nel differenziamento sessuale degli Uccelli* (*). Nota di GUGLIELMO MARIN, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

In un'esperienza condotta allo scopo di rintracciare l'origine dei gonociti nell'embrione di pollo, e di studiare la loro influenza sullo sviluppo delle gonadi, Dulbecco⁽¹⁾ ideò una tecnica di irradiazione a debole intensità che gli permise di ottenere la sterilizzazione completa senza compromettere lo sviluppo somatico degli esemplari irradiati. Gli embrioni da sterilizzare venivano sottoposti alla radiazione gamma del Radium per un periodo continuo di ventiquattr'ore, a partire dallo stadio di 5-8 somiti, così da raggiungere dosi complessive individuali di 600 r. In queste condizioni la mortalità non superò il 50 %, mentre un precedente tentativo di iniziare l'irradiazione allo stadio di processo cefalico si era rivelato inattuabile per mortalità troppo alta.

Complessivamente furono ottenuti da Dulbecco quattordici embrioni che vissero oltre l'età del differenziamento sessuale, e che risultarono completamente sprovvisti di elementi germinali. Ma il risultato più sorprendente fu che l'esame istologico delle gonadi rivelò essere tutti questi embrioni di sesso femminile. In una successiva fase dell'esperimento fu trattata una seconda serie con dosi minori (400 r); non si raggiunse una sterilità completa e il rapporto sessi risultò normale, ma in alcuni maschi le gonadi presentarono anomalie che vennero interpretate come segni di intersessualità.

Dulbecco concluse che l'irradiazione doveva avere un'influenza sul differenziamento sessuale, e come si osservava una correlazione positiva fra dose impiegata e grado di sterilizzazione, così sembrava che l'inversione al sesso femminile fosse tanto più completa quanto più alta l'irradiazione a cui gli embrioni erano stati sottoposti. Non fu però tentata una interpretazione del fenomeno, né d'altronde le nostre attuali conoscenze sull'azione biologica delle radiazioni ci permettono di spiegarlo. Ciò che sorprende, infatti, è l'entità dell'inversione: alle dosi maggiori sarebbe stata completa, così da non permettere la distinzione fra femmine genetiche e maschi femminizzati. È ben difficile pensare che l'irradiazione possa aver interferito nei processi primari di determinazione sessuale. Non si può escludere a priori che in seguito all'azione radiante si siano formate nei tessuti dell'embrione,

(*) Ricerca compiuta nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparata dell'Università di Padova, con un contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) R. DULBECCO, *Azione dei raggi gamma del radio sullo sviluppo della gonade e sui caratteri somatici del sesso nell'embrione di pollo*, «Atti Acc. Naz. Lincei», Mem. Sc. fis. mat. e nat., ser. VIII, vol. II, sez. III, fasc. I (1948).

o fra i lipidi del tuorlo, sostanze attive in senso femminizzante, ma dovremmo attribuire a queste ipotetiche sostanze un effetto quale è difficile ottenere anche con ormoni ad azione specifica. Il trattamento con follicolina trasforma i maschi in intersessuati, in cui però è quasi sempre riconoscibile il sesso genetico.

Wolff e Salzgeber ⁽²⁾ cercarono di riprodurre i risultati di Dulbecco usando i raggi X: embrioni di 2 a 6 giorni furono trattati con dosi di 1200-1500 r, in gran parte localizzate alle regioni gonadiche. Ne risultarono femmine normali e maschi per lo più intersessuati. Veniva così confermata l'azione delle radiazioni sul differenziamento sessuale, ma le condizioni sperimentali e i risultati stessi erano sensibilmente diversi da quelli di Dulbecco. Innanzi tutto l'effetto femminizzante era parziale e del tutto simile a quello ottenibile con ormoni ad azione specifica; inoltre la tecnica di irradiazione e l'epoca in cui era stata somministrata rendevano più verosimile pensare ad una azione perturbatrice sulla secrezione ormonale dell'abbozzo gonadico.

Queste considerazioni mi indussero a ripetere gli esperimenti di Dulbecco su una serie più numerosa di esemplari, in modo da eliminare qualsiasi incertezza di carattere statistico. Seguì la stessa tecnica di irradiazione con le stesse dosi (circa 600 r nel corso di 24 ore); nell'apertura delle uova da irradiare introdussi qualche leggera modifica diretta ad abbassare la mortalità da cause accidentali. Circa una cinquantina di embrioni visse oltre l'epoca del differenziamento sessuale, con una mortalità inferiore al 40%. Furono fissati alla fine del 9° giorno di incubazione ed esaminati istologicamente in sezioni seriate: oltre la metà degli embrioni risultò completamente sterile e i rimanenti avevano un numero di gonociti estremamente ridotto.

Le osservazioni preliminari sul differenziamento sessuale di questi esemplari, già rese note ⁽³⁾, sembravano confermare i dati di Dulbecco, ma l'esame completo della serie sperimentale rivelò un rapporto sessi non significativamente diverso da 1:1. Su 45 embrioni, 27 erano femmine e 18 maschi ($\chi^2 = 1,8$). La maggioranza aveva gonadi normali per struttura e grado di sviluppo; si notava tutt'al più una certa riduzione di volume, solo in parte riferibile alla mancanza di cellule germinali. In un minor numero di esemplari, invece, l'apparato genitale presentava caratteristiche morfologiche che denunciavano una condizione di lieve intersessualità. Fatto importante è che queste anomalie comparvero colla stessa frequenza sia nei maschi che nelle femmine. Nei maschi consistevano in: permanenza di un *cortex* più o meno sviluppato; presenza di lacune fra i tubuli semitiferi e talvolta

(2) ET. WOLFF e B. SALZGEBER, *Sur un nouveau procédé permettant d'obtenir l'intersexualité expérimentale chez l'embryon d'oiseau: l'irradiation des gonades embryonnaires à l'aide des rayons X*, « C. R. Soc. de Biol. », 143, 532 (1949).

(3) G. MARIN, *Sviluppo e differenziamento sessuale di embrioni di pollo irradiati con raggi gamma*, « Boll. di Zool. », vol. XXIV, fasc. II, p. 165 (1957).

scarsa differenziazione di questi; mancata involuzione dei dotti di Müller. Nelle femmine: abnorme sottigliezza del *cortex*; maggior volume della gonade destra; sviluppo rigoglioso della *medulla* e riduzione del sistema lacunare; forma generale delle gonadi rotondeggiante, simile a quella del testicolo.

Alcune di queste condizioni potrebbero imputarsi a ritardo di sviluppo per cui le gonadi conservano l'aspetto di uno stadio precedente, ma una differenziazione ritardata dell'apparato genitale può ben esser il segno di una condizione intersessuale transitoria. Comunque risulta da questi dati che l'irradiazione può turbare il differenziamento sessuale di un certo numero di individui, ma la maggioranza può svilupparsi e differenziarsi in modo del tutto normale sia nella direzione femminile che in quella maschile. Nessun elemento parla a favore della possibilità di inversione completa da un sesso all'altro.

Non posso perciò confermare le supposizioni a cui ero giunto nella prima Nota su questo esperimento⁽³⁾ e tanto meno i risultati di Dulbecco. Ma questi, allora, come possono spiegarsi? Esclusa l'eventualità che il reperto fosse dovuto unicamente al caso, perché statisticamente troppo improbabile, rimane da esaminare la possibilità che l'irradiazione avesse determinato una mortalità selettiva dei maschi. Dulbecco porta alcuni elementi contrari a questa interpretazione, ma non può escluderla del tutto. Bisogna tener presente che i 14 embrioni femminili furono da lui ottenuti con mortalità molto alta: 9 di essi provengono da un'esperienza col 50 % di mortalità, ma 5 sono i soli sopravvissuti all'irradiazione di un centinaio di esemplari allo stadio di processo cefalico; una eventuale selezione a favore del sesso femminile avrebbe quindi avuto ampia possibilità di manifestarsi. Nel mio esperimento, in cui la mortalità fu del 38 %, tale possibilità era alquanto ridotta e il numero delle femmine, infatti, superò di poco quello dei maschi. Questi argomenti non sono certamente una prova della mortalità selettiva a carico del sesso maschile, ma in mancanza d'altre spiegazioni soddisfacenti la fanno apparire come l'ipotesi meno improbabile.

In conclusione, si può dire che l'irradiazione precoce dell'embrione di pollo con una dose di 600 *r*, a debole intensità, non impedisce il differenziamento di maschi e femmine normali, ma solo determina in alcuni casi uno stato di modica intersessualità. L'irradiazione localizzata agli abbozzi gonadici con dosi ed intensità più alte (Wolff e Salzgeber) sembra invece capace di provocare un grado di intersessualità più spinto, solo a carico delle gonadi maschili.

Fisiologia. — *Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano.* —
II. *L'attività cardiaca in rapporto alla motilità esofagea* (*). Nota di
LUIGI TURANO, ALFREDO CURATOLO e ENZO SALOMONI, presentata (**)
dal Corrisp. G. AMANTEA.

Sono note le difficoltà di localizzare il cardia nel vivente sia con il metodo radiologico e sia con quello esofagoscopico strumentale. Neppure con il metodo meccanografico è stato finora chiaramente identificato il livello cardiaco, sicché non se ne è potuto studiare l'attività in modo obiettivo e riproducibile.

Questa esigenza ha costituito un problema preliminare per le sistematiche ricerche che volevamo intraprendere sulla motilità dell'esofago umano. Infatti, poiché ci proponevamo, tra l'altro, di studiare la propagazione della peristalsi lungo tutto l'esofago, non potevamo rinunciare al tentativo di comprendervi lo studio del comportamento del tratto cardiaco.

Con questo intento, nella tecnica generale da noi appositamente realizzata, abbiamo introdotto qualche accorgimento che ci ha consentito di localizzare il cardia e di studiarne il comportamento in rapporto alla motilità esofagea. I risultati raggiunti ci sembrano meritevoli di essere comunicati preliminarmente e costituiscono l'oggetto della presente Nota.

METODO E PROCEDIMENTO. — Sono stati impiegati il metodo meccanografico e quello roentgencinematografico applicati simultaneamente nel modo che abbiamo descritto in una precedente Nota⁽¹⁾ alla quale rimandiamo per i dettagli, limitandoci qui a descrivere gli accorgimenti adottati per collocare un palloncino esploratore al livello del cardia.

Dopo avere introdotto nel soggetto in esame la sonda esofagea munita di tre palloncini esploratori scaglionati a 10 cm l'uno dall'altro, ciascuno di questi veniva adeguatamente insufflato con aria e collegato con l'apparato di registrazione grafica. Si avviava allora la registrazione controllando la buona tenuta delle connessioni e il buon funzionamento delle penne del poligrafo corrispondenti ciascuna ad ognuno dei tre palloncini, come dettagliatamente descritto nella citata Nota.

A questo punto, invitando il soggetto a deglutire, si lasciava lentamente progredire la sonda verso lo stomaco fino a farvi penetrare il più distale dei tre palloncini. Il passaggio di questo nella cavità gastrica è sempre chia-

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Radiologia dell'Università di Roma e presso l'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) Questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 4, p. 449 (1958).

ramente indicato dal corrispondente tracciato meccanografico. Infatti mentre i tracciati corrispondenti ai palloncini prossimale e medio continuano a rilevare l'attività esofagea, quello corrispondente al palloncino intragastrico non rivela più alcun evento, o descrive soltanto oscillazioni modeste e ritmiche, sincrone con quelle del tracciato pneumografico, simultaneamente derivato (fig. 1). Tuttavia per documentare la effettiva ubicazione dell'esploratore distale nel fondo gastrico, abbiamo in ogni caso fatto ricorso al controllo radiografico.

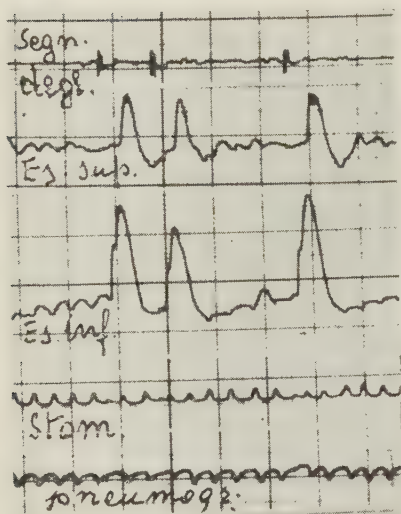


Fig. 1. - L'esploratore distale è nel fondo gastrico: il tracciato corrispondente non rivela altri eventi all'infuori di quelli respiratori.

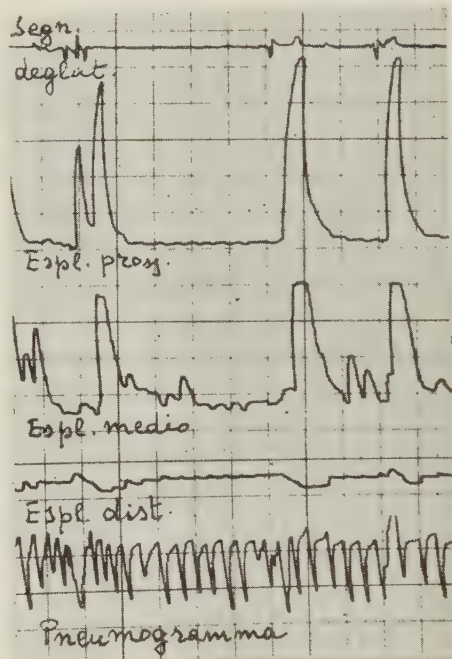


Fig. 2. - Esploratore distale a ridosso del cardia: il tracciato relativo registra deflessioni negative corrispondenti all'apertura cardiale in rapporto all'attività peristaltica dell'esofago soprastante.

Da questo momento la sonda era progressivamente ritirata in direzione orale a tratti successivi di non più di mezzo cm alla volta. Dopo ogni movimento della sonda il soggetto era invitato a deglutire intanto che si sorvegliava il decorso del tracciato corrispondente all'esploratore distale. Si continuava a ritirare la sonda fino a che il detto esploratore non rivelava una qualche attività in rapporto con gli eventi cinetici dell'esofago soprastante. Infatti ad un certo punto il tracciato corrispondente al palloncino distale cominciava a descrivere, subito dopo ogni atto di deglutizione, una deflessione negativa più o meno marcata e protratta per alcuni secondi (figg. 2 e 3). Questa risultava ovviamente in rapporto con l'attività peristaltica dei soprastanti livelli esofagei. La sonda era allora mantenuta in tale posizione assicurandola con cerotto adesivo alla guancia del soggetto. Il comporta-

mento del tracciato corrispondente ed i controlli radioscopico e radiografico non lasciavano alcun dubbio sull'ubicazione cardiale del palloncino esploratore distale.

RISULTATI. — Un risultato senza dubbio degno di rilievo consiste già nella possibilità acquisita di identificare nel modo descritto l'estremo più distale dell'esofago, o cardia propriamente detto, sì da poterne registrare ed analizzare l'attività in rapporto alle funzioni motorie del soprastante

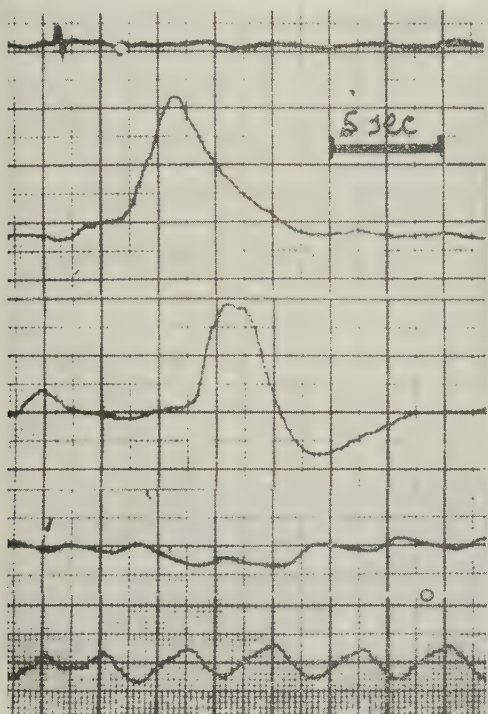


Fig. 3. — Rapporti di tempo tra atto deglutitorio (*d*), evento peristaltico esofageo (*p*) ed apertura cardiale (*c*).

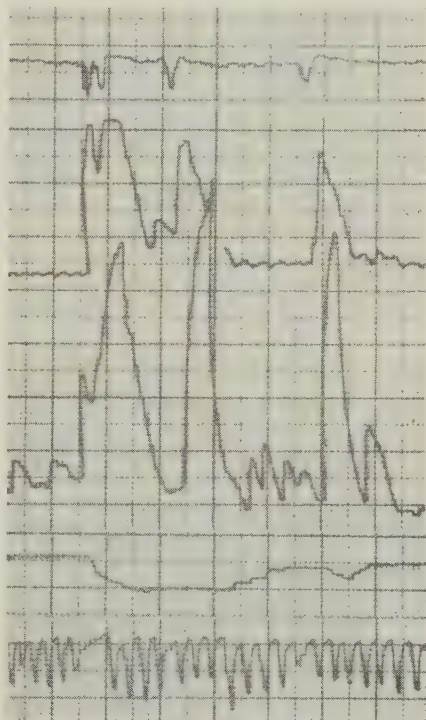


Fig. 4. — Apertura cardiale protratta per tutta la durata di una serie di eventi peristaltici ravvicinati.

esofago. Grazie a tale acquisizione ci è stato infatti possibile rilevare e chiarire diversi aspetti dell'attività cardiale finora ignoti, oscuri o controversi. È risultato in primo luogo che l'attività del cardia non è costituita da eventi fasici come quelli che si rilevano lungo tutto l'esofago soprastante, ma presumibilmente soltanto da variazioni del tono della muscolatura circostante.

Tali variazioni consistono nel cedimento episodico del tono, che nello stato di riposo si mantiene relativamente alto.

È risultato altresì che il cedimento del tono, che caratterizza l'apertura del cardia, accompagna sempre e soltanto l'attività peristaltica dell'esofago. Qualunque altro evento motorio esofageo, a carattere circoscritto, non peristaltico, lascia immodificatosostenuto il tono cardiale di chiusura.

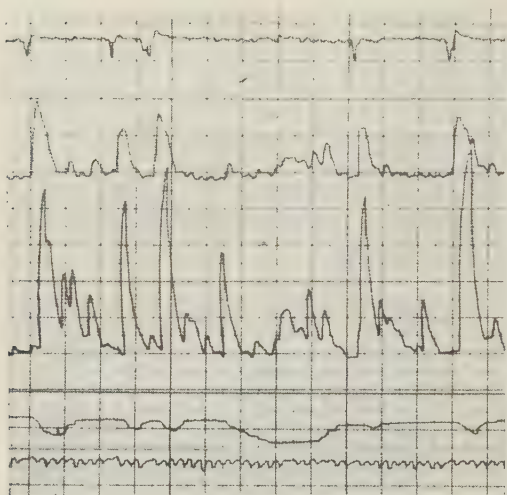


Fig. 5. - Apertura cardiale in coincidenza di attività peristaltica secondaria (s); anche in questo caso l'apertura cardiale è protratta per tutta la durata di una serie di eventi ravvicinati.

L'apertura cardiale ha inizio all'insorgere di un evento peristaltico dell'esofago e si protrae per tutta la durata dell'evento stesso. Verificandosi più eventi tra loro ravvicinati, il rilasciamento cardiale iniziato dal primo si protrae fino all'esaurirsi dell'ultimo (fig. 4). L'apertura del cardia non sembra determinata dall'atto di deglutizione se non in quanto quest'ultimo è capace di provocare l'evento peristaltico. Infatti l'apertura cardiale si verifica anche in assenza di atti deglutitori ogni volta che nell'esofago - a qualsiasi livello - insorga un'onda peristaltica (fig. 5).

Tutti i fatti sopraesposti che risultano chiaramente già dai rilievi meccanografici (vedi figure), hanno ricevuto ulteriore conferma e chiarimento dall'analisi roentgencinematografica simultaneamente condotta (fig. 6).

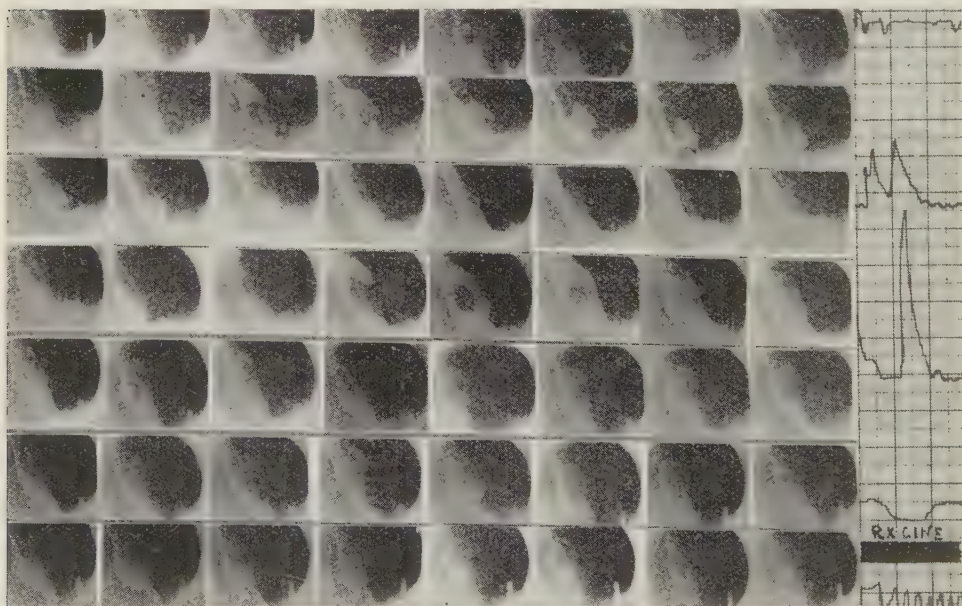


Fig. 6. - Riproduzione di 1 fotogramma ogni 10 da una sequenza roentgencinematografica ripresa a livello del cardia. Notare (leggendo da sinistra a destra e dall'alto al basso) la caduta di pressione durante l'attività del cardia e quindi il ritorno della pressione al livello iniziale di riposo dopo il passaggio del bolo nello stomaco. Appare evidente che il rilasciamento cardiale precede di alcuni secondi l'arrivo del bolo.

Fisiologia. — *Sul fondamento nutritivo della bradicardia da inanizione e da malnutrizione del colombo* (*). Nota di GAETANO LIVREA, presentata (**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

In altri lavori [1-4], sulla base di numerosi dati raccolti con metodo fisiologico ed istochimico, abbiamo sostenuto che la bradicardia da inanizione acuta e da malnutrizione calorica ed orizantica del colombo, accompagnata o non da aritmia, può essere l'espressione della mancata copertura dei bisogni globali del cuore in N, forse più particolarmente di N differenziato, necessario al tessuto miocardico e, massimamente, al sistema specifico del cuore.

Un'esauriente dimostrazione di questo assunto poteva scaturire soltanto da un'esauriente conoscenza delle modificazioni biochimiche indotte dall'inanizione e dalle malnutrizioni nel tessuto miocardico e soprattutto nel tessuto specifico del cuore del colombo.

Era quindi doveroso abordare quest'aspetto basilare delle ripercussioni cardiache operate dall'inanizione e dalle malnutrizioni.

Ovviamente abbiamo incominciato con lo studio della letteratura senza però ritrarne alcun dato direttamente utile ai nostri fini.

Difatti i numerosi contributi incontrati non solo tengono di mira quasi esclusivamente gli effetti morfologici [5-11] — macro- e microscopici — operati sui diversi tessuti e organi dall'inanizione acuta e cronica e trascurano, all'opposto, quasi assolutamente, gli effetti funzionali e biochimici [12] ma anche e soprattutto si riferiscono o all'uomo o ad animali diversi dal colombo, e dimostrano, tra l'altro, che le ripercussioni operate dall'inanizione variano entro ampi limiti da specie a specie.

Così stando i fatti, per quanto i nostri dati fisiologici ed istochimici ci suggerissero indagini più dettagliate e specifiche circa quote ben differenziate di N del tessuto miocardico e forse più caratteristicamente del sistema specifico, noi abbiamo ritenuto necessario incominciare con indagini più generali.

Pertanto abbiamo programmato di studiare dapprima 1) addirittura semplicemente il comportamento ponderale del cuore e dei principali organi nell'inanizione acuta e nelle malnutrizioni; 2) indi il comportamento dell'acqua e delle varie quote di N protidico e non protidico del cuore e dei principali organi; 3) infine il comportamento del consumo di O_2 del cuore, nonché quello di determinati processi connessi con la produzione e l'utilizzazione cardiaca di energia con particolare riguardo soprattutto al metabolismo dei corpi chetonici, degli acidi grassi e degli aminoacidi.

Operando così, intendavamo a) apportare qualche contributo alla conoscenza delle ripercussioni tuttora ignote dell'inanizione e delle malnutri-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Scienza dell'Alimentazione dell'Università di Messina.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

zioni sui diversi organi del Colombo; *b*) inquadrare le ripercussioni funzionali e biochimiche cardiache nel quadro più completo delle ripercussioni operate dall' inanizione e dalle malnutrizioni sugli altri principali organi e ciò in vista del fatto che, secondo noi, le ripercussioni cardiache sono certamente anche la risultante complessa dell'alterata attività ed integrazione biochimica di altri organi; *c*) accertare sino a qual punto le ricerche di biochimica morfologica e dinamica del cuore in inanizione possono servire alla comprensione di determinati aspetti del complesso lavoro metabolico, col quale il cuore perviene alla sintesi, conservazione ed usura dei suoi specifici complessi tissulari.

Nelle Note, che subito seguono, sono descritti: 1) il comportamento ponderale dei principali organi del Colombo normale, del Colombo in inanizione acuta ed in malnutrizione orizantica; 2) il comportamento dell'acqua e delle varie frazioni dell'N del sangue, del fegato, del muscolo scheletrico e del cuore del Colombo normale, del Colombo in inanizione e del Colombo in malnutrizione orizantica ⁽¹⁾.

Renderemo noto subito dopo il comportamento di determinate attività enzimatiche cardiache e vedremo, infine, se già da questa semplice raccolta di dati biologici sarà possibile pervenire alla formulazione di qualche concetto di validità generale.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] LIVREA G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 15, 453 (1953).
- [2] LIVREA G. e CRAXI P., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16, 508 (1954).
- [3] LIVREA G., « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16, 763 (1954).
- [4] LIVREA G., « Biologica Latina », 10, 794 (1957).
- È impossibile, oltre che superfluo, riportare l'enorme letteratura circa gli effetti morfologici dell' inanizione e delle malnutrizioni sugli organi ed i tessuti del corpo. I numerosi contributi, da noi incontrati, sono riportati quasi tutti nelle seguenti monografie, le quali, nel loro insieme, rappresentano una rivista veramente enciclopedica di tutti gli aspetti morfologici e clinici noti dell' inanizione e delle malnutrizioni.
- [5] CHOSSAT C., *Recherches expérimentales sur l' inanition*, « Mémoire de l'Académie des Sciences », Paris, 1843.
- [6] MORGULIS S., *Fasting and undernutrition*. Dutton, New York, 1923.
- [7] JACKSON C. M., *The effects of inanition and undernutrition upon growth and structure*. Blakiston, Philadelphia, 1925.
- [8] APPELBAUM E., *Maladie de famine. Recherches cliniques sur la famine exécutées dans le Ghetto de Varsovie en 1942*, « Am. Joint Distribution Committee », Warsaw, 1946.
- [9] HOTTINGER A. e altri, *Hungerkrankheit, Hungerödem, Hungertuberkulose*. Benno Schwabe, Basel, 1948.
- [10] LAMY M. e altri, *La dénutrition. Clinique - Biologie - Thérapeutique*. Doin, Paris, 1948.
- [11] KEYS A. e altri, *Human starvation*, 2 voll. Minnesota Press, Minneapolis, 1950.
- Il problema biochimico, invece, è tuttora molto trascurato ed i pochi dati consegnati alla letteratura si riferiscono prevalentemente a determinate attività enzimatiche. Gran parte della letteratura relativa è riportata in:
- [12] LIVREA G., « Atti della Soc. Medico-Chirurgica di Messina », 1, 1 (1957).

(1) Tutte queste ricerche sono state eseguite con un contributo del C.N.R.

Fisiologia. — *Il comportamento ponderale degli organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta e per malnutrizione orizantica* (*).
Nota di GAETANO LIVREA e FERRUCCIO DE STEFANO, presentata (**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

Per pervenire ad una soddisfacente conoscenza delle conseguenze cardiache dell'inanizione e delle malnutrizioni, non solo è necessaria la descrizione delle modificazioni morfologiche — macro- e microscopiche —, fisiologiche e biochimiche indotte sul cuore e sugli altri organi dall'inanizione e dalle malnutrizioni, ma è indispensabile altresì la correlazione possibilmente quantitativa tra le anzidette modificazioni.

Ora noi siamo ben lontani dall'aver raggiunto questo obiettivo.

In molti casi, ad esempio nell'inanizione e nella malnutrizione orizantica del colombo, non solo rimane da esplorare l'intero campo della morfologia funzionale e della biochimica morfologica, ma mancano perfino i più grossolani dati morfologici. Questa così grande lacuna offre una buona occasione per una ricerca di base, la quale, condotta con sistematicità, non solo renderà possibile un'approfondita conoscenza dell'inanizione e delle malnutrizioni, ma potrà essere di aiuto per la futura auspicabile correlazione tra morfologia, fisiologia e biochimica di detti stati.

Qui di seguito rendiamo noti i dati ponderali da noi riscontrati per alcuni apparati ed organi di colombe normali, in inanizione o in malnutrizione orizantica.

La loro raccolta, attuata in modo da soddisfare pienamente ai bisogni di un'analisi statistica, non è stata eseguita per essere fine a sé stessa, cioè descrivere meramente come i vari organi e tessuti partecipano quantitativamente alla diminuzione della massa corporea per effetto del digiuno e della malnutrizione orizantica, ma è stata condotta per correlarla ad altri dati d'ordine biochimico e possibilmente pervenire col suo aiuto ad una più valida interpretazione del cuore da inanizione e del cosiddetto cuore beriberico.

MATERIALI E METODI.

Sono stati adoperati 38 colombe (*Columba livia*) del commercio, accuratamente scelti, così d'avere un materiale omogeneo soprattutto nei riguardi della maturità sessuale e del peso corporeo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Scienza dell'Alimentazione dell'Università di Messina, con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

Malgrado ciò, prima di iniziare gli esperimenti, tutti gli animali sono stati tenuti in osservazione, per almeno una settimana, ad una dieta mista di grano e granturco *ad libitum*. Attraverso il controllo quotidiano del peso e del comportamento, si è pervenuti all'eliminazione di quelli che non hanno dato, comunque, la certezza di un perfetto stato di normalità.

Sono rimasti così 25 animali, che sono stati ripartiti come segue: 9 di controllo, 9 sottoposti al digiuno, con acqua *ad libitum*, e sorvegliati quotidianamente fino ad ottenere una perdita di peso corporeo di circa il 25 %; 7 sottoposti ad una dieta esclusiva di riso brillato e lavato, somministrato per imbeccamento, due volte al giorno, nella dose complessiva di 25 g *pro die* e *pro capite*, fino all'instaurarsi di conclamati segni nervosi.

Al momento opportuno i vari animali, previo controllo del peso, sono stati sacrificati per decapitazione, curando che quelli di controllo e quelli a dieta fossero ad ingluvie vuota.

Dopo completo dissanguamento, si è proceduto al prelievo, e chiusura in pesafiltri tarati, dei seguenti organi, nell'ordine: fegato, cuore, tubo digerente, milza, pancreas, gonadi, reni, polmoni ed encefalo. Si specifica *a)* che il cuore veniva prelevato col pericardio, mediante semplice sezione alla base dei grossi vasi, e veniva aperto per liberarlo dagli eventuali coaguli presenti nella cavità; *b)* il tubo digerente veniva prelevato con tutti i suoi mesi, mediante semplice sezione alla base dell'ingluvie ed all'estremità della cloaca, con esclusione dello sfintere anale, e pesato, previo lavaggio, per tutta la sua lunghezza, con acqua corrente e previa accurata sgocciolatura su carta bibula per due minuti; *c)* l'ovaia veniva prelevata e pesata con l'ovidutto e la tromba, sezionando quest'ultima in corrispondenza del suo sbocco in cloaca; *d)* l'encefalo, bulbo compreso, infine, veniva prelevato, liberandolo dalle meningi, recidendo alla base i nervi cranici ed il peduncolo ipofisario, e sezionando in basso il bulbo, in corrispondenza della parte inferiore.

RISULTATI E CONSIDERAZIONI.

Le medie di tutti i valori ponderali ottenuti nelle tre condizioni sono racchiusi nella tavola. In essa sono riportati anche i relativi E. S. ed il grado di significatività delle singole differenze tra le medie.

Dall'analisi di detti valori emerge:

1° in condizione di nutrizione normale, l'ordine ponderale dei vari organi, in successione decrescente, risulta essere il seguente: tubo digerente, fegato, cuore, polmoni, reni, encefalo, pancreas, milza. Tale ordine è alterato dal digiuno e dalla malnutrizione orizantica. Difatti nel digiuno l'ordine è: tubo digerente, fegato, polmoni, cuore, encefalo, reni, pancreas, milza. Nella malnutrizione orizantica l'ordine è: tubo digerente, fegato, polmoni, cuore, encefalo, reni, pancreas, milza;

2° il digiuno protratto fino ad una perdita media di peso corporeo del 26 % circa si ripercuote negativamente sul peso di tutti gli organi, cuore

compreso, ed esattamente l'ordine di ripercussione, in senso crescente, è il seguente: encefalo, polmoni, cuore, fegato, reni, tubo digerente, milza, pancreas;

3° la malnutrizione orizanica, spinta fino all'insediamento dei segni nervosi, concomitanti in genere con una perdita di peso corporeo media del 13,6 %, si ripercuote negativamente sul peso di tutti gli organi, meno che sull'encefalo. L'ordine di ripercussione è il seguente: fegato, polmoni, reni, cuore, tubo digerente, pancreas, milza;

4° definendo come « indice di usura » il rapporto tra la perdita percentuale media di peso dell'organo e la perdita percentuale corporea media, e considerando che secondo tale indice l'unità corrisponde ad un'usura dell'organo pari a quella dell'organismo complessivo, noi possiamo dire che:

a) il cuore del colombo digiunante e beriberico si usura quasi nella stessa misura di tutto l'organismo: difatti gl'indici di usura per i due cuori sono rispettivamente di 0,90 e di 0,91;

b) ancora più di tutto l'organismo si usurano, sia nel digiuno che nella malnutrizione orizanica, il tubo digerente, il pancreas e la milza: difatti gl'indici di usura relativi sono sempre molto maggiori dell'unità;

c) contrariamente agli organi sin qui ricordati, il fegato, il polmone ed il rene si comportano diversamente, nel senso che la loro usura nell'inanizione è molto maggiore che nella malnutrizione orizanica;

d) l'encefalo, in ambedue le condizioni, è l'organo ponderalmente più stabile: difatti nel mentre nell'inanizione l'indice di usura è soltanto di 0,21, nella malnutrizione orizanica si ha un lieve aumento di peso.

I nostri dati per il colombo in inanizione assoluta divergono da quelli osservati da Ott [1] nella *Rana pipiens*. Secondo tali dati, a livelli di perdita di peso corporeo non molto diversi da quelli dei nostri colombi, le perdite percentuali di peso degli organi della rana sarebbero:

Perdite percentuali di peso

organismo complessivo	pelle	muscoli	cuore	fegato	reni	cervello
20,0	25	25	15	40	18	6
30,9	38	40	31	56	25	3

Divergono anche da quelli di Lazareff [2], per la cavia in inanizione assoluta sino ad una perdita di peso corporeo del 20-30 %. La divergenza è soprattutto a carico del comportamento ponderale del polmone, del pancreas, del rene e, meno, del cuore, come appare dallo specchietto da noi elaborato sulla base dei dati dell'A.:

Perdite percentuali di peso								
organismo complessivo	polmoni	cuore	fegato	intestino	milza	pancreas	reni	cervello
20,0	0,3	9,1	23,5	10,2	31,3	5,3	2,6	3,0
30,2	0,6	21,0	31,0	10,5	37,1	24,7	10,2	5,5

Divergono ancora quelli di Jackson [3, 4] e di Cameron e Carmichael [5], per il ratto digiunante ed ipoalimentato. La divergenza riguarda soprattutto il fegato, che in questa specie si usura maggiormente. Altre differenze appaiono dallo specchietto, elaborato sulla base dei dati degli Autori:

	secondo JACKSON		secondo CAMERON e CARMICHAEL	
	Perdite percentuali di peso			
	Inanizione acuta	Ipoalimenta- zione cronica	Inanizione acuta	
			maschi	femmine
organismo complessivo	33	36	29	30
cervello	5	7	—	—
cuore	28	33	26	23
fegato	58	43	55	50
milza	51	29	37	52
reni	26	27	30	24
polmoni	31	40	—	—
stomaco e intestino .	57	57	—	—

Infine, per riportare soltanto un dato umano, che molto si avvicina all' inanizione sperimentale, aggiungiamo i rilievi di Uehlinger [6] sulle modificazioni del peso degli organi presentate da alcune delle vittime dei campi di concentramento tedeschi deceduti per pura inanizione ad Herisau, in Svizzera.

Da UEHLINGER [6], modificata:

	fegato	cuore	pancreas	reni	milza	cervello
peso medio (g).	1000-2000	200-220	70-90	265-280	80-200	1200-1300
perdita di peso %	30	25-30	10	10	—	10

Come si vede dagli anzidetti riferimenti bibliografici, le ripercussioni operate dal digiuno sui vari organi del Colombo sono diverse, entro certi limiti, da quelle presentate da altre specie animali.

Il loro studio, dunque, era necessario per un'esatta interpretazione delle ripercussioni funzionali e biochimiche cardiache, particolarmente se si considera che esse sono di certo anche la risultante complessa dell'alterata attività ed integrazione biochimica di altri organi.

In quanto ai nostri dati circa le ripercussioni ponderali operate sugli organi del Colombo dalla malnutrizione orizantica, essi non possono trovare riscontro nella letteratura, perché, per quanto ci consta, sono i primi ad essere consegnati alla stessa.

Non è possibile qui un approfondito commento del comportamento ponderale dei singoli organi. Vogliamo soltanto sottolineare che, sia per effetto del digiuno che della malnutrizione, il cuore si usura al pari di tutti gli altri organi, encefalo escluso. L'entità di tale usura, come del resto l'entità dell'usura degli altri organi, diventerà forse ulteriormente significativa dopo lo studio delle condizioni di idratazione del cuore e degli altri organi, condizioni che, come è noto, per effetto del digiuno e delle malnutrizioni variano considerevolmente da organo a organo.

Ma indipendentemente da ciò, già sin d'ora possiamo affermare che l'entità dell'usura cardiaca, essendo proporzionalmente quasi uguale a quella dell'organismo complessivo, è tale da dimostrare con chiarezza che il cuore non resiste affatto all'inanizione acuta e cronica e che gli altri organi non sono affatto capaci di salvaguardarlo.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] OTT M. D., «Anat. Rec.», 25, 111 (1924).
- [2] LAZAREFF N. S., *Sulle modificazioni ponderali e cellulari di diversi organi e tessuti in vari periodi di completo digiuno* (in russo). 80 pagg., Diss. Univ. di Warsavia, 1895 (cit. da MORGULIS S., *Fasting and undernutrition*, Dutton, New York, 1923 e da JACKSON C. M.: confronta [4]).
- [3] JACKSON C. M., «Am. J. Anat.», 18, 75 (1915).
- [4] JACKSON C. M., *The effects of inanition and undernutrition upon growth and structure*, Blakiston, Philadelphia, 1925.
- [5] CAMERON A. T. and CARMICHAEL J., «Can. J. Res. Sec. E.», 24, 37 (1946).
- [6] UEHLINGER E., *Pathologische Anatomie der Hungerkrankheit und des Hungerödems*. Pagg. 181-246 in HOTTINGER ed altri, *Hungerkrankheit, Hungerödem, Hungertuberkulose*, Benno Schwabe, Basel (1948).

Fisiologia umana. — *Contributo alla conoscenza del mancinismo* (*).
Nota di LUIGI VECCHI, presentata (**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

La prevalenza della mano destra è propria dell'uomo: basti ricordare che le diverse razze umane, pur scrivendo con caratteri diversi e diverse direzioni (da destra a sinistra, da sinistra a destra, dall'alto in basso, dal basso in alto), usano tutte la mano destra. La predominanza della destra interessa non solo l'arto superiore, ma tutta la metà del corpo: occhio, orecchio, muscoli mimici del volto, arto inferiore e persino la costruzione mentale della raffigurazione ideativa.

Misterioso è, nella sua intima essenza, il destrismo; e più misterioso il « perchè », in un sia pur ristretto numero di individui, vi sia predominanza sinistra.

Il problema ha da lungo tempo interessato gli studiosi e numerose sono le teorie formulate.

Lombroso ⁽¹⁾ cita la teoria emessa dal Sömmering che ritiene il destrismo dovuto alla carotide primitiva la quale inviando direttamente più copia di sangue all'emisfero cerebrale sinistro, che non il tronco brachio-cefalico all'emisfero destro ne determina maggior sviluppo. Egualmente Ogle ritiene che causa essenziale del destrismo sia la maggior nutrizione dell'emisfero sinistro. Baldwin ⁽²⁾ mette il destrismo in rapporto con la localizzazione del linguaggio nell'emisfero sinistro. Buchman e Struther (e più tardi anche Moorhead) ritengono doversi attribuire il destrismo alla posizione del centro di gravità spostato a destra della linea mediana del corpo, essendo gli organi della metà destra (fegato, polmone) più pesanti di quelli della metà sinistra. Compté ⁽³⁾ ritiene che la posizione cefalica del feto dorso-sinistra permette maggior sviluppo del braccio destro e di conseguenza il destrismo. Per un certo tempo ebbe fortuna la Kampftheorie di Pey-Smith-Weber ⁽⁴⁾ secondo la quale la mano destra acquistò superiorità sulla sinistra nello sviluppo filogenetico perchè, fin dai tempi remoti l'uomo scelse, e non a caso, a preferenza il braccio destro nei combattimenti, dovendo il sinistro proteggere l'organo più importante: il cuore.

L'attenzione degli studiosi si è infine polarizzata sullo studio dei centri cerebrali: da un punto di vista funzionale è lecito parlare di dominanza di

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta ddl 17 maggio 1958.

(1) C. LOMBROSO, *Mancinismo e destrismo tattile nei sani, nei pazzi, nei ciechi e nei sordomuti*, « Archivio di Psichiatria, Scienze penali ed Antropologia criminale », Vol. V, p. 187 Torino 1884.

(2) BALDWIN, *Origin of left-handedness*, « Sciences », p. 242 (1890).

(3) COMPTÉ, « Journal de la physiol. expér. », p. 41 (1928).

(4) PEY-SMITH, *On left handedness*, in « Guy's Hosp. Rep. », p. 141 (1871).

un emisfero cerebrale sull'altro (essendo il sinistro dominante nei destrimani, il destro nei mancini); ma all'esame anatomico non si rilevano nei due emisferi differenze macro nè microscopiche tali da giustificare l'atteggiamento funzionale. Il contrasto esistente fra atteggiamento funzionale e reperto anatomico, ha determinato l'insorgere di due contrastanti teorie: la prima che sostiene l'esistenza congenita della dominanza di un emisfero sull'altro, dominanza atta a giustificare il destrismo (o mancinismo); l'altra che (per la negatività dei dati anatomici e per una lateralità non definita nel neonato) ritiene la dominanza cerebrale conseguente alla educazione che impone la lateralità destra: per cui, mentre nel primo caso quanto mai chiaro sembra lo svolgersi delle leggi Mendeliane (riconoscendo dominante il gene destro e recessivo il sinistro) ed in appoggio di questa ipotesi è la dimostrabile familiarità del mancinismo (che talora vediamo dominare tenacemente in interi ceppi familiari); nella seconda ipotesi non vi sarebbe eredità, ma solo influenze esterne determinanti l'orientamento destro dell'individuo e, solo come conseguenza, la predominanza dell'emisfero cerebrale sinistro (il mancinismo poi sarebbe conseguente ad attitudini false o a mancata educazione per resistenza attiva o passiva del soggetto). A rafforzare tale concetto si afferma che difficilmente si potrebbe mutare con l'educazione una caratteristica veramente ereditaria, mutazione che è invece frequentemente osservata nei mancini contrastati.

A complicare il già poco deciso pensiero scientifico si inseriscono alcune osservazione sui gemelli⁽⁵⁾: secondo Wilson e Jones, infatti, vi è una incidenza notevolmente superiore rispetto ai singolarmente nati: 16 % e secondo Patzig sarebbe anche superiore: egli riferisce percentuali del 28 % nei monozigoti e del 18 % nei dizigoti. Così anche Komai e Fukuoko che studiarono il mancinismo negli scolari giapponesi affermano essere, nei gemelli, tale fenomeno di gran lunga più frequente.

Taluni autori (Siemens, Lauterbach) hanno addirittura sostenuto l'intervento delle medesime cause nel determinare il mancinismo e la gemellarità. Altri ancora (This, Rodinesco) sostengono che la gemellarità non ha influenza sul mancinismo.

Più importante è la frequente osservazione nei gemelli di un individuo destrimane e dell'altro mancino. A questo proposito giustamente Dalhberg sostiene che se vi fosse una ereditarietà intesa secondo le comuni leggi mendeliane, non si potrebbe mai riscontrare un simile fenomeno nei monozigoti. Rife infatti, già alcuni anni prima, aveva spiegato l'ereditarietà non già con una singola copia di geni, ma come conseguente ad un fattore quantitativo. Di conseguenza egli ammette la possibilità in molti individui di uno stadio intermedio facilmente suscettibile di evolvere, per influenze esterne, verso il destrismo o il mancinismo. (Queste influenze esterne sarebbero rappresentate da particolari condizioni della vita intrauterina, quali posizione fetale,

(5) L. GEDDA, *Studio dei gemelli*. Editore « Orizzonte medico », Città del Vaticano 1951, pp. 857-497, 687-795-858, 868-906.

affollamento, ecc.). Vi sarebbero poi individui fortemente pregiudicati nella lateralità sui quali nessun effetto possono avere le influenze esterne.

Avendo avuto possibilità di eseguire osservazioni sui bambini delle scuole di Roma, abbiamo voluto approfittarne per portare un contributo alla conoscenza generale del mancinismo.

Abbiamo potuto estendere la nostra osservazione su 4129 alunni delle scuole elementari ed abbiamo riscontrato 124 mancini (3 %) e precisamente 47 mancini su 1807 bambine = 2,60 %; 77 mancini su 2322 maschi = 3,31 %. Quindi nei maschi è più frequente che nelle femmine. Riteniamo però che forse la percentuale del mancinismo è superiore a quella osservata, poichè ancor oggi il mancinismo è rimproverato e contrastato e quindi non denunciato.

Abbiamo inoltre potuto raccogliere 20 casi con parenti prossimi mancini: quindi ereditarietà corrispondente al 16,1%. Riteniamo però che anche questa percentuale sia inferiore alla realtà, perchè non tutti sanno riferire tale caratteristica nei familiari, tanto più che sovente si tratta di mancini trasformati.

È da escludere che le condizioni ambiente possano influire sulla percentuale. Dei 124 mancini, 67 erano agiati, 57 figli di operai.

Degno di nota ci è parsa la diversa abilità con la quale i mancini usano la sinistra. In linea generale abbiamo potuto osservare che i mancini dai 3 ai 5 anni si servono della sinistra, invece della destra, in tutti i movimenti. Dai 5 ai 7 anni, durante i primi esercizi di scrittura usano con la stessa abilità tanto la mano destra che la sinistra. Dai 7 ai 10 anni quasi tutti sanno scrivere bene con la destra e male con la sinistra, rimanendo il mancinismo allo stato latente.

Questa progressiva regressione della abilità della mano sinistra si deve ritenere conseguente all'inibito esercizio della mano stessa. Infatti la capacità di disegnare con la sinistra è più duratura di quanto non lo sia la scrittura poichè più facilmente sfugge all'insegnante l'anomalo atteggiamento del bambino durante il disegno, donde la maggiore possibilità di esercizio in questa manifestazione grafica. Inoltre nell'adulto difficilmente si trovano mancini essenziali: il mancinismo è in essi limitato ad uno o ad alcuni atti soltanto, a quei movimenti cioè che non sono stati inibiti dal controllo del mondo esterno.

Particolare attenzione meritano i mancini capaci di scrivere a rovescio, specularmente, con caratteri litografici. È qui doveroso ricordare l'illustre fisiologo Silvestro Baglioni⁽⁶⁾ che ha dato un preziosissimo contributo alla conoscenza della genesi centrale della scrittura speculare con la mano sinistra.

La scrittura speculare è eseguita con la massima speditezza dalla mano sinistra: l'abbiamo potuto riscontrare in 10 bambini, cioè con una incidenza dell'8 % sui mancini e di circa 0,24 % su tutti gli individui esaminati. Par-

(6) S. BAGLIONI, *Sulla genesi centrale della scrittura speculare con la mano sinistra* Vol. XX, « Rivista di Antropologia » (1916); S. BAGLIONI, *I fattori centrali della scrittura*, « Quaderni di psichiatria », Vol. II, N. 5.

ticularità interessante: le caratteristiche individuali della scrittura rimangono le medesime, inalterate.

Si è da taluni dubitato se la specularità fosse segno di deficienza psichica, ma tale supposizione contrasta con l'opinione della grande maggioranza degli autori moderni. Anche a noi è stato possibile riscontrare la vivacità d'ingegno di cui spesso sono dotati tali bambini. La storia inoltre ci tramanda un fulgidissimo esempio di specularità dovuto al genio del sommo Leonardo, il quale presentava speculare non solo la scrittura, ma, fenomeno più raro, anche il disegno. Infatti nella «Cena» i tratti sono spesso orientati dall'alto in basso e da sinistra a destra, come hanno dimostrato Frizzoni e Morelli.

Deficienti, al contrario, devono ritenere soltanto coloro che, mancini, scrivono specularmente, senza riuscire mai a scrivere in direzione normale, nè con la sinistra, nè con la destra.

Abbiamo ricercato i mancini anche nelle scuole differenziali: su 93 alunni 3 erano mancini (3,2 %) e di questi uno solo scriveva specularmente, ma aveva già appreso a scrivere in direzione normale.

Dobbiamo dunque accettare quale spiegazione valida quella che ritiene la scrittura speculare essere la scrittura automatica, normale della mano sinistra, dovuta alla costruzione simmetrica, bilaterale del cervello e dell'organismo ⁽⁷⁾.

La scrittura litografica, comunque, non è riscontrabile che in un ristretto numero di mancini. Esiste dunque un evidente antagonismo: la scrittura speculare è tipica del mancino, ma solo pochi mancini scrivono specularmente. In realtà il contrasto è solo apparente poichè è noto che il controllo visivo, l'abitudine, inibiscono tale forma grafica. A questo si deve la maggiore frequenza di ambidestri rispetto agli speculari: abbiamo notato 39 ambidestri pari al 32 % dei mancini esaminati. Questi individui usano con eccezionale abilità e con la massima indifferenza tanto la mano destra che la sinistra. A questo proposito giova ricordare che l'ambidestrismo congenito è carattere tipico delle scimmie, facile a riscontrarsi nell'uomo preistorico ⁽⁸⁾; che il fenomeno si manifesta con una frequenza inversa al grado di perfezione raggiunto dalla razza; che è di gran lunga più frequente nei degenerati e nei delinquenti ⁽⁹⁾, ma tutte queste considerazioni non hanno, nel caso nostro, alcun valore, essendo qui l'ambidestrismo solo frutto di paziente esercizio: è quindi una caratteristica acquisita.

Ci si è più volte domandati quale influenza eserciti sul bambino mancino la coercizione all'uso della mano destra generalmente esercitata dall'insegnate e dall'ambiente familiare. È noto che tale violenza all'evoluzione individuale è talora causa di disturbi quali le balbuzie.

(7) Y. YOTEYKO, *Theorie psycho-physiologique de la droiterie*, «R. Ph.», XVI, 6 et 7 (1916), pp. 514-545 e pp. 58-84.

(8) P. SARASIN, *Über Rechts und Linkshändigkeit in die Prähistorie und die Rechthändigkeit in der historischen Zeit*, «Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel», Band XXIX, 1918.

(9) C. LOMBROSO, loc. cit.

Questo pericolo ha indotto alcuni studiosi ad inibire qualsiasi tentativo atto a rendere destrimane un mancino. In realtà dobbiamo ricordare che nell'adulto e del pari nel bambino mancino con sviluppo motorio, intellettuale e psichico normale, si manifestano con estrema rarità tali gravi conseguenze. Inoltre si osserva generalmente la scomparsa del difetto fonetico non appena si sia instaurata la nuova dominanza cerebrale.

Quindi, lungi dal considerare (come tutt'ora avviene in larghi strati della popolazione civile) il mancinismo come un difetto psichico, e pur riconoscendo in tali individui il disagio della loro diversità, sarebbe auspicabile educare (gradatamente e con le dovute cautele) la mano destra, pur non trascurando l'esercizio della sinistra, rappresentando l'ambidestria un privilegio che avvantaggia indubbiamente l'individuo nelle arti e nei mestieri.

Fisiologia vegetale. — *Sul determinismo delle morfosi della vegetazione sui terreni serpentinosi attraverso l'analisi della nutrizione minerale* (*). Nota di ORNELLA VERGNANO, presentata (**) dal Socio A. CHIARUGI.

La vegetazione che riveste gli affioramenti ofiolitici, costituiti sopra tutto da serpentina, eufotide e diabase, ha richiamato da tempo per le sue caratteristiche particolari l'attenzione degli studiosi. Infatti sui terreni provenienti dal disfacimento di queste rocce la copertura arborea è scarsa e formata da esemplari poco numerosi, inferiori al normale per gradezza e sviluppo, e la copertura erbacea, sebbene più abbondante, è costituita anche essa in gran parte da piante poco sviluppate, con marcata tendenza al nani-smo, all'abito prostrato, alla riduzione della lamina fogliare, dei petali, del rivestimento pilifero, ecc. Queste caratteristiche e costanti modificazioni morfologiche delle piante spontanee di queste zone, talora notevolmente estese, da noi specialmente in Toscana, hanno portato alla creazione di varietà serpentinicole, riscontrabili solo sui terreni serpentinosi (la cosiddetta « Flora dei gabbri » del Caruel). Il paesaggio assume quindi un aspetto particolarmente arido e brullo, accentuato dall'abbondante pietrisco, dall'assenza di un terreno agrario vero e proprio (rare e di scarso rendimento sono infatti tutte le colture praticate sulle serpentine) e dall'affioramento in gran parte diretto delle rocce sottostanti, che, con la loro colorazione scura trattengono notevolmente il calore, favorendo perciò la rapida evaporazione dell'acqua presente nel suolo.

(*) Dall'Istituto Botanico dell'Università di Firenze, Laboratorio di Fisiologia Vegetale, diretto dal prof. Alberto Chiarugi, Pubblicazione n. 3. Ricerche eseguite sotto gli auspici della « Fondazione Carlo e Giulio Marchi » di Firenze.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

Data la vasta distribuzione degli affioramenti ofiolitici, in questo campo, sia dal punto di vista strettamente geobotanico che da quello agrario, le ricerche furono numerosissime e soprattutto rivolte a ricercare la ragione dell'aspetto particolare della vegetazione e della infertilità di questi terreni (Novák 1928, 1937, Robinson et al. 1935, Messeri 1936, Pichi-Sermolli 1948, ecc.) ^(1,2,3,4,5), ma tutte le ipotesi prospettate si sono sempre basate unicamente sulla composizione del terreno e sui rilievi floristici e geobotanici effettuati sulla vegetazione. Da questo tipo di indagine non si poteva quindi ottenere altro risultato che l'attribuzione di ogni effetto morfologico nelle piante o dello scarso rendimento delle colture a quelle caratteristiche del terreno messe in evidenza dall'analisi chimica. Così da un lato Novák ^(1,2) attribuiva un'importanza fondamentale al rapporto Mg/Ca sempre superiore all'unità, oltre alla quasi totale assenza di nitrati, carbonati, solfati e cloruri e alla carenza di potassio e di sodio; mentre Robinson et al. ⁽³⁾, avendo messo in rilievo per la prima volta, con più accurati metodi analitici, le forti percentuali di Ni, Cr e Co di questi terreni naturalmente considerarono questi elementi come la causa principale dell'infertilità delle serpentine.

Le ricerche continuarono a moltiplicarsi e i vari Autori, di volta in volta, sostennero o l'una o l'altra delle due precedenti ipotesi, ma nel considerare la vegetazione dei terreni serpentinosi molto raramente questi studiosi si posero il problema di esaminare anche la composizione delle piante in modo da avere un'indicazione del loro effettivo metabolismo minerale. Per quanto le analisi di materiale vegetale non possano dire nulla sullo stato in cui gli elementi si trovano nella pianta e sulla loro importanza fisiologica, pur tuttavia se l'indagine su un determinato terreno è corredata da una serie di analisi del materiale vegetale rinvenibile su di esso, si potrà considerare con maggior competenza e sicurezza la possibilità di carenze e di effetti tossici relativi agli elementi riscontrati nel terreno. Se a questa indagine si aggiunge inoltre una accurata osservazione diretta della vegetazione, si potranno trarre conclusioni di non piccola entità.

A questo scopo quindi iniziai una serie di ricerche di carattere puramente fisiologico (Minguzzi e Vergnano 1948 e 1953, Hunter e Vergnano

(1) F. A. NOVÁK, *Quelques remarques relatives au problème de la végétation sur les terrains serpentiniques*, « Preslia », vol. 6, pp. 43-71 (1928).

(2) F. A. NOVÁK, *Květena a vegetace hadcových půd*, « Mohelno », vol. 1, pp. 113-160 (1937).

(3) W. O. ROBINSON, G. EDGINGTON e H. G. BYERS, *Chemical studies of infertile soils derived from rocks high in Mg and generally high in Cr and Ni*, « U.S. Dept. Agric. Tech. Bull. », n. 471, pp. 1-28 (1935).

(4) A. MESSERI, *Ricerche sulla vegetazione dei dintorni di Firenze. - 4. La vegetazione delle rocce ofiolitiche di Monte Ferrato (Prato)*, « Nuovo Giorn. Bot. It. », n. s., vol. 43, pp. 277-372 (1936).

(5) R. PICHI-SERMOLLI, *Flora e Vegetazione delle serpentine e delle altre ofioliti dell'Alta Valle del Tevere (Toscana)*, « Webbia », vol. 6, pp. 1-380 (1948).

1952, Vergnano 1953)^(6,7,8,9), che ho continuato negli anni successivi (Vergnano 1958)⁽¹⁰⁾ e di cui qui brevemente riassumo i risultati conseguiti.

RESULTATI ANALITICI.

Elementi macronutritivi. - Le tipiche piante serpentinicole spontanee scelte per questa indagine, raccolte sull'affioramento ofiolitico dell'Impruneta (Firenze) furono: *Centaurea paniculata* L. var. *Carueliana* Michel., *Alyssum Bertolonii* Desv., *Euphorbia nicaeensis* All. var. *prostrata* Caruel. A queste tre tipiche piante serpentinicole, cioè strettamente legate al substrato serpentinoso, fu aggiunta *Helichrysum italicum* (Roth.) G. Don., specie comune che si ritrova tanto sui terreni ofiolitici quanto su altri completamente diversi e che, dovendo servire come confronto, fu raccolta anche sull'arenaria (Monte Ceceri, Firenze) ed analizzata al pari dei campioni provenienti dalle serpentine. Per avere di ogni pianta campioni dei successivi stadi di sviluppo e per esaminare anche la distribuzione degli elementi nelle varie parti della pianta, il prelievo fu effettuato durante il periodo febbraio-agosto. La tecnica dell'essiccamento, incenerimento e analisi delle ceneri è descritta in un precedente lavoro (Minguzzi e Vergnano 1953)⁽⁷⁾. L'elenco dei campioni raccolti e i risultati analitici ottenuti sono riportati nella Tabella I.

L'importanza di queste analisi è messa subito in rilievo da alcuni risultati particolarmente chiari e insospettati: è evidente infatti che l'affermazione di Novák sull'assenza di cloruri e di solfati nelle serpentine non può essere ulteriormente sostenuta. Tutte queste piante contengono dosi elevate di cloruri e di solfati e la moderna indagine geochimica ha messo in evidenza che, ad esempio, la carenza di cloruri nelle rocce e nei terreni non ha alcun significato perché le precipitazioni arricchiscono regolarmente le acque circolanti di questo elemento rendendolo in tal modo disponibile per le piante. Questi due fattori sono perciò da escludersi nel considerare l'infertilità dei terreni serpentinosi.

(6) C. MINGUZZI e O. VERGNANO, *Il contenuto di Ni nelle ceneri di Alyssum Bertolonii Desv.*, «Atti Soc. Tosc. Sci. Nat.», vol. 55, pp. 49-71 (1948).

(7) C. MINGUZZI e O. VERGNANO, *Il contenuto di elementi inorganici delle piante della formazione ofiolitica dell'Impruneta (Firenze)*. Nota 1: *Determinazione degli elementi macronutritivi e ricerca degli elementi in tracce*, «Nuovo Giorn. Bot. It.», n.s., vol. 60, pp. 287-319 (1953).

(8) J. G. HUNTER e O. VERGNANO, *Nickel toxicity in plants*, «Ann. Appl. Biol.», vol. 39, pp. 279-284 (1952).

(9) O. VERGNANO, *L'azione fisiologica del Ni sulle piante di un terreno serpentinoso*, «Nuovo Giorn. Bot. It.», n.s., vol. 60, pp. 109-183 (1953).

(10) O. VERGNANO, *Il contenuto di elementi inorganici delle piante della formazione ofiolitica dell'Impruneta (Firenze)*. Nota 2: *Nichelio, Cromo e Cobalto nel dinamismo nutritivo delle piante serpentinicole*, «Nuovo Giorn. Bot. It.», n. s., vol. 65 (1958).

TABELLA I.

(%/o sulle ceneri)

Campione	Terreno	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	CaO	MgO	K ₂ O	Na ₂ O	P ₂ O ₅	SO ₄	Cl
<i>Centaurea paniculata</i> (fusti in vege- tazione)	serpentina	8,48	6,13	24,90	15,83	15,67	10,79	5,74	5,99	6,62
id. (fiori)	»	0,85	1,11	32,95	8,13	26,40	2,28	7,86	6,99	3,79
id. (frutti)	»	3,17	2,43	33,25	7,45	24,80	5,77	7,09	6,10	n. d.
<i>Alyssum Bertolonii</i> (fusti in vegetaz.)	»	17,76	4,95	26,39	10,81	14,04	1,42	4,63	9,34	0,64
id. (fusti e fiori)	»	7,50	4,42	25,60	8,85	16,16	2,68	3,33	15,03	1,37
id. (fiori e frutti)	»	9,73	2,72	20,20	10,55	23,91	2,41	5,65	14,44	3,04
<i>Euphorbia nicaensis</i> (fusti in vege- tazione)	»	9,01	5,63	21,63	21,38	12,86	6,69	3,34	12,43	0,79
id. (fusti e fiori)	»	5,24	3,61	19,78	19,75	18,15	6,57	3,12	8,30	3,70
id. (fiori e frutti)	»	9,06	1,75	17,95	16,94	30,36	5,56	3,72	5,72	5,76
<i>Helichrysium italicum</i> (fusti in vege- tazione in marzo)	»	19,00	9,97	15,14	17,98	7,36	3,14	1,86	4,73	1,45
id. (fusti in vegetazione in maggio)	»	8,24	3,28	18,32	12,15	18,60	1,10	3,47	10,59	7,63
id. (fiori)	»	6,03	1,68	15,70	9,34	27,18	12,95	7,34	4,20	8,84
id. (frutti)	»	7,71	2,88	15,21	15,86	23,88	9,00	3,20	5,41	9,51
id. (fusti secchi)	arenaria	8,19	8,01	16,64	5,38	23,16	14,54	5,26	13,20	n. d.
id. (fusti in vegetazione)	»	4,95	3,61	16,63	4,60	30,40	14,07	5,99	7,35	n. d.
id. (fiori)	»	3,55	2,35	16,36	6,92	31,14	10,31	10,18	4,98	n. d.
id. (frutti)	»	1,72	2,71	19,67	5,74	31,27	8,72	8,23	6,30	n. d.

Anche la quantità di Ca è superiore a quella che si poteva prevedere considerando la composizione del substrato: il rapporto Mg/Ca in *Centaurea* e in *Alyssum* è sempre inferiore all'unità, ed ha in molti casi valori simili a quelli presentati da *Helichrysum italicum* raccolto su terreno non serpentinoso a scarso contenuto in Mg. Nel caso di *Euphorbia* e di *Helichrysum* questo rapporto si avvicina all'unità, ma non è nettamente maggiore di uno. A parte il fatto molto discutibile dell'importanza effettiva di un rapporto di questo genere nelle piante, è chiaro che da queste analisi non risulta l'eccedenza del Mg sul Ca nella composizione delle piante serpentinicole. Considerando il contenuto di Ca di molte piante di terreni normali e di *Helichrysum italicum* proveniente dall'arenaria, si dovrebbe perciò escludere una carenza di Ca in queste piante (non escludendo l'importanza indiretta di un maggiore apporto di Ca al terreno per le ragioni che vedremo in seguito).

Anche il potassio e il sodio sono presenti: con quantità notevoli nel caso del sodio, più scarse nel caso del potassio. Questo elemento potrebbe perciò essere al limite di carenza, ma questa affermazione non può essere fatta con assoluta certezza. In stato di effettiva carenza si trova invece il fosforo, il cui contenuto, sopra tutto in alcuni campioni, è certamente al di sotto del minimo indispensabile. Per quanto riguarda l'azoto tutte le analisi effettuate hanno dato esito negativo, per cui anche di questo elemento le piante serpentinicole sono particolarmente povere. Il forte contenuto in Fe dei terreni serpentinosi non riveste particolare importanza per le piante: infatti questo elemento è nel terreno in forma quasi del tutto insolubile, e le piante non presentano infatti un forte arricchimento di ferro totale, ma non conosciamo effettivamente sotto quale forma esso si trovi nei tessuti.

A conclusione di questo rapido esame della composizione delle piante serpentinicole, dobbiamo ricordare che le serpentine spesso sono inglobate in rocce di altra natura e che le acque circolanti possono trasportare quindi vari costituenti da una zona a un'altra e alterare perciò i rapporti tra i vari elementi quali possono apparire dall'analisi della roccia o anche del terreno. Nel caso delle piante dell'Impruneta interviene in misura notevole l'apporto esterno che provoca un arricchimento di Ca, di K e Na nelle soluzioni circolanti; ciò non esclude che questi elementi possano essere in stato di netta carenza in altri affioramenti serpentinosi più estesi e quindi meno facilmente soggetti a un apporto esterno.

Elementi micronutritivi. - Sulle ceneri delle stesse piante fu poi effettuata una indagine spettrografica, eseguita presso l'Istituto di Mineralogia di Firenze, per determinare accuratamente il loro contenuto in Ni, Cr e Co, elementi particolarmente ricchi nelle serpentine. Il contenuto di Ni, Cr e Co delle varie piante è riportato nella Tabella II.

Nichelio: il contenuto in Ni dei vari campioni è chiaramente sempre molto elevato e talora, come in *Alyssum*, raggiunge valori eccezionali con più di 55.000 p.p.m. nelle ceneri dei fiori e dei frutti. Questo particolare potere di accumulo di Ni, che era già stato messo in rilievo per *Alyssum Bertolonii*

in un lavoro precedente (Minguzzi e Vergnano 1948) ⁽⁶⁾, è valido anche per le altre piante, compreso *Helichrysum italicum*, che contengono quantità variabili di Ni all'incirca dello stesso ordine di grandezza. In *Helichrysum* questo elemento si concentra evidentemente nelle parti secche della pianta, destinate a cadere, mentre in *Alyssum* e in *Euphorbia* il massimo contenuto si osserva nelle foglie e nei fiori. È verosimile che questo notevolissimo arricchimento di Ni da parte di alcune serpentinofite significhi una utilizzazione di questo elemento nel loro metabolismo in modo diverso da quanto accade normalmente e a somiglianza di quanto probabilmente avviene nelle piante di zone particolarmente ricche di certi minerali.

TABELLA II.

(p.p.m. sulle ceneri)

Campione	Ni	Co	Cr
<i>Centaurea</i> (fusti secchi)	970	520	75
id. (fiori).	230	35	17
<i>Alyssum</i> (fusti in vegetazione) . .	14.400	10	190
id. (fiori e frutti)	55.200	300	1
<i>Euphorbia</i> (fusti in vegetazione) . .	160	230	1.790
id. (id. con fiori)	870	65	300
id. (fiori e frutti)	510	160	20
<i>Helichrysum</i> (fusti secchi)	2.100	120	200
id. (fusti in vegetazione) . .	690	40	620
id. (fiori)	440	15	110
id. (frutti)	860	18	350

Cobalto: anche le concentrazioni di Co raggiunte dalle piante serpentine sono notevolmente elevate; esso viene accumulato prevalentemente nelle parti secche delle piante. Il contenuto di Co non ha nessuna relazione evidente con il contenuto di Ni, poiché all'aumentare di questo elemento non corrisponde un proporzionale aumento di Co. Evidentemente la tossicità di questo elemento è molto elevata, e l'unica possibilità presentata dalla pianta per deprimere la è la limitazione nell'assorbimento.

Cromo: questo elemento, certamente il meno solubile dei tre considerati, è assorbito dalle piante in una minore quantità rispetto agli altri, però sempre in una concentrazione notevole: ed è questo un fatto rilevante e cer-

tamente importante fisiologicamente. Questo elemento tende a concentrarsi nei fusti in vegetazione; nei fiori di tutte le piante esaminate il Cr raggiunge le concentrazioni più scarse, e nel caso di *Alyssum* il quantitativo è così basso da rientrare nella normalità.

Neanche il contenuto in Cr ha rapporti evidenti con il contenuto in Ni o in Co; ognuno di questi elementi si presenta con un andamento del tutto individuale.

Livelli tossici del Ni, Cr e Co nelle piante. - Considerato brevemente il contenuto in Ni, Cr e Co di queste piante, ci si può domandare se esso supera realmente i limiti tossici e se può provocare turbe nella vegetazione.

Le concentrazioni di questi tre elementi riscontrate nelle piante esaminate da me e da altri Autori (Robinson et al. 1935, Vergnano 1953, Lounamaa 1956, Němec 1957) ^(3,9,11,12) sono tutte superiori a quelle ritenute normali da Mitchell (1945) ⁽¹³⁾, che sarebbero dell'ordine di 0,1-5 p.p.m. sulla sostanza secca per il Ni, 0,01-0,4 p.p.m. per il Co e 0,12 p.p.m. per il Cr. Le piante serpentinicole presentano sempre livelli nettamente superiori a quelli considerati come normali da Mitchell e da altri Autori, per cui questo substrato si avvicina per molti caratteri a quei terreni delle regioni minerarie, che posseggono una tipica flora sopravvivenente in condizioni del tutto diverse dalle normali per un particolare metabolismo.

LE MORFOSI DELLE PIANTE SERPENTINICOLE.

Le numerose morfosi presentate dalle piante serpentinicole e indubbiamente legate al substrato serpentinoso si possono classificare nelle seguenti categorie principali: stenosi delle foglie, petali, ecc., glaucescenza, glabrescenza, nanismo, plagiotropismo, sviluppo molto notevole dell'apparato radicale, a cui si può aggiungere l'eritismo marcato delle foglie e talora del fusto presentato da molte serpentinofite. È importante stabilire quali siano le cause che le provocano. Esse sono state variamente interpretate dai vari Autori. Novák (1928, 1937) ^(1,2) le collega sopra tutto con la natura chimica del substrato serpentinoso e con il suo rapporto Mg/Ca, tanto da ritenerle vere e proprie chemiomorfosi. Messeri (1936) ⁽⁴⁾ attribuisce molte di esse (stenofillia, glabrescenza, abito postrato) ai fattori edafici, mentre per le altre postula più fattori concomitanti. Il Pichi-Sermolli (1948) ⁽⁵⁾ ritiene che oltre ai fattori edafici abbiano un'importanza notevolissima e in alcuni casi dominante i fattori climatici (forte luminosità, eccessivo riscaldamento del terreno, scarse

(11) J. LOUNAMAA, *Trace elements in plants growing wild on different rocks in Finland*, «Ann. Bot. Soc. Vanamo», vol. 29, pp. 1-195 (1956).

(12) A. NĚMEC, *Vliv povahy půdy a hnojení moučkami hornin na resorpci chromu lesními kulturami*, «Sborník Česk. Akad. Zemědělsk. Věd.», vol. 3, pp. 795-812 (1957).

(13) R. L. MITCHELL, *Co and Ni in soils and plants*, «Soil Sci.», vol. 60, pp. 63-70 (1945).

possibilità di trattenere l'acqua di precipitazione, ecc.). La vegetazione serpentinicola sarebbe perciò una vegetazione di tipo xeromorfo in cui i fattori edafici possono accentuare certi caratteri. Anche Kruckeberg (1954)⁽¹⁴⁾ considera le serpentinomorfosi essenzialmente come xeromorfosi.

Per stabilire le cause che possono provocare queste morfosi, occorre considerare che alcune di esse (stenosi delle foglie e dei petali, glabrescenza, eritrismo, nanismo, forte sviluppo dell'apparato radicale) si manifestano in varia misura su tutti i terreni serpentinosi studiati, anche in condizioni climatiche completamente diverse (ad esempio Europa settentrionale, centrale e meridionale), il che fa presupporre che un fattore simile operi in tutte queste aree. Se esso fosse rappresentato dall'esistenza di un rapporto Mg/Ca maggiore di 1, come sostiene Novák, la vegetazione di altri substrati magnesiaci con scarso contenuto di Ca (magnesite) dovrebbe presentare aspetti se non identici per lo meno molto simili. Invece la vegetazione delle magnesiti (Rune 1953)⁽¹⁵⁾ non presenta le caratteristiche morfosi delle piante serpentinicole, e questo fenomeno è tanto più interessante poiché le magnesiti oltre ad avere un elevato contenuto in Mg rappresentano anche substrati molto esposti, per cui quei fenomeni di forte insolazione, di scarsa umidità, di elevata temperatura, ecc., che si ritrovano sulle serpentine, si verificano in ugual misura su di esse. Inoltre dalle analisi precedentemente riportate è evidente che il contenuto di Ca e di Mg di queste piante non è eccezionale e che il rapporto Mg/Ca da esse rappresentato è simile a quello di molte piante raccolte su terreni normali. Anche l'assenza dei solfati e dei cloruri non può esser presa in considerazione, perché – come dicemmo – questi elementi sono invece notevolmente concentrati nelle piante serpentinicole. La carenza di P e di N non è un fenomeno tipico soltanto delle serpentine: i terreni che ne sono carenti possono essere normalizzati da un'opportuna concimazione con fertilizzanti fosfatici, azotati e potassici, che sono incapaci di provocare un analogo miglioramento evidente nelle colture sulle serpentine: questo fenomeno è stato più volte osservato (Hunter e Vergnano 1952, Vergnano 1953, Némec 1957, ecc.)^(8,9,12).

La causa prevalente di queste morfosi resta limitata alla tipica costituzione chimica delle rocce ofiolitiche, e cioè al loro contenuto di Cr, Ni e Co, che non è soltanto elevato nelle analisi della roccia – che hanno del resto poco significato biologico in quanto gli elementi riscontrati possono essere anche in forma insolubile –, ma soprattutto nelle analisi relative al contenuto di Cr e di Ni di scambio o solubili in acidi. Infatti nei terreni serpentinosi studiati, il Ni di scambio raggiunge come valori minimi 2 p.p.m. (Robinson et al. 1935)⁽³⁾; 7 p.p.m. sono state ritrovate nei terreni serpentinosi scozzesi (Mitchell 1945)⁽¹³⁾, e come massimo 1200 p.p.m. in quelli toscani (Lisanti

(14) A. R. KRUCKEBERG, *The ecology of serpentine soils*, « Ecology », vol. 35, pp. 267–274 (1954).

(15) O. RUNE, *Plant life in serpentines and related rocks in the north of Sweden*, « Acta. Phytogeogr. Suecica », vol. 31, pp. 1–139 (1953).

1952)⁽¹⁶⁾. Secondo Mitchell normalmente il Ni di scambio di un terreno non raggiunge mai 0,2 p.p.m. Lo stesso si verifica per il Cr solubile in acidi: da un minimo di 0,33 p.p.m. nei terreni serpentinosi scozzesi, si passa a 2 p.p.m. nei terreni serpentinosi boemi (Němec 1957)⁽¹²⁾, mentre anche per questo elemento i valori normali non raggiungono 0,2 p.p.m. di Cr (solubile in acido acetico).

Il contenuto in Ni, Cr e Co delle piante di questi terreni raggiunge dosi ovviamente tossiche. In Scozia ho osservato (Hunter e Vergnano 1952, Vergnano 1953)^(8,9) che la causa dell'infertilità dei terreni serpentinosi è dovuta all'elevato contenuto in Ni che impedisce lo sviluppo delle colture; mentre nelle serpentine della Boemia, secondo Němec (1957)⁽¹²⁾, è il forte contenuto in Cr che pregiudica lo sviluppo della vegetazione arborea.

La stenosi delle foglie e di altri organi è stata inoltre provocata anche da me sperimentalmente (Vergnano 1953)⁽⁹⁾ con colture artificiali contenenti eccesso di Ni e Co; pertanto anche la riduzione dell'accrescimento con conseguente aspetto deperiente e nano presentato dagli alberi delle regioni serpentinicole si può considerare causato proprio dalla prima manifestazione dell'effetto tossico di questi elementi che inibiscono il normale sviluppo delle piante. La colorazione rosso-porporina delle foglie e dei fusti è una manifestazione facilmente osservabile in piante coltivate con eccesso di Cr. Il forte eritrismo di *Euphorbia nicaeensis*, l'unica pianta tra quelle esaminate che presenta marcatamente questo fenomeno, è accompagnato da un elevato contenuto in Cr.

Si può pertanto concludere che il contenuto in Ni, Cr e Co del substrato serpentinoso è il fattore determinante delle modificazioni morfologiche delle piante serpentinicole, le cui morfosi sono quindi da considerare «chemio-morfosi» da elementi tossici.

Il fenomeno più volte osservato che la vegetazione serpentinicola è tanto più tipica quanto maggiore è l'alterazione della roccia, e quanto maggiore è perciò il contenuto di Ni, Cr e Co nelle soluzioni circolanti, dimostra anche esso l'azione tossica di questi elementi minori, caratteristici di tutti i terreni ofiolitici.

Non si può escludere che anche altri fattori di natura ecologica possano contribuire ad accentuare alcune morfosi di queste piante, che pertanto possono essere interpretate in parte come xeromorfosi: la glaucescenza, e forse anche lo stesso abito prostrato, facilitato dalla scarsa concorrenza tra le specie, sono probabilmente provocate da quelle condizioni di aridità e di illuminazione che caratterizzano le serpentine, soprattutto in particolari regioni. L'assenza di queste morfosi sulle serpentine svedesi (Rune 1953)⁽¹⁵⁾ e la loro presenza in ambienti più meridionali (Messeri, Pichi-Sermolli)^(4,5) convaliderebbe questa ipotesi.

Per quanto riguarda infine l'aspetto deperiente dato dallo scarso accrescimento e sviluppo delle piante arboree, esso mi sembra chiaramente con-

(16) E. L. LISANTI, *Contributo allo studio delle morfosi che si riscontrano sui serpentinici*, «Nuovo Giorn. Bot. It.», n. s., vol. 59, pp. 349-360 (1952).

nesso con l'azione ritardante sull'accrescimento caratteristica del Cr, del Ni e anche del Co, che si accumulano in queste piante in dosi eccessive per un normale sviluppo.

Ci si può infine chiedere se queste zone, talora estese, non possano essere utilizzate per coltivazioni di piante di interesse agrario. Un benefico effetto sulla vegetazione si ha con la somministrazione di carbonato di Ca: la presenza di questo elemento contribuisce sempre a deprimere l'assorbimento del Ni, Cr e Co. È necessario però, oltre all'aggiunta di fertilizzanti azotati, fosfatici e potassici, ricorrere a colture particolarmente resistenti a elevate concentrazioni di Ni, Cr e Co. Anche nella pratica agraria corrente vengono di solito tralasciate come improduttive alcune colture; tra quelle praticate occorrerebbe fare un'ulteriore selezione, in modo da ottenere i massimi rendimenti compatibili con questo substrato, che per le sue caratteristiche assolutamente uniche è particolarmente degno di studio.

Patologia. — *Sulla struttura del mesangio di Zimmermann indagata mediante il microscopio elettronico.* Nota di ENNIO LUCIO BENEDETTI, presentata (*) dal Corrisp. G. BOMPIANI.

Le lunghe controversie che hanno caratterizzato lo studio del mesangio di Zimmermann [20] nel glomerulo renale secondo i metodi classici dell'istologia [1], almeno in parte si sono riprodotte quando questa struttura è stata analizzata nelle sezioni ultrasottili mediante il microscopio elettronico. Alcuni Autori [11] [19] [16] [12], infatti descrivono nei glomeruli di vari animali ed anche nell'uomo, un terzo tipo di cellula in posizione intercapillare avente alcuni caratteri ultrastrutturali differenti da quelli delle cellule endoteliali ed epiteliali; altri Autori, invece [10] [6] [7] [15] negano recisamente queste differenze interpretando le immagini delle cellule intercapillari come corrispondenti a quelle di cellule endoteliali in sezione tangente. Poiché il perfezionamento della tecnica delle sezioni ultrasottili permette oggi uno studio più accurato dell'ultrastruttura cellulare, abbiamo portato la nostra attenzione sui caratteri citologici delle cellule intercapillari.

TECNICA DELLA RICERCA.

I frammenti di rene di ratto sono stati fissati subito dopo l'uccisione dell'animale per decapitazione, in acido osmico al 2 %. pH 7,3; dopo la fissazione che si protraeva per un'ora a 2 C°, i frammenti sono stati disidratati con alcool etilico ed inclusi in metacrilato di butile. Le sezioni sono state

(*) Nella seduta del 19 aprile 1958.

allestite con il microtomo Porter Servall ed osservate al microscopio elettronico RCA (EMU 2E) ⁽¹⁾.

RISULTATI.

Ad ingrandimento relativamente non elevato (fig. 1) nei tratti intercapillari dei lobuli glomerulari si riconosce un tipo di cellula che è caratterizzata da una peculiare sede e da una complessa ultrastruttura. Esse sono delimitate dalla membrana basale, la stessa che riveste la parete delle anse e che si prolunga nei tratti intercapillari, interponendosi tra le cellule situate in questa regione e l'epitelio. La detta membrana basale si continua poi nella parete dei capillari adiacenti, ma da essa, in sede intercapillare si distaccano dei tozzi prolungamenti a decorso tortuoso che separano, in modo discontinuo le cellule intercapillari e quelle endoteliali (figg. 1-2). Tratti di sostanza omogenea del tutto identica a quella che costituisce la membrana basale, occupano anche le anfrattuosità del profilo citoplasmatico delle cellule intercapillari: queste sono dotate di prolungamenti che si estendono verso il lume capillare e che risultano talora a diretto contatto con il citoplasma delle cellule endoteliali, sospingendo quest'ultimo verso l'interno del lume capillare (fig. 3).

Il *nucleo* delle cellule intercapillari è di forma irregolare presentando delle salienze e delle rientranze della membrana nucleare; il nucleo invece delle cellule endoteliali è per lo più rotondo o ovalare. Il nucleolo è riconoscibile in forma di un «gomitolo» di filiere di granuli molto densi (fig. 2).

Il *condrioma* risulta formato da numerosi mitocondri di piccola taglia, rotondeggianti o a bastoncino nei quali è riconoscibile la caratteristica struttura a «creste» membranose. Commisti ai mitocondri, si osservano (fig. 1) alcune formazioni rotondeggianti od ovalari delimitate da una sola membrana ed occupate da una sostanza omogenea e densa. Queste strutture citoplasmatiche possono essere interpretate come «microbodies» [17].

L'*apparato di Golgi* ha nelle cellule intercapillari un'estensione ed una complessità del tutto caratteristica ove lo si compari a quello delle cellule endoteliali. Esso è costituito da un sistema di vacuoli comunicanti delimitati da membrane lisce, talora vuoti, talaltra occupati da depositi granulari osmiofili (fig. 4). Le formazioni vacuolari sono circondate da numerose vescicole di piccola taglia delimitate da una spessa parete molto osmiofila. Talora, in queste vescicole è difficilmente riconoscibile il lume e perciò risultano piuttosto come granuli pieni osmiofili.

(1) L'allestimento dei preparati e l'osservazione microscopica è stata condotta dall'A. nel laboratorio di Microscopia elettronica dell'Institut de Recherches sur le Cancer «G. Roussy» di Villejuif (Paris). L'autore esprime la sua più viva gratitudine al prof. Ch. Oberling, Direttore dell'Istituto ed al dott. W. Bernhard, Capo del Laboratorio per l'ospitalità gentilmente offerta.

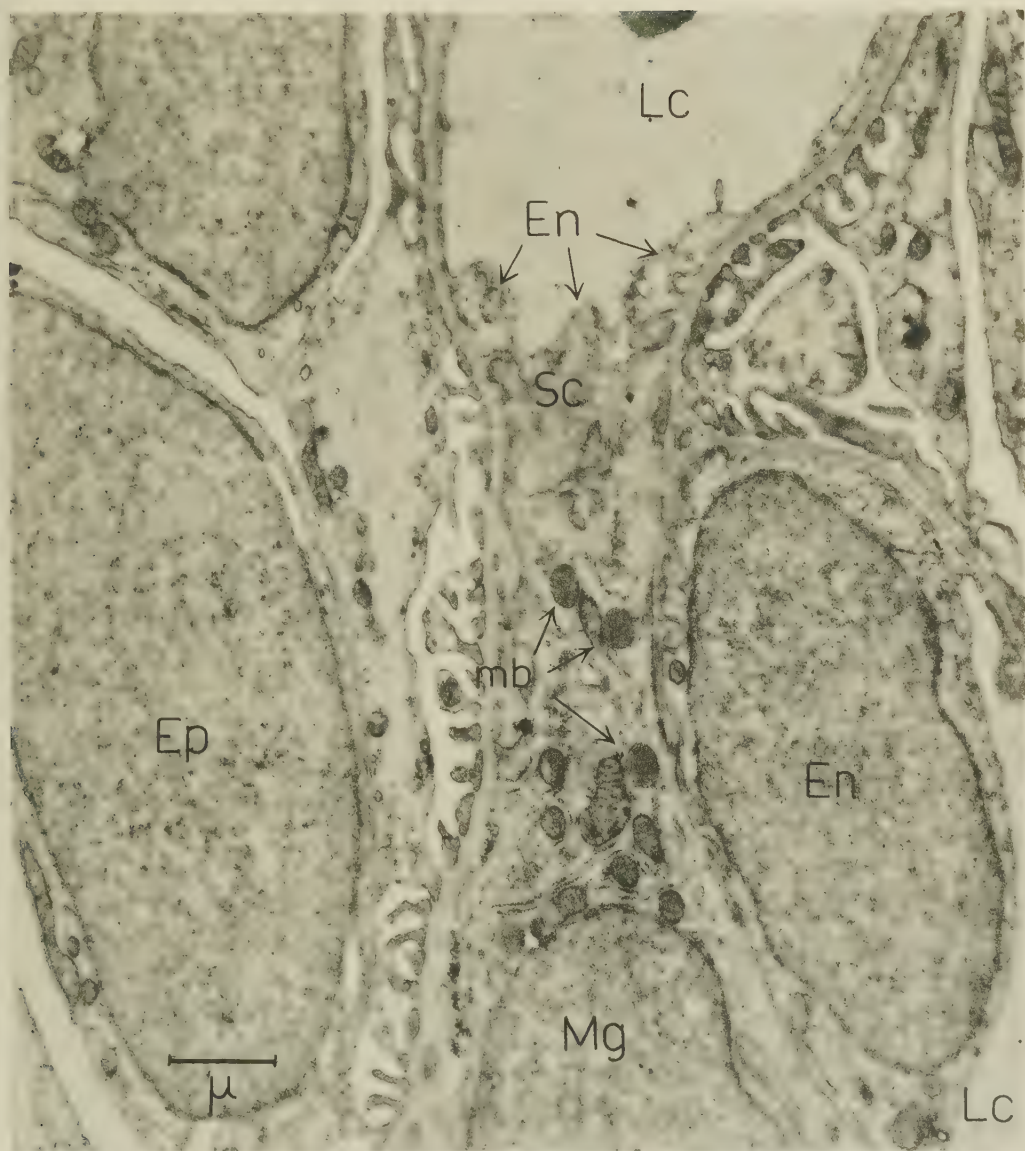


Fig. 1. — Regione glomerulare. (Lc): lume capillare; (Ep): epitelio; (En): endotelio; (Mg): cellula intercapillare; (Sc): sostanza cementante che si interpone tra endotelio e cellula intercapillare; (mb): « microbodies ».

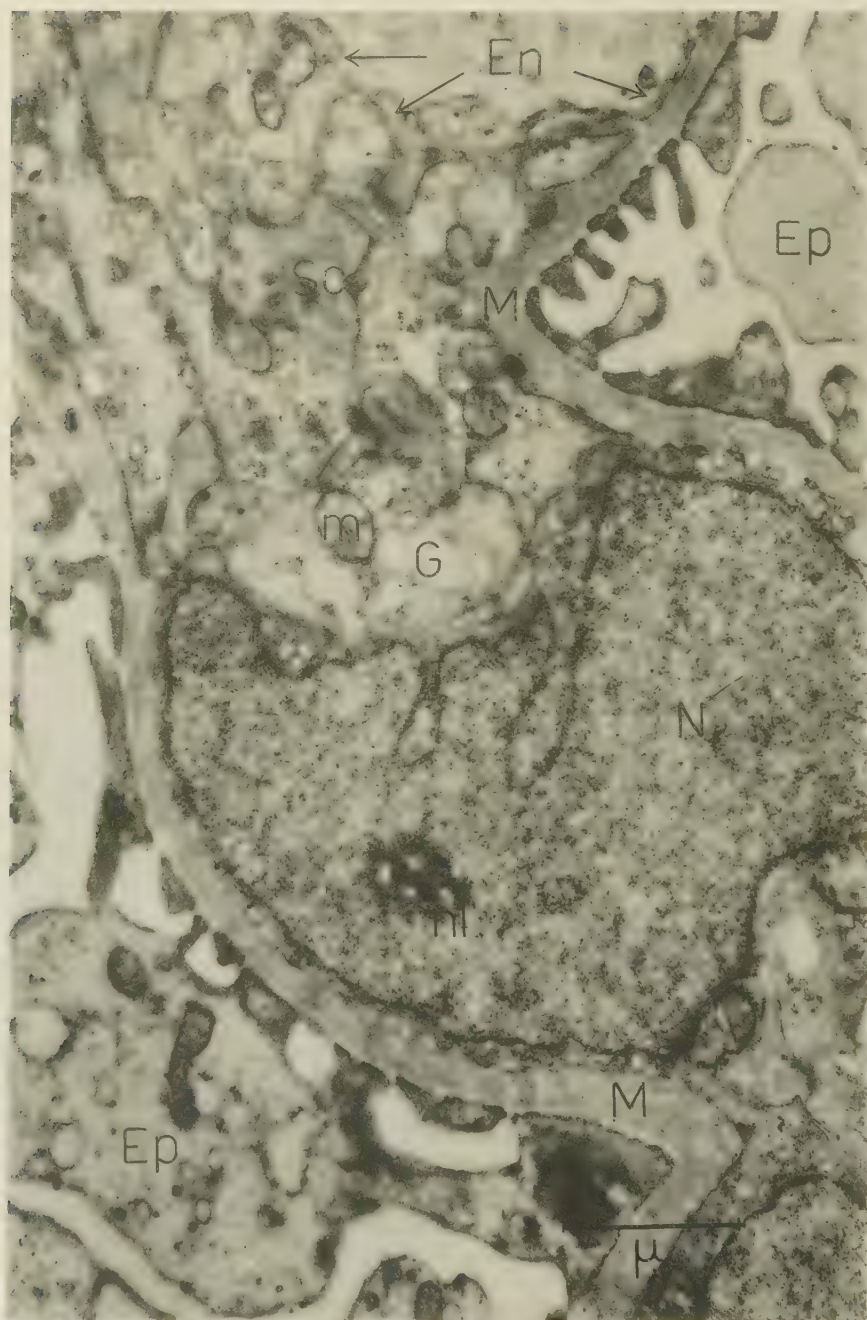


Fig. 2. — Regione glomerulare che comprende una cellula intercapillare. (N): nucleo della cellula intercapillare; (nl): nucleolo della stessa cellula; (G): apparato di Golgi; (m): mitocondri; (Sc): sostanza cementante interposta tra la cellula intercapillare e l'endotelio (En); membrana basale: (M); (Ep): epitelio munito di prolungamenti citoplasmatici.

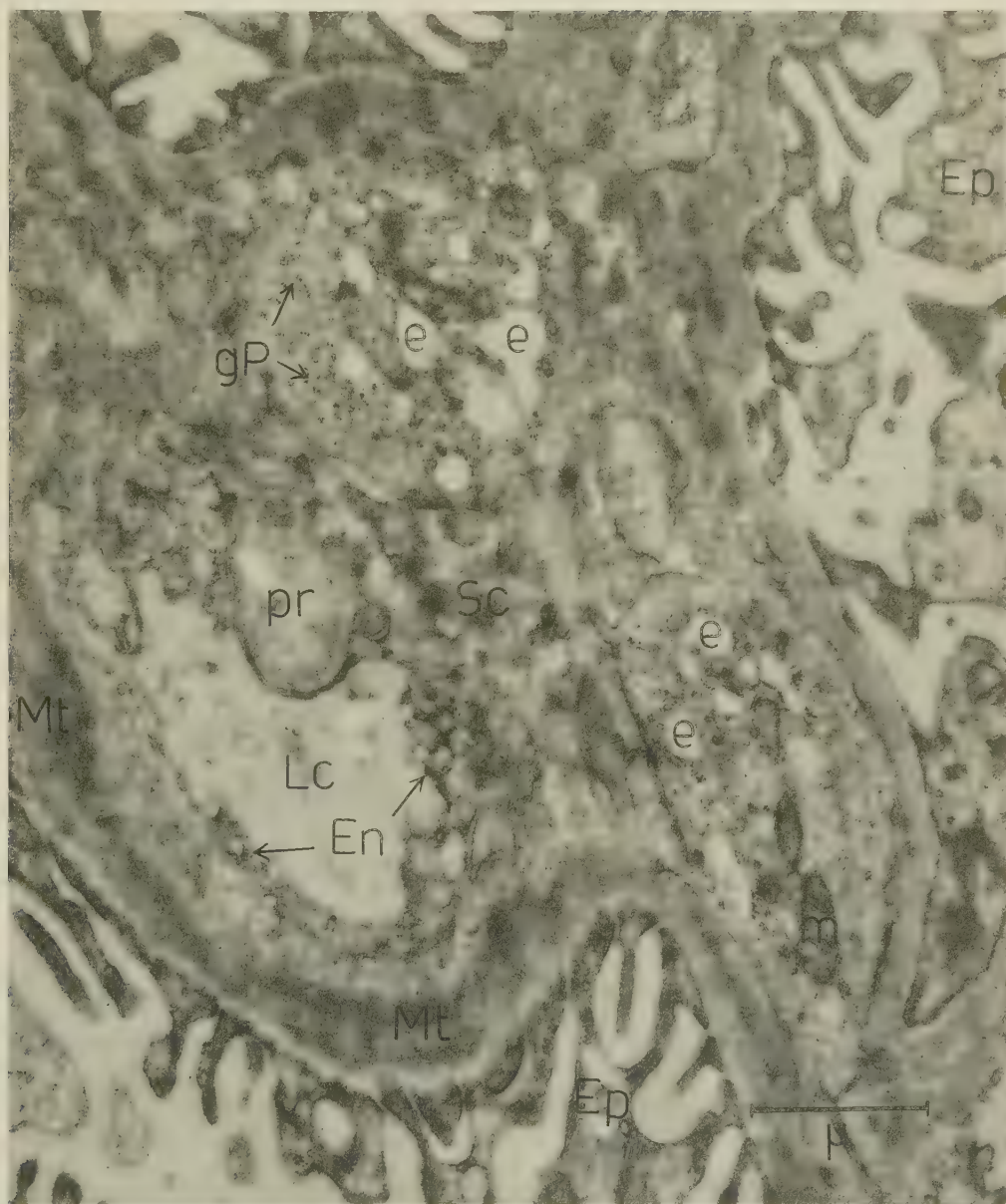


Fig. 3. — Regione intercapillare sezionata tangenzialmente. (Lc): lume capillare delimitato dal citoplasma dell'endotelio (En) la cui struttura traforata è visibile per la tangenza della sezione; (Pr): prolungamento del citoplasma della cellula intercapillare, che sospinge il rivestimento endoteliale; (Ep): epitelio; (gP): grani di Palade; (e): cisterne ergastoplasmatiche; (m): mitocondri; (Mt): membrana basale sezionata tangenzialmente; (Sc): sostanza cementante.

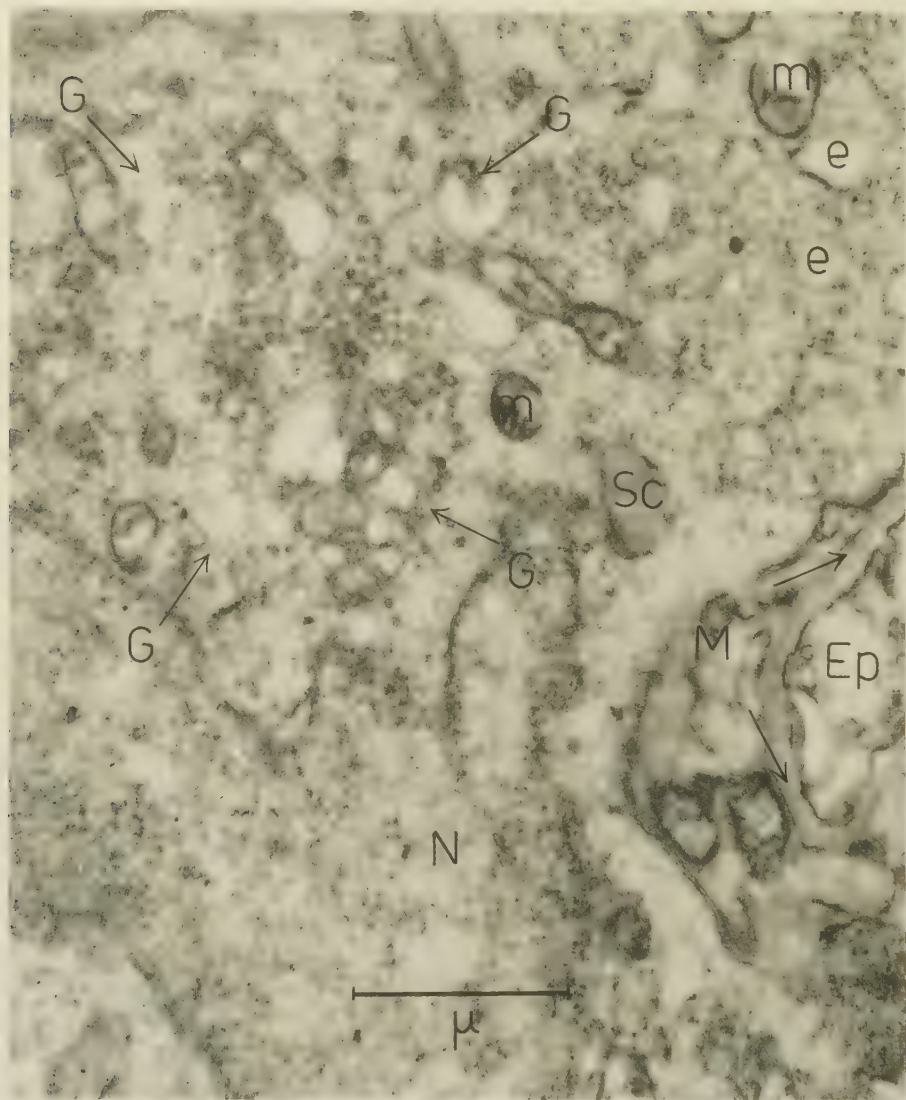


Fig. 4. — Regione di una cellula intercapillare. L'apparato di Golgi è delimitato dalle frecce (G); (Ep): epitelio; (N): nucleo della cellula intercapillare; (Sc): prolungamento della membrana basale.

L'ergastoplasma si estende in tutta la superficie citoplasmatica delle cellule intercapillari all'intorno dell'apparato di Golgi ed è formato da profili lacunari o da ampie cisterne delimitate da membrane sulla cui superficie esterna sono disposti regolarmente grani molto densi (ribonucleoproteine) (fig. 3). Questi ultimi sono anche uniformemente distribuiti in tutto il citoplasma costituendo dei piccoli ammassi o delle filiere. Lo sviluppo ora descritto dell'ergastoplasma nelle cellule intercapillari è differente da quello riconoscibile nelle cellule endoteliali ove l'ergastoplasma è rappresentato da corti profili lacunari e da scarsi grani ribonucleoproteici.

DISCUSSIONE.

L'applicazione della tecnica delle sezioni ultrasottili allo studio del glomerulo renale ha notevolmente accresciuto le nostre conoscenze soprattutto sulla struttura dell'apparato di filtrazione [11] [12] [10]; [15] [16], svelando tra l'altro la complessa morfologia del rivestimento epiteliale viscerale, della membrana basale e dell'endotelio. Meno convincenti sono stati, al contrario, i dati riguardanti le cellule intercapillari.

I nostri rilievi, in accordo con lo studio di Oberling e coll. [11], oltre a dimostrare una particolare topografia ed un peculiare rapporto delle cellule intercapillari con la membrana basale e con le propagini di questa in sede intercapillare, sottolineano la complessa ultrastruttura citoplasmatica di dette cellule. Lo sviluppo dell'apparato di Golgi e dell'ergastoplasma suggerisce che esse siano la sede di una attività cellulare complessa; in effetti l'apparato di Golgi è considerato la sede di trasformazioni elaborative, di secrezione e di deposito di prodotti cellulari [18] [9] [2] [3] [4] [5]. Anche l'ergastoplasma svolge una differenziata attività cellulare come può essere desunto dallo sviluppo che esso assume nelle cellule più evolute in senso funzionale quali quelle nervose, quelle ghiandolari esocrine ed endocrine [9] [14] [8] [13].

Nelle nostre osservazioni non abbiamo messo in evidenza nel citoplasma delle cellule intercapillari le strutture filamentose descritte da Yamada [19] sulla cui base questo autore considera questi elementi di tipo muscolare.

CONCLUSIONI.

Nel glomerulo renale del ratto, mediante la tecnica delle sezioni ultrasottili per la microscopia elettronica, è possibile mettere in evidenza un tipo di cellula a sede intercapillare distinguibile dall'epitelio e dall'endotelio. Queste cellule sono dotate di un apparato di Golgi di tipo vescicolare e vacuolare e d'ergastoplasma a struttura complessa. Lo sviluppo di questi due organuli cellulari nelle cellule intercapillari è un criterio per distinguerle dagli elementi endoteliali ed epiteliali e rappresenta, probabilmente l'indizio di una complessa attività elaborativa esercitata dalle cellule del mesangio.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BENEDETTI E. L. e SCAPELLATO L., «Monitore Zool. It.», 61, 143 (1953).
- [2] DALTON A. J. e FELIX M. D., «Am. J. Anat.», 94, 171 (1952).
- [3] DALTON A. J. e FELIX M. D., «Ann. New York Ac. Sc.», 63, 1117 (1956).
- [4] DALTON A. J. e FELIX M. D., «J. Biophys. Biochem. Cyt.», 2, 79 (1956).
- [5] FARQUHAR e WELLINGS J. A., «J. Biophys. Biochem. Cyt.», 3, 319 (1957).
- [6] FARQUHAR M., VERNIER R. e GOOD R., «J. Exp. med.», 106, 649 (1957).
- [7] FARQUHAR M., VERNIER R. e GOOD R., «Am. J. Path.», 33, 791 (1957).
- [8] HAGUENAU F., «Int. Rev. Cytology», 7 (1958).
- [9] HAGUENAU F. e BERNHARD W., «Arch. Anat. Microsc.», 27, 44 (1955).
- [10] HALL B. V., *Proc. 5th Conf. Nephrotic Syndrome*, J. Macy F. (1953).
- [11] OBERLING Ch., GAUTIER A. e BERNHARD W., «Presse Med.», 59, 938 (1951).
- [12] PAK POY R. K. e ROBERTSON J. S., «J. Biophys. Biochem. Cyt.», 3, 183 (1957).
- [13] PALADE G. E. e PORTER K. R., «J. Exp. Med.», 100, 641 (1954).
- [14] PALAY S. L. e PALADE G. E., «J. Biophys. Biochem. Cyt.», 1, 69 (1955).
- [15] PEASE D. C., «J. Histochem. Cytochem.», 3, 295 (1955).
- [16] POLICARD A., COLLET A. e GILTRAIRE-RALYTE L., «Bull. Microsc. Appl.», 5, 5 (1955).
- [17] ROUILLER Ch. e BERNHARD W., «J. Biophys. Biochem. Cyt.», 2, 355 (1956).
- [18] SJÖSTRAND F. S., «Int. Rev. Cytology», 5, 455, (1956).
- [19] YAMADA E., «J. Biophys. Biochem. Cyt.», 1, 551 (1955).
- [20] ZIMMERMANN K. W., «Z. mikr. anat. Forsch.», 18, 520 (1929).

Patologia. — *La struttura dell'alveolo polmonare indagata con una particolare tecnica che permette l'utilizzazione delle sezioni ultrasottili anche per l'osservazione al microscopio ottico.* Nota di VITTORIO MARINOZZI, presentata (*) dal Corrisp. G. BOMPIANI.

Le sezioni ultrasottili hanno trovato utile impiego nella microscopia ottica soltanto per l'osservazione in contrasto di fase; tutti i tentativi di colorazione intrapresi finora si sono dimostrati inadeguati in quanto non realizzano l'intensità di contrasto necessaria per ottenere una immagine ottica ben definita dell'oggetto in esame (cfr. Stoeckenius, 1957).

In una serie di lavori recenti Jones ha perfezionato una tecnica di impregnazione argentea dei tessuti, basata sulla proprietà dei gruppi aldeidici (liberati per ossidazione dei legami 1-2 glicol, con acido periodico) di ridurre una soluzione ammoniacale di argento. Essa si è rivelata particolarmente adatta per la colorazione delle membrane basali dei glomeruli renali ed è stata utilizzata dallo stesso Jones (1951, 1953 e 1957) e, successivamente, da Bohle e Krecke (1955) e da Bignami (1958) per lo studio delle lesioni glomerulari in varie nefropatie. Tutti gli Autori summenzionati affermano la necessità di usare sezioni molto sottili per avere immagini risolubili al

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

microscopio. Dopo aver fatto personale esperienza di questa necessità abbiamo tentato di riprodurre la colorazione in questione su sezioni ultrasottili di frammenti di rene inclusi in metacrilato. Il buon esito del tentativo ci ha incoraggiato a tentarne l'impiego per lo studio dei setti alveolari del polmone, per il quale l'esigenza di usare sezioni molto sottili ci era parsa ancor più evidente in rapporto alla maggiore complessità di struttura.

MATERIALE E METODO.

Piccoli frammenti di *polmone di ratto*, prelevati immediatamente dopo il sacrificio degli animali mediante colpo alla nuca, sono stati fissati, in parte, in formalina neutra al 10 % (in vuoto) ed, in parte, in acido osmico al 2 %, tamponato a pH 7,2 secondo Palade. Dopo inclusione in metil-butilmetacrilato 1:20, da ciascun frammento sono state eseguite sezioni dello spessore di 1000-2000 Å, con microtomo Porter-Blum, che, raccolte su vetrini copri-oggetto e liberate del metacrilato mediante passaggio in etere o in xilolo, sono state sottoposte ad impregnazione argentea con il seguente metodo derivato da quello di Jones:

1° passaggio in *acido periodico* al 0,5 % per 10 minuti;

2° dopo accurato lavaggio in acqua bidistillata, le sezioni vengono trattate per 8-10 ore, in termostato a 37°C. con la soluzione argentea, preparata (al momento dell'uso) come segue:

Nitrato d'argento al 0,25 % cc. 10

Urotropina gr. 0,3

Dopo completa dissoluzione dell'urotropina si aggiungono:

Borace in soluzione acquosa al 5 % cc. 0,8

Acqua bidistillata: fino al volume di cc. 30.

3° dopo accurato lavaggio in acqua bidistillata si trattano le sezioni con *cloruro di oro* al 0,2 % per 2-3 minuti.

4° fissaggio in *iposolfito di sodio* al 0,5 % per 2-3 minuti.

5° lavaggio in acqua distillata, disidratazione e montaggio in balsamo.

Con lo stesso metodo abbiamo allestito preparati di *polmone da stasi, da frammenti di provenienza autoptica*.

RISULTATI.

A) *Polmone normale di ratto.*

I setti alveolari risultano delimitati, su ambedue i versanti, da un'esile membrana la cui argirofilia appare bene evidente soltanto nei preparati provenienti da frammenti fissati in formalina, mentre in quelli pertinenti a frammenti fissati in acido osmico assume un colore bruno scuro (figg. 1 e 2). Lo spazio interposto fra le dette membrane è occupato, in massima parte, dai capillari sanguigni, delimitati anch'essi da una sottile membrana basale che, al pari delle precedenti, rivela una intensa argirofilia soltanto dopo fissazione in formalina. Nei tratti in cui i capillari fanno salienza sulla parete degli alveoli, la membrana basale endoteliate sembra fusa con una o con entrambe quelle superficiali a seconda che il capillare occupi solo una parte o tutto lo spessore del setto. Il residuo spazio - che si potrebbe definire interstiziale o intercapillare - è occupato principalmente da fibre connettivali (figg. 2 a e 2 b). (Non è possibile accertare se esse appartengano al tipo delle

fibre collagene o delle fibre reticolari in quanto che, con la metodica impiegata, tanto le prime che le seconde risultano argentofile).

Le fibre elastiche sono scarsissime in corrispondenza dei setti alveolari, alcuni dei quali, anzi, ne sembrano completamente sprovvisti. Esse sono difficilmente riconoscibili nei preparati allestiti dai frammenti fissati in formalina, ma assumono una spiccata evidenza dopo fissazione in acido osmico in virtù della loro intensa argirofilia risultante, con ogni verosimiglianza, dall'ossidazione della sostanza cementante da parte dell'acido osmico⁽¹⁾. A metterle maggiormente in risalto concorre il fatto che la fissazione in acido osmico riduce l'argirofilia delle membrane basali e del connettivo (figg. 1 *a* e 1 *b*). Solo eccezionalmente è dato rilevare la presenza, negli spazi intercapillari dei setti, di piccole cellule, rotonde od ovoidali, che per la loro posizione si potrebbero designare come *cellule settali* (fig. 1 *c*). Esse si riscontrano più frequentemente a livello dei dotti alveolari ed in corrispondenza del cosiddetto « piede d'impianto » degli alveoli sui dotti medesimi. Quivi sono più abbondanti anche le fibre connettivali e quelle elastiche (fig. 1 *b*).

Sulla superficie degli alveoli si rinvengono due tipi di cellule nettamente distinte tra loro, non soltanto per i caratteri citologici, ma anche per la diversa natura dei loro rapporti con le rimanenti strutture del setto.

Un primo tipo è rappresentato da cellule, molto rare a identificarsi, che sembrano assolvere principalmente ad una funzione di rivestimento. Il loro nucleo fa salienza verso la cavità alveolare; il citoplasma forma un sottile mantello perinucleare e si espande sulla parete, adagiandosi sulla membrana basale superficiale (figg. 1 *a* e 2 *c*). Una caratteristica saliente di queste cellule è rappresentata dalla presenza di fini granuli argentofili intracitoplasmatici (visibili solamente dopo fissazione in formalina) che ne sottolineano la somiglianza con l'epitelio dei dotti alveolari (fig. 2 *f*). I detti granuli sono più appariscenti nelle aree atelectasiche (riconoscibili fra l'altro per l'aspetto finemente pieghettato delle membrane superficiali) in conseguenza dell'aumento di spessore del citoplasma (figg. 2 *d* e 2 *e*). Nelle stesse aree le cellule in questione sembrano rivestire in maniera continua la parete alveolare; ove gli alveoli siano distesi, invece, le pareti appaiono quasi completamente nude. Da ciò si potrebbe arguire che il rivestimento cellulare dell'alveolo sia discontinuo ovvero che, per effetto della distensione delle pareti, il citoplasma si riduca talmente di spessore da non essere più visibile al microscopio ottico.

Le cellule del secondo tipo, alquanto voluminose e di forma rotondeggiante od ovoidale, si caratterizzano soprattutto per l'aspetto vacuolato del citoplasma, non dissimile da quello delle cellule libere endoalveolari. Al pari di queste ultime esse presentano rari granuli citoplasmatici che, a differenza di quelli delle cellule precedentemente descritte, sono meglio evidenti dopo fissazione con acido osmico (figg. 1 *a* e 1 *b*). Di solito esse aderiscono alle

(1) Questa proprietà delle fibre elastiche è stata controllata su materiale adeguatamente scelto ed, in particolare, su frammenti di aorta. Non ci risulta che essa sia mai stata segnalata prima d'ora.

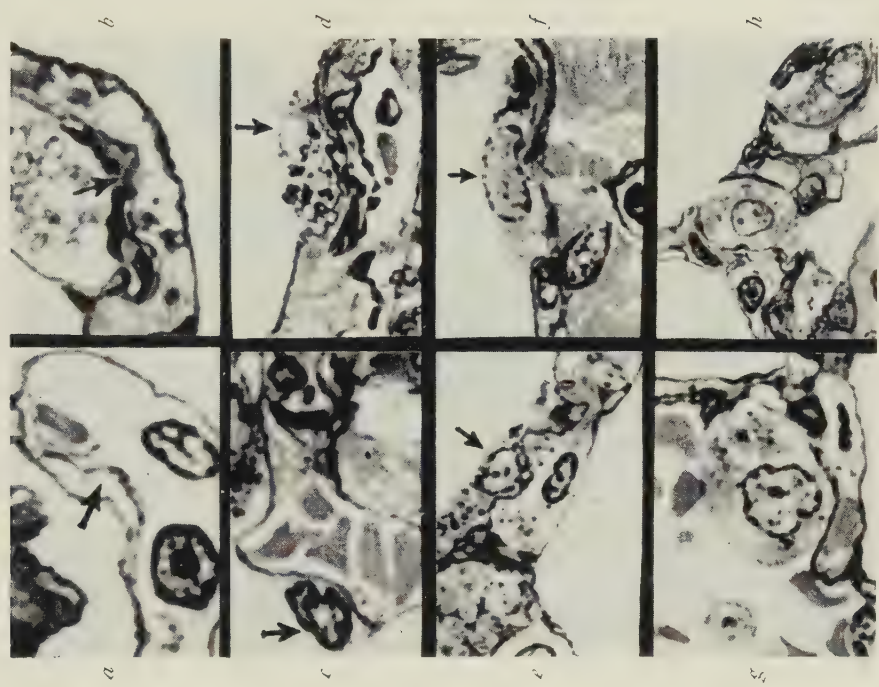


Fig. 2. - Fissazione in formalina.

a) Particolare di un setto alveolare; la freccia indica lo spazio interstiziale. (Ingr. 2050×).
b) Fibre connettivali nello spazio intercapillare (indicate dalla freccia); esse sono a diretto contatto con una cellula a citoplasma vacuolato, della quale è visibile il solo citoplasma. (Ingr. 2050×). c) Cellula di rivestimento (indicata dalla freccia). (Ingr. 1785×). d) ed e) Cellula di rivestimento in un alveolo atelectasico. (Ingr. 1450). f) Cellula di rivestimento del vertice di un alveolo. Si noti la fine denellatura del margine libero. (Ingr. 1790×). g) Due cellule a citoplasma vacuolato situate in corrispondenza del vertice di due alveoli contigui (vedi anche nel testo). (Ingr. 1025×).

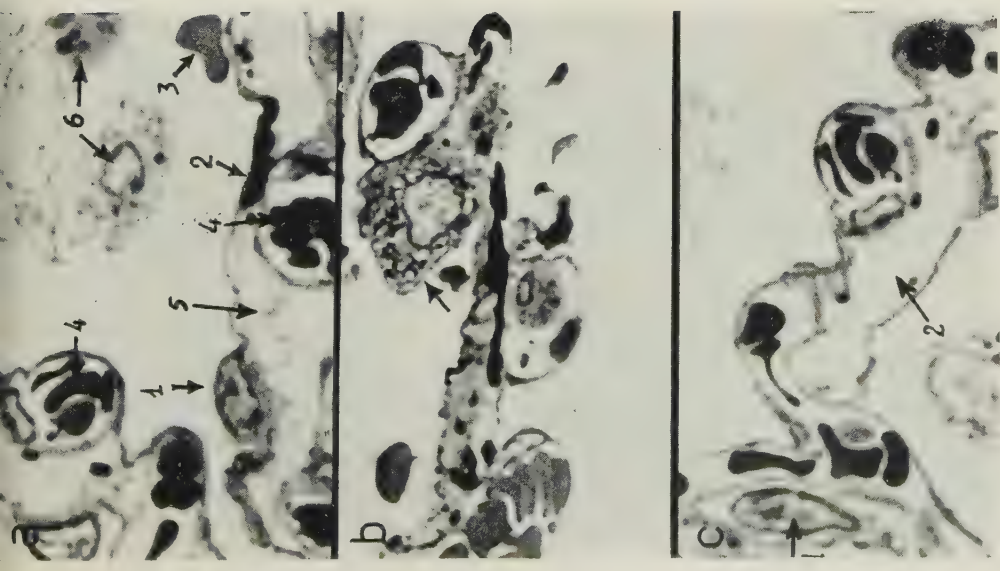


Fig. 1. - Fissazione in acido osmico.

a) 1 - cellula di rivestimento; 2 - fibre elastiche; 3 - globulo rosso; 4 - capillari; 5 - Spazio interstiziale (o intercapillare).
Nel lume dell'alveolo sono presenti anche due macrofagi (6). (Ingr. 1935×).
b) Parete di un dotto alveolare. La freccia indica una cellula a citoplasma vacuolato. Bene evidenti le fibre elastiche per l'intensa argirofilia. (Ingr. 1100×).
c) 1 - cellula interstiziale (o settole propriamente detta); 2 - spazio interstiziale (o intercapillare). (Ingr. 1035×).



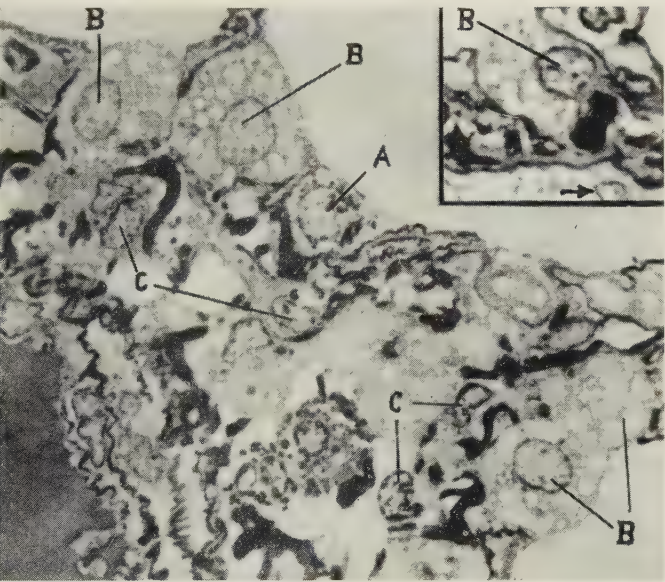


Fig. 3. - Fissazione in formalina.

Cellule a citoplasma vacuolato (B) in corrispondenza dei punti di connessione di alcuni setti alveolari con il connettivo perivascolare. Dalla figura risulta bene evidente come le dette cellule siano in diretto rapporto con le fibre connettivali e con le cellule interstiziali (C), senza interposizione della membrana basale. A = cellula di rivestimento. (Ingr. 1370 \times).

Nel quadratino in alto, a destra, una cellula a citoplasma vacuolato in rapporto con il connettivo sottopleurico. La freccia indica il nucleo di una cellula di rivestimento della pleura. (Ingr. 1200 \times).



Fig. 5. - Polmone da stasi
Edema dello spazio inter-
capillare.

Le frecce indicano due cellule inter-
stiziali. (Ingr. 1400 \times).

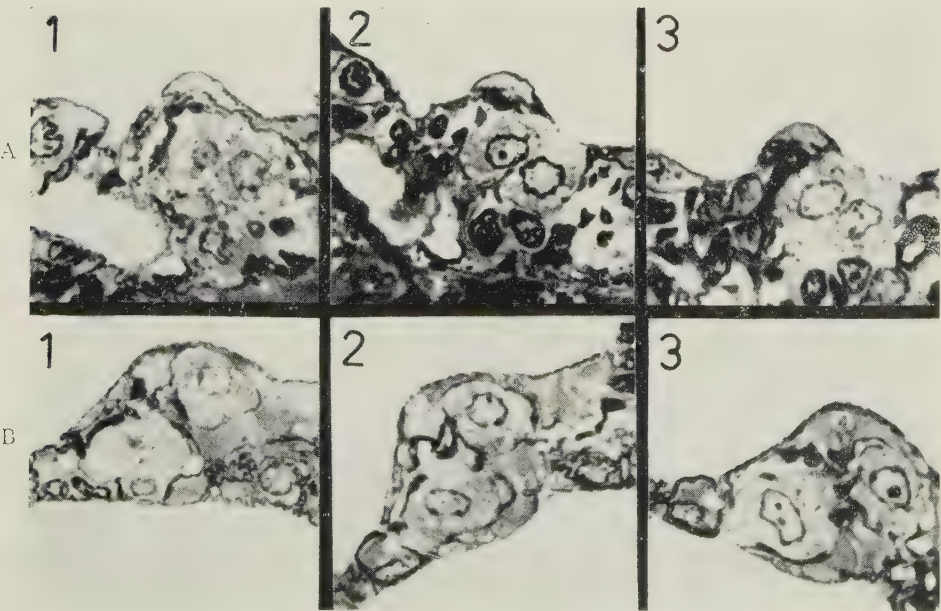


Fig. 4. - Fissazione in formalina.

Per la descrizione vedi il testo. (Ingr. 1025 \times).



pareti alveolari soltanto per un tratto limitato della superficie, mentre il corpo cellulare vero e proprio sembra proiettarsi entro il lume (fig. 1 b). La parte libera del citoplasma mostra, non di rado, un aspetto finemente dentellato, come per la presenza di sottili prolungamenti citoplasmatici (o microvilli) (fig. 2 g).

Le cellule di questo secondo tipo sono più numerose delle precedenti ed hanno sede principalmente nei punti nodali degli alveoli (fig. 2 g) e specialmente in corrispondenza dei punti di connessione dei setti alveolari con il connettivo peribronchiale, perivascolare e sottopleurico (fig. 3). Profondamente esse sono in diretta connessione con le strutture connettivali dello spazio interstiziale, attraverso soluzioni di continuo della membrana basale superficiale. L'esiguità dello spazio interstiziale in corrispondenza dei setti, può ingenerare dei dubbi in proposito, anche quando si esaminino sezioni seriate; la dimostrazione riesce sempre sicura, però, a livello dei dotti alveolari e degli alveoli adiacenti a formazioni vascolari o bronchiali e in quelli sottopleurici (fig. 3) nelle sedi, cioè, in cui è più abbondante l'interstizio. Attraverso lo studio di sezioni seriate abbiamo potuto accertare che le cellule a citoplasma vacuolato, ancorché in alcune sezioni sembrino in posizione interstiziale (nel senso di apparire come situate nello spazio intercapillare) affiorano sempre liberamente nella cavità alveolare, attraverso una soluzione di continuo della membrana basale superficiale, come indicano chiaramente le figg. 4 A e 4 B.

L'esame di sezioni seriate ci ha consentito di precisare, infine, che immagini come quelle illustrate dalla fig. 2 h, nella quale due cellule a citoplasma vacuolato sembrano indovate entro nicchie situate nella compagine di un setto, derivano da particolari modalità di incidenza della sezione in rapporto al vertice degli alveoli (che si deve immaginare situato in un piano immediatamente soprastante o sottostante a quello della sezione).

B) *Polmone da stasi.*

I setti alveolari appaiono sprovvisti di un qualsiasi rivestimento superficiale (reperto, questo, che va messo in rapporto con alterazioni autolitiche post-mortali). La principale modificazione strutturale consiste nell'abnorme dilatazione degli spazi intercapillari, provocata dall'edema e che si accompagna al distacco pressoché completo della membrana basale superficiale da quella dei capillari (fig. 5).

CONCLUSIONI.

L'impregnazione argentina secondo Jones realizza un ottimo metodo di colorazione delle sezioni ultrasottili per l'osservazione al microscopio ottico.

L'applicazione del metodo allo studio della struttura degli alveoli polmonari ci ha consentito di confermare l'opinione di Bargmann (1951) circa l'esistenza, sulla parete alveolare, di *due tipi di cellule* caratterizzate dall'aspetto granuloso e, rispettivamente, vacuolato del citoplasma. La natura epiteliale

delle prime è accreditata dalla loro somiglianza con le cellule di rivestimento dei dotti alveolari; la natura mesenchimale delle cellule a citoplasma vacuolato trova ulteriore motivo di conferma nella sicura dimostrazione del rapporto di continuità delle dette cellule con le strutture connettivali dello spazio interstiziale. Non è improbabile che alla differenza morfologica delle cellule alveolari faccia riscontro un differente comportamento nei confronti della capacità granulopessica.

I nostri reperti confermano anche l'esistenza, nei setti alveolari, di *due sistemi di membrane basali* (già rilevata, al microscopio ottico, da Bertalanffy, Glegg ed Edinger, 1954), una *endoteliale* (pertinente ai capillari) ed una *epiteliale* (delimitante il setto nei confronti della cavità alveolare).

Le alterazioni che subiscono i setti alveolari in conseguenza della stasi dimostrano l'indipendenza di queste due strutture, così intimamente connesse, in condizioni normali, da apparire come una struttura unica nei tratti in cui i capillari affiorano sulle pareti alveolari.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BARGMANN W., *Histologie und Mikroskopische Anatomie des Menschen*, Band II. G. Thieme Ed. Stuttgart, 1951.
- [2] BERTALANFFY F. D., GLEGG R. E. ed EDINGER D., «Canad. Med. Ass. J.», 70, 196 (1954).
- [3] BIGNAMI A., *Minerva nefrologica* (lavoro in corso di stampa).
- [4] BOHLE A. e KRECKE H., «Virchow's Arch.», 327, 663, (1955).
- [5] JONES B. D., «Am. J. Path.», 27, 991 (1951).
- [6] Id., id., 29, 33 (1953).
- [7] Id., id., 33, 313 (1957).
- [8] STOECKENIUS W., «Zschr. für Wissenschaftliche Mikrosk. und Mikrosk. Technik», 63, 210 (1957).

Anatomia. — *Connessioni estrasinaptiche dei granuli del cervelletto in mammiferi* (*). Nota di LUIGI CATTANEO, presentata (**) dal Socio A. PENSA.

Il cervelletto di giovani cavie e di gattini trattato con il metodo della reazione cromo-argentica di Golgi mi è stato particolarmente utile per alcuni rilievi riguardanti i granuli, il loro neurite e le loro connessioni che qui riassumo, riservandomi di esporre le notizie bibliografiche in una Memoria più estesa.

Sostanzialmente posso confermare quanto nel 1931 ha sostenuto il Pensa ⁽¹⁾ che cioè sono in atto con tali cellule sinapsi neuro-dendritiche fra

(*) Lavoro eseguito nel Centro di studio dell'Anatomia del Sistema Nervoso della Università di Pavia (Direttore prof. A. Pensa).

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) A. PENSA, *Osservazioni e considerazioni sulla struttura della corteccia cerebellare dei mammiferi*, «Memoria R. Accad. Naz. Lincei», serie VI, vol. 5, 25-50 (1931).

i ciuffi terminali dei loro dendriti e le fibrille dei glomeruli cerebellari di Held formati principalmente dalle fibre muscose e sinapsi neuro-somatiche fra i loro pirenofori e le fitte maglie della rete nella quale sono inclusi; inoltre che i granuli, mediante i loro neuriti, stabiliscono anche connessioni estrasinaptiche. I neuriti di queste cellule infatti, decorrendo come cilindrassi nudi entro la rete nervosa diffusa dello strato dei granuli e nel feltro nervoso dello strato molecolare, si comportano in modo del tutto simile alle fibrille nervose di una comune rete nervosa diffusa, contraendo intimi rapporti sia fra loro che con le fibre di altra provenienza, sì da fare escludere che possano singolarmente avere la proprietà della conduzione isolata.

Come è noto, i neuriti dei granuli sono in numero enorme; essi col loro tratto ascendente, che fa subito seguito all'origine, formano un sistema fittissimo di fibre che attraversa lo strato dei granuli con decorso prevalentemente rettilineo. Nel loro cammino, tali neuriti emettono solo molto raramente delle collaterali che, quando esistono, tendono a disporsi parallelamente alla fibra che le ha generate ed a procedere nella direzione di questa. Comunque tali neuriti contribuiscono intimamente alla formazione della rete dello strato granulare, completandola.

Giunti nello strato molecolare, i neuriti dei granuli si fanno leggermente più grandi, possono più facilmente emettere brevi espansioni e mostrano una spiccata tendenza a riunirsi in gruppi, aggrovigliandosi, caratteristiche queste che vengono poi mantenute dalle fibre parallele originatesi dalla loro divisione a T. Nello strato molecolare si viene così ad avere uno strato fittissimo di fibre formato dalle fibre parallele che decorrono riunite in piccoli fascetti nei quali sono connesse fra loro per intimi rapporti di contiguità.

L'attenta osservazione, a forte ingrandimento, dei preparati colorati con la reazione nera di Golgi dimostra che il calibro delle fibre parallele non è per tutte eguale; alcune di esse sono estremamente fini. Orbene, sono queste ultime che, riunendosi in piccoli fascetti plessiformi, contraggono fra loro i rapporti più intimi; sono pertanto queste che conferiscono i requisiti di una rete nervosa diffusa al plesso nervoso dello strato molecolare.

Non vanno dimenticate, come costituenti del feltro nervoso dello strato molecolare: le fibre che decorrono perpendicolarmente alle fibre parallele, avendo di queste gli stessi caratteri, sono quei neuriti dei granuli che camminano per un certo tratto nello strato prima di continuarsi nelle fibre parallele. Non vanno inoltre dimenticati i neuriti e le collaterali dei neuriti delle cellule stellate, le collaterali delle fibre rampicanti e di qualche fibra muscosa; infatti come nello strato dei granuli non possono essere trascurati ai fini funzionali gli intimi rapporti fra neuriti dei granuli e rete nervosa, così anche nello strato molecolare non possono essere trascurati i rapporti delle fibre parallele con le fibre di altra origine che compenetrano il feltro nervoso di questo strato, quali appunto collaterali dei neuriti delle cellule stellate, collaterali dei plessi rampicanti ed anche delle fibre muscose.

Concludendo, dalle mie ricerche risulta che il principio di connessioni intime ed estese da consentire sinergia funzionale è applicabile in larga

misura per i granuli del cervelletto fittamente ammassati nello strato profondo della corteccia cerebellare.

Esistono poi stretti rapporti di contiguità fra i neuriti dei granuli e le fibre parallele da una parte e le fibre muscose e rampicanti dall'altra. Come infatti si è detto, i neuriti dei granuli, nel risalire verso lo strato molecolare sono compresi nelle maglie della rete nervosa dello strato dei granuli ed anzi partecipano alla sua formazione; ma in questa rete, come ha dimostrato il Pensa nella sua Memoria del 1931, sono accolte anche le fibrille che partono dalle rosette che le fibre muscose formano nei glomeruli cerebellari di Held, di conseguenza esse contraggono intimi rapporti con quei neuriti. Infine, le fibrille ultraterminali dei plessi rampicanti, già dimostrate dal Pensa, espandendosi nel feltro nervoso dello strato molecolare, stabiliscono le connessioni fra le fibre rampicanti e le fibre parallele.

Biologia. — *Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in Uccelli a prole inetta e precoce.* Nota II ^(*) di GIORGIO M. BAFFONI e GIULIANA D'ANCONA, presentata ^(**) dal Socio G. COTRONEI.

In una precedente Nota ⁽¹⁾ sono stati riferiti i risultati sulla morfogenesi cerebellare di Uccelli; queste ricerche, intraprese per estendere le osservazioni compiute da uno di noi ⁽²⁾ su Mammiferi, sono state concepite con l'intento di considerare lo sviluppo del cervelletto in un Uccello a prole precoce (Pollo) ed uno a prole inetta (Piccione) al fine di precisare le eventuali differenze alla luce di un criterio morfo-ecologico.

È stato riferito che la fusione delle labbra romboidali (formazione dell'abbozzo dorsale impari del cervelletto) sia nel Pollo che nel Piccione avviene contemporaneamente (9°-10° giorno d'incubazione), ma la morfogenesi procede più velocemente nel primo che nel secondo (a prole inetta). Le maggiori differenze di sviluppo sono state osservate alla nascita dei due animali (18° giorno d'incubazione nel Piccione e 21° nel Pollo); quindi esse diminuiscono, anzi, quando nell'animale a prole inetta inizia l'attività locomotoria (Piccione di 20 giorni dalla nascita), il cervelletto raggiunge uno sviluppo volumetrico e una complessità maggiore che nell'animale a prole precoce.

(*) Ricerca compiuta nell'Istituto di Anatomia comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) G. M. BAFFONI e G. D'ANCONA, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser. VIII), 24, p. 456 (1958).

(2) G. M. BAFFONI, «Rend. Acc. Naz. Lincei» (ser. VIII), 16, p. 798; 17, p. 70 e p. 269 (1954); 18, p. 662 (1955); «La Ric. Sci.», 24, p. 1641 (1954); «Arch. Zool. Ital.», 41, p. 1 (1956).

Nella presente Nota riferiremo sommariamente i risultati sulla istogenesi dei neuroni cerebellari durante lo sviluppo dell'Uccello a prole inetta (Piccione) ed a prole precoce (Pollo). Rimandiamo al lavoro per esteso la parte bibliografica ed alla precedente Nota ⁽¹⁾ le indicazioni delle tecniche impiegate.

È noto che le labbra romboidali sono costituite da due strati di cellule i quali sono le matrici dei neuroni cerebellari: uno strato di cellule tappezza la superficie ventricolare ed è la continuazione dell'epitelio germinativo del tubo neurale (epitelio ventricolare), l'altro invece delimita esternamente le labbra romboidali e si continua con il grigio mantellare di regioni più caudali del romboencefalo (epitelio extraventricolare).

Prima che le labbra romboidali si congiungano dorsalmente, dall'epitelio ventricolare migrano verso l'esterno elementi, alcuni dei quali restano in prossimità dell'epitelio, altri invece si affollano a ridosso dell'epitelio extraventricolare. Le più precoci modificazioni differenziative, sono state riscontrate tra le cellule prossime all'epitelio ventricolare: al 7° giorno d'incubazione, infatti, esse presentano un nucleo più voluminoso ed in esso le strutture Feulgen-positive divengono più abbondanti sulla faccia interna della membrana nucleare ed attorno al nucleolo ribonucleico; successivamente queste cellule assumono l'aspetto bipolare (9° giorno d'incubazione nel Pollo e 10° nel Piccione), nei prolungamenti appaiono le prime neurofibrille e nel nucleo due (talora tre) nucleoli intensamente basofili; all'aumento volumetrico del pirenoforo si accompagna accumulo di sostanza cromidiale (comparsa della sostanza basofila), in un primo tempo come un sottile rivestimento perinucleare, poi in ammassi accollati alla periferia del citoplasma, quindi in tutto il pirenoforo ed infine in un'organizzazione a zolle; al 14° giorno d'incubazione nel Pollo ed al 18° (nascita) nel Piccione, gli elementi descritti hanno raggiunto l'aspetto tipico dei neuroni dei nuclei cerebellari.

Gli elementi dello strato ventricolare migrati più esternamente (sottostanti all'epitelio extraventricolare), in parte si differenziano in neuroni di Purkinje, alcuni si differenziano in cellule di Golgi (« polimorfe » sec. Pensa ⁽³⁾) ed altri restano indifferenziati conservando il proprio aspetto fino al termine della morfogenesi cerebellare, prevalentemente localizzati nella porzione più esterna dello strato granulare. I neuroblasti di Purkinje presentano i primi aspetti del differenziamento subito dopo la fusione delle labbra romboidali: al 10° giorno d'incubazione nel Pollo ed al 12° nel Piccione infatti si osservano sotto allo strato extraventricolare elementi dell'epitelio ventricolare con nucleo ipertrofico e cromatina concentrata sulle interfaccie nucleari (membrana nucleare e nucleolo ribonucleico); poco dopo questi elementi assumono l'aspetto bipolare e presentano un notevole accrescimento volumetrico del pirenoforo, che si accompagna ad un transitorio aumento numerico dei nucleoli ribonucleici ed alla formazione della

(3) A. PENSA, « Mem. R. Acc. Naz. Lincei » (ser. VI), 5, p. 23 (1931).

sostanza basofila; nel frattempo le cellule passano da una condizione pluristratificata ad un allineamento monostratificato (14° giorno d'incubazione nel Pollo e 18° nel Piccione), quindi l'arborizzazione dendritica si orienta sul piano sagittale (16° giorno d'incubazione nel Pollo, 5° giorno dopo la nascita nel Piccione) e si espande; dopo che il nucleolo è tornato singolo, il citoplasma perde l'aspetto diffusamente basofilo e nel contempo si formano le zolle basofile. L'aspetto caratteristico delle cellule di Purkinje, quale si conserverà nell'adulto, viene raggiunto nel Pollo alla nascita (21° giorno d'incubazione) e nel Piccione a 20 giorni dalla nascita, in coincidenza con l'acquisizione dell'abilità locomotoria dei due animali. Nel Pollo al 18° giorno d'incubazione e nel Piccione a 15 giorni dopo la nascita compaiono le prime cellule di Purkinje basofile (ipercromofile). Tra le cellule di Purkinje in differenzamento se ne osservano sempre alcune a stadî più arretrati del differenzamento. Le modificazioni evolutive delle cellule polimorfe (cellule di Golgi) nello strato granulare iniziano alla stessa epoca delle cellule di Purkinje, presentano gli stessi caratteri e seguono pressappoco lo stesso ritmo.

Dall'epitelio extraventricolare delle labbra romboidali, si differenziano le cellule dei granuli, le cellule dei canestri e le cellule stellate dello strato molecolare. Gli elementi più profondi dell'epitelio extraventricolare si modificano in stadî relativamente precoci della morfogenesi: il loro nucleo infatti diviene meno voluminoso, allungato perpendicolarmente alla superficie cerebellare e le strutture Feulgen-positive si concentrano sulla faccia interna della membrana nucleare divenendo più rade nel succo nucleare; dal pirenoforo originano due sottili prolungamenti che si sviluppano tangenzialmente alla superficie cerebellare sul piano trasversale, ed un prolungamento che si dirige in profondità, oltrepassa lo strato dei neuroblasti di Purkinje e raggiunge lo strato granulare; entro questo prolungamento si sposta il pirenoforo che, raggiuntane l'estremità, emette delicati prolungamenti dendritici.

La migrazione dei pirenofori delle cellule dei granuli inizia presto (10° giorno d'incubazione nel Pollo e 12° nel Piccione), ma non è simultanea: presenta la massima imponentza nel Pollo al 14° giorno d'incubazione e nel Piccione a 5 giorni dopo la nascita e persiste nel cervelletto di Pollo al 16° giorno d'incubazione e nel Piccione a 10 giorni dopo la nascita; praticamente è terminata nel Pollo al 18° giorno d'incubazione e nel Piccione di 15 giorni dalla nascita (33° giorno di sviluppo).

Anche i neuroni dello strato molecolare originano dall'epitelio extraventricolare e si distinguono precocemente dai neuroblasti dei granuli per il maggior volume, per l'assenza di modificazioni di forma del loro nucleo, e per l'orientamento del loro pirenoforo (parallelo, invece che perpendicolare, alla superficie cerebellare); in mancanza di apprezzabili modificazioni di volume del nucleo, le prime manifestazioni visibili del differenzamento di questi neuroblasti consistono nel rimaneggiamento delle strutture Feulgen-positive, le quali si rarefanno nel succo nucleare concentrandosi in parte sulla faccia interna della membrana nucleare ed in parte attorno al nucleolo ribonucleico

(11° giorno d'incubazione nel Pollo, 12° nel Piccione); questi nel frattempo diviene molto basofilo; nucleo e pirenoforo aumentano di volume, il neuroblasta assume l'aspetto bipolare e nel citoplasma compare la sostanza basofila; in questi neuroni la sostanza basofila non raggiunge la concentrazione osservata nel differenziamento delle cellule dello strato ventricolare e non si organizza in zolle tigroidi; qualche giorno dopo si mettono in evidenza grossi prolungamenti neuritici (Pollo al 16° giorno d'incubazione, Piccione a 5 giorni dopo la nascita); solo nel Pollo a tre giorni prima della schiusa (18° d'incubazione) e nel Piccione di 10 giorni dalla nascita (28° di sviluppo) si osservano le collaterali neuritiche raggiungere il pirenoforo dei neuroni di Purkinje, ma canestri ben conformati si osservano solo nel Pollo neonato (21° giorno d'incubazione) e nel Piccione al 15° giorno dopo la nascita. Negli animali atti alla deambulazione l'epitelio extraventricolare, per quanto assottigliato e ridotto ad uno strato di 2-3 file di elementi, è ancora presente, ma in breve, perdurando la migrazione in profondità dei suoi elementi, scompare; gli ultimi elementi dell'epitelio extraventricolare si differenziano tardivamente nella regione più superficiale dello strato molecolare dando origine, oltre ad elementi di nevroglia, alle cellule stellate superficiali (di Cajal).

Per quanto riguarda le sinapsi asso-dendritiche dei neuroni di Purkinje, abbiamo osservato che le fibre rampicanti raggiungono il pirenoforo di Purkinje già al 12° giorno d'incubazione (nel Pollo), risalgono il tronco dendritico, ma si impegnano sull'arborizzazione solo dopo che questa si è orientata sullo stesso piano (16° giorno di sviluppo nel Pollo, 23° nel Piccione). Va osservato che, con il metodo argentario da noi impiegato (Cajal formula III), negli animali divenuti atti alla motilità locomotoria i plessi sinaptici dei neuroni di Purkinje sono molto più complicati nel Piccione che nel Pollo.

In base ai dati analitici, sommariamente esposti e raffigurati nella fig. 1, risulta che:

1° come nei Mammiferi, anche negli Uccelli l'epitelio ventricolare dà origine prima ai neuroni dei nuclei cerebellari, quindi ai più voluminosi neuroni della corteccia cerebellare (cellule di Purkinje e di Golgi), oltre ad elementi dello strato granulare che conservano l'aspetto di neuroblasta anche al termine della morfogenesi cerebellare; dall'epitelio extraventricolare, invece, originano i piccoli neuroni dello strato granulare e quelli dello strato molecolare (cellule stellate profonde e superficiali);

2° le prime manifestazioni del differenziamento, comuni a tutti i neuroni cerebellari, sono le modificazioni delle strutture Feulgen-positive, le quali perdono l'uniforme distribuzione nel nucleo addossandosi in parte alla faccia interna della membrana nucleare ed in parte al nucleolo ribonucleico; tali osservazioni confermano negli Uccelli quanto è stato riscontrato nel nostro Laboratorio in ricerche su Mammiferi ⁽⁴⁾ e su Anfibi ⁽⁵⁾;

(4) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 20, p. 125 (1956).

(5) G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 21, p. 491 (1956); M. MARINI, « Riv. di Neurobiol. » (Perugia), 2, p. 495 (1956).

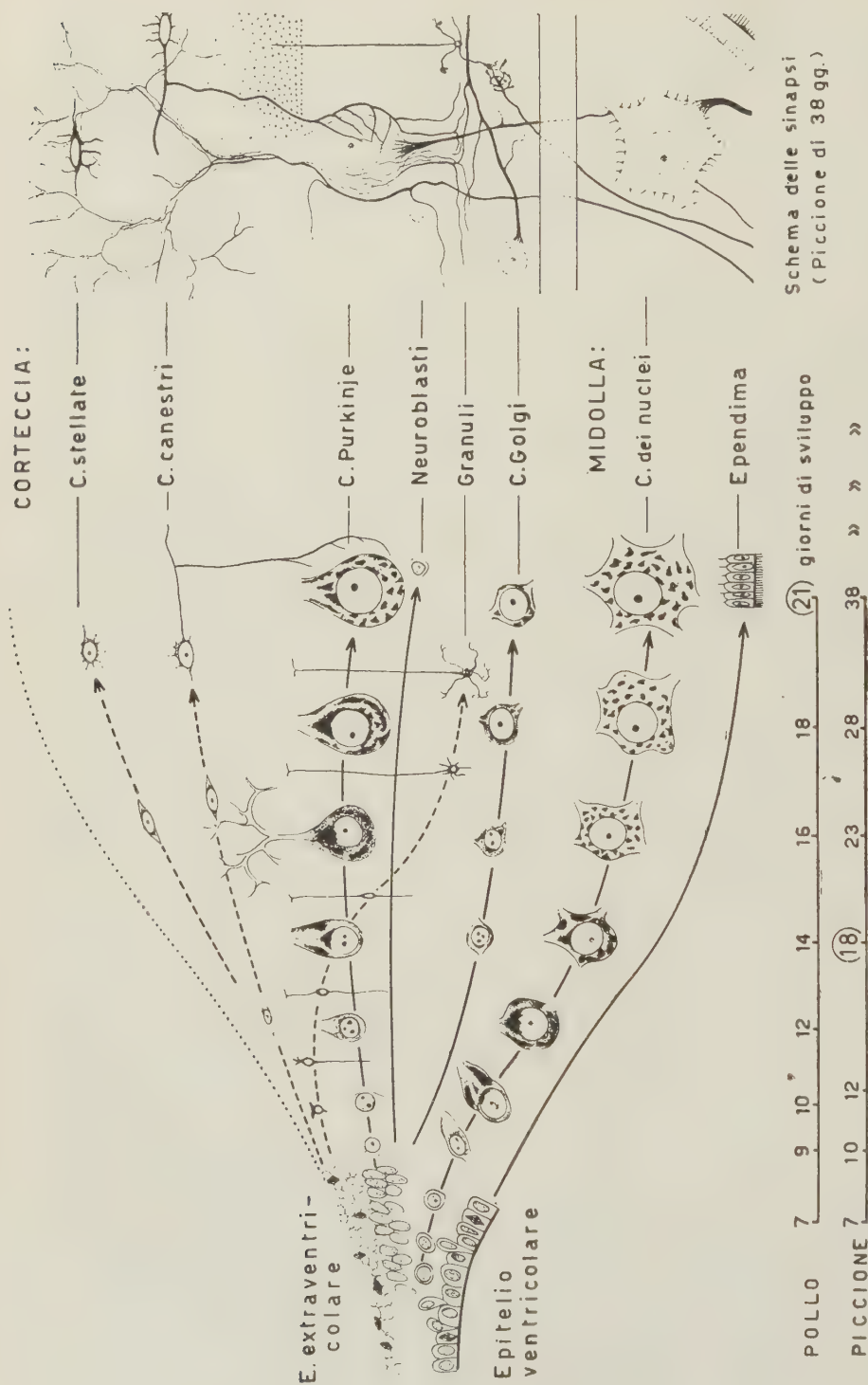


Fig. 1. - Schema sull'origine e sul differenziamento dei neuroni durante la morfogenesi cerebellare di Uccelli (i quadri cellulari sono stati ripresi da microfotografie).

3° l'accrescimento del neuroblasta e la formazione dei prolungamenti è accompagnata dall'aumento della basofilia nucleolare e dalla comparsa di sostanza basofila attorno al nucleolo ed alla periferia del pirenoforo; nelle cellule nervose che presentano un notevole accrescimento volumetrico (neuroni dei nuclei cerebellari, di Purkinje e di Golgi) l'intensa basofilia citoplasmatica è preceduta da un transitorio aumento numerico dei nucleoli ribonucleici; fenomeni simili sono stati descritti in ricerche compiute nel nostro Istituto su peculiari neuroni di Ittiopsidi (cellule di Mauthner) ⁽⁶⁾;

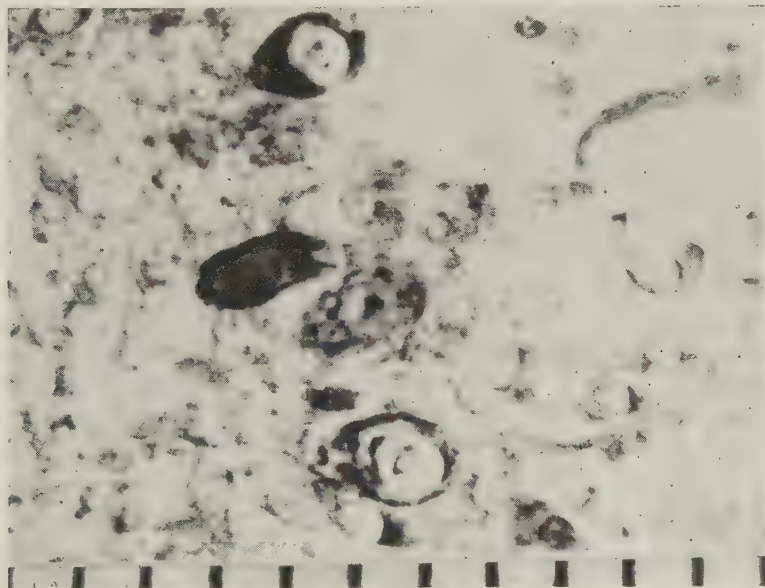


Fig. 2. — Cellule basofile (ipercromatiche) nel cervelletto di Pollo al 180 giorno d'incubazione (tre giorni prima della schiusa).

(Ogni intervallo della scala in calce = 10 μ).

4° prima del termine della morfogenesi cerebellare, sia nel Pollo che nel Piccione compaiono cellule di Purkinje basofile (ipercromatiche); il fatto che nel Pollo esse sono presenti prima che l'animale possa esercitare un efficace controllo sull'attività locomotoria, comparendo tre giorni prima della schiusa del pulcino dall'uovo (ved. fig. 2), fa ritenere poco verosimile l'interpretazione che il quadro sia espressione di affaticamento del neurone (Hydén ⁽⁷⁾. Attardi ⁽⁸⁾); d'altra parte è stato dimostrato che le cellule di Purkinje ipercromatiche aumentano con l'età ⁽²⁾, in seguito a stimolazione elettrica (Fuma-

(6) G. M. BAFFONI e G. CATTE, « Riv. di Biol. », 43, p. 373 (1951); AL. STEFANELLI e G. M. BAFFONI, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (ser. VIII), 12, p. 110 (1952); G. M. BAFFONI e L. SERRA, « Riv. di Biol. », 44, p. 469 (1952).

(7) H. HYDÉN, « Acta Physiol. Scand. », 6, Suppl. XVII, p. 1 (1943).

(8) G. ATTARDI, « Experim. Cell Res. », Suppl. IV, p. 25 (1957).

galli e Gualtierotti⁽⁹⁾) e ad esaurimento dei centri motorî vestibolari (topi in gabbie rotanti - Attardi⁽⁸⁾) e pertanto esse non possono ritenersi artefatti di tecnica (Cotte⁽¹⁰⁾); sono in corso osservazioni su Polli e Piccioni adulti, al fine di verificare se anche negli Uccelli, come sembra probabile, tali quadri siano espressione di fenomeni involutivi del neurone;

5° l'aver seguito passo passo l'istogenesi dei varî tipi di neuroni cerebellari nell'Uccello a prole precoce (Pollo) ed in quello a prole inetta (Piccione) ha potuto precisare non solo le differenze a determinati stadî di sviluppo dei due animali (ad esempio alla nascita), ma anche il diverso ritmo del differenziamento, il quale trova un'esatta rispondenza con l'andamento della morfogenesi cerebellare (ved.: precedente Nota): infatti mentre i primi neuroni (dei nuclei cerebellari) si sviluppano quasi simultaneamente nei due animali, i successivi neuroni hanno un ritmo di sviluppo che nell'animale a prole inetta (Piccione) è tanto più lento quanto più tardivo è l'inizio e maggiore è la *durata* del loro differenziamento;

6° il completo differenziamento della quasi totalità dei neuroni di Purkinje e della corteccia cerebellare è raggiunto quando gli animali diventano atti alla locomozione (Pollo neonato, Piccione a 20 giorni dalla nascita); nell'Uccello a prole precoce abbiamo osservato che i plessi sinaptici con cui le cellule di Purkinje contraggono rapporti con altri neuroni sono più semplici: i plessi rampicanti sono meno ramificati ed i canestri appaiono costituiti solo da collaterali dei neuriti delle cellule dei canestri; nel Pollo neonato non sono evidenti gli intricati nidi pericellulari osservati nel Piccione di 20 giorni dopo la nascita, ed in particolare le componenti provenienti dal plesso sottocellulare.

Questo fatto è in accordo con i risultati dell'esame della morfogenesi cerebellare (ved.: precedente Nota⁽¹¹⁾) e dimostra che quando il Piccione comincia a reggersi sugli arti lo sviluppo del cervelletto ha raggiunto una complicazione maggiore che nel Pollo appena nato. Osservazioni in corso su adulti di Pollo e di Piccione verificheranno se allo stadio adulto persistano differenze nella complicazione dei plessi sinaptici.

Le differenze messe in evidenza nel corso della morfogenesi ed istogenesi cerebellare tra l'Uccello a prole atta (Pollo) e quello a prole inetta (Piccione) vanno ascritte alla diversità del gruppo sistematico cui appartengono i due animali; ma va anche considerato che il cervelletto, come lo hanno dimostrato indagini anatomo-comparative (Bolk⁽¹²⁾, Stefanelli⁽¹²⁾, Larsell⁽¹³⁾), non ha un'evoluzione ortogenetica, ma in stretto rapporto con

(9) Z. FUMAGALLI e T. GUALTIEROTTI, « Biologica Latina », 2, p. 439 (1950).

(10) G. COTTE, « Arch. de Biol. », 68, p. 297 (1957).

(11) L. BOLK, *Das Cerebellum der Säugetiere* (Haarlem u. Jena 1907).

(12) AL. STEFANELLI, « Arch. Zool. Ital. », 24, p. 209 (1937); « Arch. Ital. Anat. Embriol. », 42, p. 1 (1939); « La Ric. Sci. », 18, Supp. (a cura del Centro di Studio per la Biologia), p. 27 (1948).

(13) O. LARSELL, « Arch. Neurol. Psychiatr. » (Chicago), 38, p. 580 (1937).

le esigenze della coordinazione motoria dell'animale; pertanto la maggior complessità macroscopica e microscopica del cervelletto di Piccione va messa in rapporto con il maggior sviluppo dei propriocettori somatici (dovuto all'aumentata massa della muscolatura del volo ed alla coordinazione di questa muscolatura) ed anche con gli apporti provenienti dagli organi sensitivi e dai centri che presiedono alle spiccate capacità d'orientamento di questo Uccello. Pertanto il diverso grado di complicazione strutturale del cervelletto tra Pollo e Piccione rispecchia le diverse condizioni ecologiche dei due animali.

Più difficile, da queste osservazioni compiute solo sul cervelletto, è risalire al significato della natura (atta o inetta) della prole, tanto più che la durata del periodo d'incubazione nel Pollo e nel Piccione è pressappoco eguale (rispettivamente 21 e 18 giorni). In proposito è noto che mentre alcuni apparati della vita vegetativa (ad esempio: l'intestino) devono essere pronti a funzionare in tutti i neonati, invece altri organi (in particolare i centri di associazione e di coordinazione nervosa – ved.: Lui⁽¹⁴⁾, Schifferli⁽¹⁵⁾ e le presenti osservazioni) nella prole inetta sono a stadi arretrati di sviluppo⁽¹⁶⁾.

Nel nostro Istituto sono state iniziate osservazioni nell'intento di precisare se il differente stato di maturità dei diversi apparati sia dovuto alla precocità della loro morfogenesi o se invece nella prole atta vi sia un'accelerazione della morfogenesi di solo alcuni sistemi; a favore della seconda eventualità deporrebbe il fatto che nei neonati inetti di alcuni Uccelli sono presenti strutture transitorie notevolmente complicate (penne di tipo giovanile sul capo, formazioni del becco e del palato di Passeracei). Ad ogni modo la natura della prole (inetta o precoce), che si riflette in modificazioni morfo-fisiologiche (endocrine) ed etologiche dei genitori (i neonati inetti difettano di meccanismi termoregolatori, necessitano di una certa igiene del nido, di difesa e di nutrimento), è da considerarsi una condizione strettamente dipendente dall'ecologia di un gruppo sistematico, intendendo per ecologia anche quel complesso di fenomeni di adattamento ad un determinato ambiente al fine di garantire la sopravvivenza della specie.

(14) A. LUI, « Riv. Sperim. Freniatr. Med. leg. Al. ment. », 21, p. 27 (1896).

(15) A. SCHIFFERLI, « Rev. Suisse de Zool. », (Genève), 55, p. 117 (1948).

(16) Di recente ciò è stato verificato nel cervelletto di Mammiferi (L. CATTANEO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 23, p. 484 (1957)).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Guido Ascoli

tenuta (*) dal Socio MAURO PICONE

Signor Presidente, cari Colleghi, Signore e Signori,

cinquantacinque anni or sono, nei primi giorni del novembre del 1903, noi normalisti, pieni di baldanza per esser divenuti tali, trovammo nei banchi dell'Ateneo pisano, nell'aula delle lezioni di Matematica del primo anno, un compagno più giovane di noi, modesto nel vestire e nella persona, dallo aspetto mite ed attraente, dal sorriso buono e luminoso, che subito considerammo con simpatia, non scevra però da una certa aria di superiorità – giustificabile forse con la nostra spensieratezza giovanile – che ci proveniva dall'aver conquistato un posto alla Scuola Normale.

Ma quest'aria fu di breve durata, ché, alla fine di una delle prime lezioni di algebra, avendo il professore, che era l'indimenticabile Niccoletti, chiesto se avevamo tutto capito in una difficile dimostrazione espostaci, quel giovinetto si alzò e con un timbro gradevolissimo di voce, con una pacata e sicura parlata toscana, sottopose al Maestro una semplificazione nel procedimento della dimostrazione che molto l'abbreviava, conferendole anche grande eleganza.

Alla fine della lezione mi accostai a quel giovinetto e così conobbi Guido Ascoli, col quale strinsi subito un'affettuosa amicizia, che, non avendo mai avuto affievolimenti di sorta, doveva cessare soltanto con la dolorosa prematura Sua scomparsa!

Ho conosciuto poche persone dotate di una precocità, di un ingegno, di una prontezza nell'apprendere, forti come quelli di Guido Ascoli.

Ricordo che, al primo anno di Università, Egli già conosceva il Calcolo, che si insegnava al secondo, delle cui meraviglie spesso mi parlava, e a proposito del Suo ingegno che, per esempio, agli esercizi di Geometria descrittiva, indicava all'attonito assistente alla Cattedra, quattro soluzioni di un problema per il quale questi ne vedeva soltanto due; alle lezioni di Meccanica razionale, muoveva al professore, che era l'indimenticabile Maggi, un'obiezione dello stesso tipo di quella celeberrima, mossa da Weierstrass a Riemann, nella dimostrazione del teorema d'esistenza della soluzione del

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace, e l'obiezione di Ascoli fu rimossa dal grande Maestro nella lezione successiva; ricordo pure che, apparsa nel 1905 (eravamo allora al terz'anno di Università) la famosa Memoria di Erhard Schmidt sugli sviluppi in serie di una funzione, mediante quelle di un prescritto sistema, Egli mi parlò spesso delle fruttuose applicazioni che i teoremi dati da Schmidt, in quella Memoria, potevano avere nella teoria delle equazioni integrali, precedendo, in alcuni risultati, quelle che lo stesso Schmidt doveva poi farne nella classica Memoria, apparsa nel 1907, nei «*Mathematische Annalen*», dal titolo *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*.

Tutto ciò, del resto, non è solo nei miei ricordi, ma, per esempio, anche in quelli di Luigi Amoroso, nostro amatissimo compagno di allora, il quale, recentemente, ebbe occasione di dire e di scrivere: « Ricordo i nostri compagni di corso, della maggior parte dei quali abbiamo perduto ogni traccia, ma uno è qui presente fra noi e li rappresenta tutti, è il nostro caro collega Guido Ascoli, matematico eminente che fin d'allora ci stupiva colle sue profonde osservazioni nel campo dell'Analisi funzionale ».

GUIDO ASCOLI NELL'INSEGNAMENTO MEDIO. – Laureatosi brillantemente a Pisa, all'età di vent'anni, nel luglio del 1907, svolgendo, col Bianchi, una tesi di laurea avente per argomento le singolarità delle funzioni analitiche, trascorrevi poi il successivo anno accademico 1907-1908, fruendo della borsa di perfezionamento Lavagna, alla fine di quest'anno si ritirò nella nativa Livorno, costretto a ciò da non buone condizioni di salute e dalla necessità di guadagnarsi di che vivere.

Ricordo con quanta e con quale tristezza ci separammo e come Egli si doleva di dover lasciare gli amati Suoi maestri e i Suoi compagni. Tutti noi lo avevamo però sempre presente e in un giorno di esami, del luglio 1909, trovandomi in commissione col Bianchi e col Niccoletti, all'arrivo di una lettera, indirizzata a quest'ultimo dall'Istituto tecnico di Spoleto, nella quale si chiedeva un professore di Matematica, io subito suggerii ai miei Maestri che fosse designato l'Ascoli a quel posto. La mia proposta fu, naturalmente, ben accolta e così l'Ascoli, col novembre del 1909, iniziò all'Istituto Tecnico di Spoleto la Sua luminosa carriera d'insegnante.

Il distoglierlo dalla carriera scientifica, recò, certamente, danno alla Scienza, ma quanto bene Egli profuse – nella formazione intellettuale e spirituale di una moltitudine di adolescenti d'Italia – durante i venti anni d'insegnamento della Matematica e della Fisica, nelle scuole medie, da Lui dato con ardente inesauribile passione e con quella totale dedizione del meglio di se stesso che Egli sempre poneva nell'assolvimento delle missioni affidateGli.

Di ciò mi ha spesso parlato il mio carissimo amico e collaboratore allo Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, prof. Aldo Ghizzetti, il quale ebbe, a Torino, l'Ascoli, come professore di Matematica e di Fisica negli ultimi quattro anni dei suoi studi secondarii. Il Ghizzetti riconosce che deve a Lui la propria formazione scientifica e una giusta valutazione

delle proprie possibilità negli studi di Matematica, verso i quali, senza esitazione, lo spinse, affettuosamente assistendolo per tutta la durata dei suoi studi universitarii e anche per qualche anno successivo.

Nelle lunghe quotidiane passeggiate attraverso i maestosi viali torinesi, al cospetto stimolante delle superbe Alpi nevose o a quello incorante della dolce verde collina, gli tracciava programmi di studi preparatorii o complementari, lo aiutava a superare le difficoltà che incontrava, vigorosamente lo spronava a riprendere il lavoro di ricerca, nei periodi di arresto.

Insomma, si deve all'Ascoli, se abbiamo in Ghizzetti, quell'eminente e brillante matematico che è.

E, senza dubbio, altro cospicuo frutto dell'insegnamento medio dell'Ascoli, è l'eminente fisico Giancarlo Wick, che fu Suo scolaro al Liceo.

Rimangono, inoltre, due libri di Lui, uno di Geometria, apparso nel 1913, ed un altro di Analisi matematica, apparso una diecina d'anni dopo, che attestano l'alta classe del Suo insegnamento medio e pongono il nostro Paese, in fatto di libri di Matematiche elementari, ad un livello non inferiore a quello al quale, da tempo, era pervenuta la Germania coi classici libri di Riccardo Baltzer, tradotti in italiano, niente di meno, che da Luigi Cremóna. L'Ascoli stesso era soddisfatto di queste Sue opere, come rivela l'affettuosa dedica da Lui scritta sul frontespizio di una copia del libro di Geometria: *Al mio bravo Ghizzetti, perché studi e diventi qualcuno.*

Nonostante le assidue cure date alla Sua missione d'insegnante nelle scuole medie, che durò dal 1909 al 1932, con l'interruzione di tre anni, durante i quali fu valoroso combattente e ferito dal nemico nella prima guerra mondiale, Egli non tralasciò, in buona parte di quel periodo, di coltivare anche le Matematiche superiori, pubblicando alcuni pregevoli lavori, concernenti le funzioni sferiche, le forme geometriche fondamentali, le omografie piane, le funzioni armoniche, le corrispondenze su una curva algebrica, l'equazione di Laplace nello spazio iperbolico, l'approssimazione lineare delle funzioni, il potenziale newtoniano, la teoria degli spazi astratti.

Durante il periodo dal 1920 al 1927 la Sua produzione scientifica, sempre pregevolissima, fu scarsa *numericamente*. Ma in questo periodo Egli affrontò e risolse il grave urgente problema di dare, con Lui, al Liceo scientifico di Torino, nell'insegnamento della Fisica - al cui abbinamento con quello della Matematica tanto Lui che io eravamo favorevoli - un professore preparato come lo era nella Matematica, nonché quelle indispensabili possibilità sperimentali di cui quel Liceo era quasi del tutto sprovvisto e nel 1925 fondò il Suo nucleo familiare, che, per le elette virtù della Consorte, Gli procurò l'ambiente adatto a quella produttiva vita di ricerca scientifica che non tardò a divenire definitiva.

Verso la fine di questo periodo i Suoi alti meriti come insegnante di Liceo, furono ufficialmente riconosciuti, con la Sua iscrizione al *ruolo d'onore degli insegnanti medi*.

GUIDO ASCOLI NELL'INSEGNAMENTO UNIVERSITARIO. - Nei primi tempi della Sua residenza a Torino, come professore di Liceo, fra il 1922 e il 1926, io

ebbi spesso la gioia di passarvi con Lui il tardo pomeriggio e di constatare che i Suoi propositi di dedicare alla ricerca matematica il meglio di se stesso non erano affatto spenti. Ci scambiavamo le nostre idee, incitandoci a vicenda nell'espletamento di seducenti programmi di lavoro, anche appena abbozzati, talvolta fantastici. Io allora andavo immaginando la creazione di un Istituto che avesse consentito ai matematici d'essere tempestivamente e utilmente informati dei problemi di matematica che sorgono nelle Scienze sperimentali e nella Tecnica, Lui andava meditando, fra l'altro, un assetto dei fondamenti della teoria degli spazi astratti, nel quale questi fossero sempre liberati dall'impiego del postulato di Zermelo.

Nel separarci io sempre Gli dicevo: Ascoli, il tuo posto è all'Università, è tuo diritto e tuo dovere di non rinunciarci, là ti aspettano compiti che nessuno meglio di te può assolvere.

Egli mi dava, con la Sua innata modestia, un tacito commosso consenso. Ma potei, poco dopo, avere la soddisfazione di assistere ad una prodigiosa ripresa della Sua attività di ricerca che procurò all'Analisi matematica, in appena un biennio, una diecina di Suoi lavori, con contributi di altissimo pregio, in argomenti di grande attualità.

Egli si decise, dopo ciò, nel 1930, a presentarsi ad un concorso ad una cattedra universitaria di Algebra, e fu incluso nella terna vincitrice, nonostante che della commissione giudicatrice non facesse parte alcun Suo maestro, non soltanto perché quelli che ebbe all'Università erano tutti scomparsi purtroppo, ma anche perché Egli non ne ebbe mai nella ricerca. Ebbene, pur essendo stato, nel successivo anno, da questa stessa nostra Accademia, insignito del premio ministeriale per la Matematica, schivo, come Egli era, da ogni atto che avesse potuto, anche lontanamente, sembrare derivante da esibizionismo, stava per scadere il biennio di validità di quella terna, senza che avvenisse la Sua chiamata ad una cattedra di Algebra! Finalmente Leonida Tonelli ebbe il grande merito, fra tanti altri, di proporre, appena in tempo, alla Facoltà di Scienze dell'Università di Pisa, la chiamata dell'Ascoli ad una cattedra resasi colà vacante e non è questo un titolo da poco per il chiamato, poiché tutti sanno quanto difficilmente il Tonelli fosse disposto ad accontentarsi.

S'iniziò così, col novembre del 1932, la vita universitaria di Guido Ascoli, la quale, però ebbe, purtroppo, dal 1938 al 1945, ben sette anni di dolorosa interruzione, a causa di quegli insensati provvedimenti razziali che privarono l'Italia, in quel lungo difficilissimo periodo, dell'opera preziosa di cittadini di altissimo valore morale, spirituale ed intellettuale, i quali dimostrarono sempre di amarla nei suoi pericolosi sanguinosi cimenti, strenuamente battendosi in sua difesa, come aveva fatto l'Ascoli stesso nella prima guerra mondiale e, per esempio, anche il grande matematico Eugenio Elia Levi, che, durante la stessa guerra, eroicamente cadde nelle infauste giornate di Caporetto, colpito alla fronte dal nemico, a cui voleva, ignorando che le nostre difese erano state tutte travolte, contendere il passo nell'amato Suolo.

L'Ascoli insegnò Analisi matematica all'Università di Pisa fino al 1934, a quella di Milano dal 1934 al 1938 e dal 1945 al 1949, anno in cui passò alla Università di Torino, alla cattedra di Matematiche complementari, e colà, or è appena trascorso un anno, improvvisamente si spegneva.

Naturalmente, l'assolvimento della Sua missione di Maestro all'Università fu sempre a quella grande altezza che tutti si aspettavano da Lui. Ebbe a Milano, come scolaro, Luigi Amerio, al quale, come questi riconosce, dette quei buoni fondamenti nella teoria delle funzioni, che dovevano fruttare i ben noti lavori di Amerio sulla trasformata di Laplace e sul Calcolo delle variazioni. A Torino. Egli beneficamente influì, sebbene in privato, sull'apprezzata opera matematica di Giovanni Zin, che fu Suo scolaro a Pisa.

Non ho potuto mai spiegarmi perché la gloriosa Facoltà di Scienze di Torino non si sia giovata anche di un analista della forza di Ascoli, per l'insegnamento dell'Analisi matematica, al cui progresso Egli aveva dato e poteva bene ancora dare contributi di altissimo valore, sia Suoi personali - come infatti dava - sia nella formazione di ben preparati cultori di essa. Comunque, com'era nella Sua nobile natura, Egli, anche nella cattedra di Matematiche complementari, alla quale è consuetudine l'affidare compiti prevalentemente didattici, rivolti alla preparazione di insegnanti di Matematica nelle scuole medie, Egli fu di grande utilità, profondendosi, con la solita piena Sua dedizione, i tesori di una quarantennale esperienza didattica e di una vasta e profonda sapienza matematica che Gli consentiva di legare fruttuosamente fra loro argomenti solitamente tenuti a grande distanza. Con la fondazione del *Corso di cultura matematica*, di addestramento dei giovani laureati, in questa materia, per il superamento delle prove di esame di abilitazione all'insegnamento medio, Egli riuscì a dare a Torino, una Scuola per la preparazione dei professori di Matematica nelle scuole medie, la cui grande efficacia si palesò ben presto nei risultati dei concorsi a cattedre di Matematica delle Scuole medie, nei quali i provenienti da Torino, riuscirono sempre, in questi ultimi anni, fra i migliori.

Questa Sua attività fruttò anche il bel libro, che ebbe tre edizioni, nel quale sono raccolte alcune Sue lezioni di Matematiche complementari e due quaderni di esercizi.

Affermatosi, così, l'Ascoli anche come fattivo cultore di didattica matematica, Gli fu, nel 1953, dall'Unione Matematica Italiana, affidato l'incarico di rappresentarla nel *Comitato internazionale per l'insegnamento matematico*, del quale, nel 1955, l'Unione Matematica Internazionale, Lo nominava membro. Fu presidente della Commissione italiana per l'insegnamento matematico, membro della Commissione scientifica dell'Unione Matematica Italiana e della Commissione per le Monografie di Analisi del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Nel 1947 fu eletto socio corrispondente di questa Accademia, nel 1952 dell'Accademia delle Scienze di Torino e nel 1953 dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

DELL'OPERA SCIENTIFICA DI GUIDO ASCOLI. — Pregevoli caratteristiche dell'opera scientifica di Guido Ascoli provengono da un sano fecondo eclettismo e dalla consuetudine di una lunga precedente meditazione degli scritti ai quali la consegnava, che riescono di facile, avvincente lettura, di un'accurata e il più possibilmente estesa informazione bibliografica, di una revisione, ripetuta a distanza, degli scritti stessi, nei quali è difficile trovare imperfezioni, non soltanto di ragionamento, ma anche materiali di calcolo.

Si deve a Lui, un'eccellente monografia, apparsa nel 1935, e premiata dalla Scuola Normale Superiore di Pisa, sulle *equazioni lineari a derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*, che, divenuta classica, ha costituito, per più di vent'anni, un fondamento essenziale alle ricerche negli sterminati campi della Matematica e della Fisica, nei quali quelle equazioni trovano frequenti e cospicue applicazioni.

Pregevole è pure la monografia, apparsa nel 1951, sulla *trasformazione di Laplace*, purtroppo pubblicata in litografia e in poche copie, nella quale ne sono esposte una teoria e le più espressive applicazioni alla risoluzione di problemi lineari della Fisica.

La Sua Memoria, pubblicata nel 1931, negli « *Annali di Matematica* », sugli *spazi metrici e le loro varietà lineari*, e le Sue Note lincee sulla *rappresentazione lineare delle funzioni continue*, di poco precedenti, costituiscono, con quelli di Renato Caccioppoli, i primi lavori, apparsi in Italia, concernenti la teoria degli spazi astratti e le applicazioni di questa all'Analisi funzionale lineare. Devo dire che molti risultati di quella Memoria erano in possesso dell'Ascoli fin dal 1926, cioè ben cinque anni prima che fossero, con quella Memoria, pubblicati, e pertanto io posso affermare che i risultati stessi sono stati da Lui ottenuti indipendentemente da Hans Hahn e da Stefan Banach, i cui lavori, in questo argomento, sono apparsi qualche anno prima di quelli di Ascoli.

Chiunque abbia svolto un corso sugli spazi astratti sa quanto utile riesca il tener presenti le trattazioni, impeccabili nel rigore, date da Lui, in quella Memoria, di alcune parti fondamentali della teoria.

Con due Note lincee, fra il 1928 e il 1930, l'Ascoli ha fatto conoscere alcuni nuovi risultati, concernenti il teorema di unicità della soluzione, in un assegnato campo dello spazio, del classico problema di Dirichlet per le funzioni armoniche, secondo i quali questo teorema continua a sussistere anche quando, supposta la soluzione limitata nel campo, nessuna condizione le sia prescritta sul suo comportamento nell'intorno di un certo insieme di punti della frontiera del campo stesso. E alla teoria delle funzioni armoniche Egli è ritornato nell'ultima Sua Nota, pubblicata nel 1955 nella *Rivista dell'Unione Matematica argentina*, con la quale, dà, in forma estremamente elegante, un sintetico teorema sugli estremi di funzioni composte mediante quelle.

Ma le ricerche nelle quali l'Ascoli si è più a lungo fermato, ritornandovi ad intervalli di tempo per circa venticinque dei Suoi ultimi anni di vita, sono quelle rivolte al *comportamento asintotico* delle soluzioni, in un deter-

minato campo, di equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali, lineari o no, al comportamento cioè di queste soluzioni all'infinito, se quel campo è illimitato, o in un intorno della frontiera di questo. Le ricerche in tale argomento, che presentano gravi difficoltà, interessano profondamente, si può ben dire, ogni progresso di parecchie parti della Fisica, ed in modo speciale, di quella sterminata, oggi in pieno rivolgimento, della dinamica dei fluidi. Esse hanno occupato matematici fra i più rinomati, dei quali mi limiterò a citare il Dini e il Poincaré.

Fra i numerosi lavori, dedicati dall'Ascoli a questo affascinante argomento, spicca la Memoria, apparsa nel 1919 nella «*Mathematische Zeitschrift*», concernente l'equazione di Laplace nello spazio iperbolico, le cui soluzioni vi sono studiate in un campo avente per frontiera un iperpiano nei cui punti l'equazione cessa di essere del tipo ellittico, al quale sempre appartiene nel campo. Questa Memoria, ben si allinea con quella ormai classica di Francesco Tricomi, l'antesignano nello studio delle equazioni lineari a derivate parziali, di tipo, da questi detto, *misto*, al quale appunto appartiene l'equazione considerata dall'Ascoli. Gli altri Suoi lavori su questo argomento riguardano le equazioni differenziali ordinarie lineari o no e recano contributi talvolta nuovi e di importanza fondamentale, talvolta di perfezionamento di risultati ottenuti da altri autori, nonché criterii sufficienti di stabilità delle soluzioni di alcune di quelle equazioni. Fra questi lavori mi piace rilevare quello del 1936, pubblicato nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo, dedicato ad un'equazione differenziale ordinaria del 2° ordine, segnalata da Polvani, da questi stabilita per una teoria del «magnetron» di Hull. Ciò mi piace rilevare anche perché questo lavoro dà una prova tangibile dell'approvazione dell'Ascoli, datami fin dalle ricordate nostre conversazioni torinesi del 1922, della mia azione intesa a incitare i matematici a prendere ispirazione, per le loro ricerche, anche dai problemi di Matematica posti e imposti dalle Scienze della Natura.

Una felice sintetica esposizione degli studi asintotici per le equazioni differenziali ordinarie trovasi nella conferenza dal titolo: *Questioni asintotiche nel campo delle equazioni differenziali non lineari*, tenuta dall'Ascoli, nel 1951, al Seminario Matematico e Fisico di Milano.

Merita pure d'esser ricordata una Sua Memoria, del 1940, pubblicata nella «*Rivista di Matematica e Fisica dell'Università di Tucuman*», nella quale Egli, da par Suo, dà una nuova sistemazione della teoria, dovuta al compianto Gabriele Mammana, mio primo indimenticabile discepolo, concernente la decomposizione degli operatori differenziali lineari ordinari, in fattori lineari. L'introduzione di operatori complessi e il valersi di efficaci rappresentazioni geometriche iperspaziali, offre all'Ascoli la scoperta di circostanze che erano sfuggite al non comune acume del Mammana ed una teoria di un elevatissimo grado di perfezione.

Non esito a dire *geniale* il concetto di «isotropia analitica», dato dall'Ascoli nel 1943 («*Commentationes, Pontificia Academia Scientiarum*», Anno VII, vol. VII) per lo studio delle equazioni lineari a derivate parziali,

che Gli ha consentito, fra l'altro, di ritrovare, con grande eleganza, tutte le cosiddette *proprietà integrali* che io avevo stabilito qualche anno prima, per le soluzioni di una certa classe di quelle equazioni.

Mi si consenta, al termine di questa breve rassegna dell'opera scientifica di Guido Ascoli, forzatamente lacunosa, anche a causa della mia ristretta sapienza, di elevare un mesto pensiero di gratitudine alla Sua cara Memoria per il bel lavoro, il Suo penultimo, che volle dedicarmi in occasione del mio settantesimo compleanno, nel quale lavoro scopre un fecondo generale principio di trasformazione integrale dei problemi differenziali lineari, atto a fornire per le soluzioni di equazioni differenziali lineari ordinarie, proprietà integrali fra le quali si trovano, come particolarissimo caso, per esempio, quelle date, per le funzioni di Mathieu, dal sommo Whittaker.

Mio caro Guido, il rimpianto per Te, nella Tua Famiglia, nella Scuola, in tutti coloro che ebbero il bene della Tua amicizia, in tutti coloro che amano la Scienza, non avrà mai fine!

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI.

1910.

1. - *Funzioni sferiche e sistemi ortogonali* (« Period. di Matem. », 26).
2. - *Note sulla teoria dei poliedri* (Suppl. al « Period. di Matem. », 13).
3. - *Una questione algebrico-geometrica* (« Bollett. di Matem. », 11).

1913.

4. - *Complementi di Geometria* per gli Istituti Tecnici (Livorno, Giusti).
5. - *Saggio di una teoria dei versi nelle forme geometriche fondamentali* (« Period. di Matem. », 28).

1914.

6. - *Note di Geometria elementare* (Suppl. al « Period. di Matem. », 17).

1915.

7. - *Sul metodo differenziale per la ricerca dei massimi e minimi nell'insegnamento medio* (« Period. di Matem. », 30).
8. - *Sopra una costruzione non archimedeica delle omografie piane* (« Giorn. di Matem. », 53).
9. - *Sopra due cubiche notevoli nel piano di un triangolo* (« Period. di Matem. », 12).
10. - *Le antiparallele e le loro applicazioni* (Suppl. al « Period. di Matem. », 18).

1920.

11. - *Intorno alla forma $ax + by$* (« Boll. di Mat. », 17).

1922.

12. - *Sopra le disuguaglianze tra i valori medi* (« Bollett. di Mat. », 18).
13. - *Un teorema di Aritmetica* (« Bollett. di Matem. », 18).

1924.

14. – *Lezioni elementari di Analisi Matematica* per i Licei scientifici (Torino, Petrini).

1927.

15. – *Sul problema di Dirichlet nei campi sferici ed ipersferici* (« Rend. R. Accad. Lincei » (6) V, 1° sem.).

1928.

16. – *Sull'equazione di Laplace dello spazio iperbolico* (« Rend. R. Acc. Lincei » (6) VII, 1° sem.).
 17. – *Sulle singolarità isolate delle funzioni armoniche* (« Bollett. Unione Matem. », 7).
 18. – *Sull'unicità della soluzione nel problema di Dirichlet* (« Rend. R. Accad. Lincei » (6), VIII, 2° sem.).
 19. – *Sui gruppi di corrispondenza (2,2) sopra una curva algebrica* (« Annali di Matem. », 6).

1929.

20. – *Sull'equazione di Laplace dello spazio iperbolico* (« Math. Zeitschrift », 31).
 21. – *Sulla rappresentazione approssimata di una funzione mediante combinazioni lineari di funzioni date* (« Rend. Acc. Lincei » (6), 10, 2° sem.).

1930.

22. – *Sui raggi dei cerchi tangenti a tre rette di un piano* (« Bollett. di Matem. », 26).
 23. – *Sul potenziale newtoniano di una distribuzione lineare e funzioni analoghe* (« Rend. R. Ist. Lombardo », 63).
 24. – *Ancora sulla rappresentazione lineare delle funzioni continue* (« Rend. R. Acc. Lincei » (6), II, 1° sem.).
 25. – *Sul principio di unicità del problema di Dirichlet* (« Atti R. Acc. Sc. », Torino, 65).

1931.

26. – *Sui baricentri delle sezioni piane di un dominio spaziale connesso* (« Boll. Unione Matem. Ital. », 10).
 27. – *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari* (« Annali di Matem. », 9).

1932.

28. – *Sulle condizioni di validità dello sviluppo di Taylor nel campo reale* (« Rend. R. Acc. Lincei » (6), 16).
 29. – *Sulle condizioni di validità dello sviluppo di Taylor per le funzioni di una variabile reale* (« Atti R. Acc. Sc. Torino », 68).

1933.

30. – *Funzioni antiarmoniche in un campo circolare* (« Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa » (2), 2).
 31. – *Sulle condizioni di validità della formula abbreviata di Taylor* (« Rend. R. Acc. Lincei » (6), 18, 2° sem.).
 32. – « *Insieme* », voce per l'Enciclopedia Italiana.
 33. – *Sopra una forma del teorema del valor medio per le funzioni analitiche* (« Boll. Unione Matem. Italiana », 12).

1934.

- 34. - *Sulle funzioni a variazione limitata* (« Boll. Unione Matem. Ital. », 13).
- 35. - *Sopra un nuovo algoritmo per la rappresentazione delle funzioni di variabile reale* (« Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa » (2), 3).
- 36. - « *Massimi e minimi* », voce per l'Enciclopedia Italiana.
- 37. - *Sul principio d'identità dei polinomi* (« Boll. Assoc. Mathesis »).

1935.

- 38. - *Sulle minime maggioranti concave e l'analisi delle funzioni continue* (« Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa » (2), 4).
- 39. - *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali di 2° ordine* (« Rend. R. Acc. Lincei » (6), 22).
- 40. - *Le equazioni a derivate parziali del tipo ellittico* (« Rend. Sem. Matem. e fis. di Milano », 9).
- 41. - *Le equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico* (2ª parte del volume di eguale titolo ASCOLI-BURGATTI-GIRAUD, ed. G. C. Sansoni, Firenze).
- 42. - *Sopra una particolare equazione differenziale del 2° ordine* (« Rend. Acc. Lincei » (6), 22).

1936.

- 43. - *Sopra una particolare equazione differenziale del 2° ordine* (« Rend. R. Ist. Lombardo » 69).
- 44. - *Sul comportamento asintotico e sulla valutazione approssimata degli integrali delle equazioni differenziali di 1° ordine* (in « Scritti offerti a Luigi Berzolari », Pavia).
- 45. - *Il problema analitico del « magnetron »* (parte 2ª di « Questioni riguardanti il magnetron » di G. POLVANI, G. ASCOLI e A. GIACOMINI, « Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano »).

1937.

- 46. - *G. Vitali e G. Sansone, Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* (« Boll. d. Matem. », Recensione).

1938.

- 47. - *Weyrich (R.), Zylinderfunktionen* (« Period. di Matem. », 18, Recensione).

1940.

- 48. - *Sopra la decomposizione degli operatori differenziali lineari in fattori lineari e sopra alcune questioni geometriche connesse* (« Revista de Matematicas y Fisica », Tucuman, 1).

1941.

- 49. - *Sulla forma asintotica degli integrali dell'equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$ in un caso notevole di stabilità* (« Revista de Matematicas y Fisica », Tucuman, 2).

1943.

- 50. - *Sopra i sistemi lineari isotropi e le loro proprietà integrali* (« Comment. Pont. Acad. Scient. », 7°, n. 10).

1944.

- 51. - *Sopra un'equazione funzionale* (« Portugaliae Mathematica », 4).

1946.

52. - *Sopra un'estensione dell'equazione integrale di Whittaker per le funzioni di Mathieu* (« Rend. Ist. Lomb. », 79).
 53. - *Nuclei isotropi e loro autofunzioni* (« Rend. Acc. Lincei » (8), I, 2° sem.)

1947.

54. - *Sopra una valutazione asintotica che si presenta nella teoria probabilistica dei contatori di corpuscoli* (« Ricerca scientifica e ricostruzione », 17).
 55. - *Un'osservazione sulle formule di quadratura* (« Boll. Un. Mat. Ital. » (3), 2).
 56. - *Vedute sintetiche sugli strumenti integratori* (« Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano »).

1948.

57. - *Sopra un caso di stabilità per l'equazione differenziale $y'' + A(x)y = 0$* (« Annali di Mat. » (8), 26).
 58. - *Riflessioni sopra la risoluzione e la discussione dei problemi geometrici* (« Il Filomate », I).
 59. - *Recensioni di opere di G. VALIRON, G. SANSONE e F. TRICOMI* (« Il Filomate », I).
 60. - *Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione* (« Rend. Acc. Lincei » (8), V, 2° sem.).

1949.

61. - *L'isotropia analitica e le sue applicazioni* (« Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano », XX; e « Rend. Sem. Mat. di Torino », 8°).

1950.

62. - *Osservazioni sopra alcune questioni di stabilità* (« Rend. Acc. Lincei » (8), IX, 2° sem.).
 63. - *Sulle matrici permutabili con la propria derivata* (« Rend. Sem. Mat. di Torino », 9°).

1951.

64. - *Ricerche asintotiche sopra una classe di equazioni differenziali non lineari* (« Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa » (3), V).
 65. - *Questioni asintotiche nel campo delle equazioni differenziali non lineari* (« Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano », XX; conferenza).
 66. - *Trasformazione di Laplace* (Torino, Gheroni, litogr.).

1952.

67. - *Lezioni di Matematiche complementari* (fasc. 2°, Torino, Gheroni).
 68. - *Sopra un'estensione di una formula asintotica di Laplace agli integrali multipli* (« Rend. Sem. Mat. di Padova », XXI).
 69. - *Sur les matrices permutables avec leur dérivée*; extrait d'une lettre à Mr. H. Schwerdtfeger (« Rend. Sem. Mat. di Torino », II).
 70. - *Sopra un integrale multiplo* (« Rend. Sem. Mat. di Torino », II).

1953.

71. - *Sul comportamento asintotico delle soluzioni dell'equazione $y'' - (1 + \eta)y = 0$* (« Boll. Un. Mat. Italiana » (3), 8).
 72. - *Svolgimento dei temi assegnati nel Corso di cultura matematica dell'Università di Torino negli anni accademici 1949-50, 1950-51* (con la collaborazione di E. VALABREGA GIBELLATO, Torino, Gheroni 1ª ed. 1953, 2ª ed. 1954).

73. — *Sull'equazione integrale da cui dipende la ricerca di una curva gobba di cui sono note le curvature in funzione dell'arco* (« *Le Matematiche* », 8).
74. — *Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y'' - (1 + f(t))y = 0$ in un caso notevole* (« *Rivista di Mat. dell'Univ. di Parma* », 4).

1955.

75. — *A proposito di alcuni recenti risultati asintotici sugli estremi di funzioni speciali* (« *Rend. Sem. Mat. Torino* », 13).
76. — *Svolgimento dei temi assegnati nel Corso di cultura matematica dell'Università di Torino negli anni accademici 1951-52, 1952-53* (con la collaborazione di E. VALABREGA GIBELLATO, Torino, Gheroni).
77. — *Sulla preparazione degli insegnanti delle scuole secondarie e sull'abbinamento della Matematica e della Fisica* (« *Boll. Unione Mat. Ital.* », (3), 10).
78. — *I motivi fondamentali dell'opera di Giuseppe Peano* (nel volume « *In memoria di Giuseppe Peano* » a cura del Liceo Scientifico di Cuneo).
79. — *Sopra un principio di trasformazione integrale dei sistemi differenziali ed alcune sue applicazioni* (« *Annali di Matem.* » (4), 40).
80. — *La funzione della matematica e del matematico nella vita contemporanea* (« *L'Enseignement mathématique* » (2), 1).
81. — *Lezioni di Algebra*, 3ª ediz. del n. 67, riveduta e aumentata (Torino, Gheroni).
82. — *Sopra una larga estensione di una classica proprietà delle funzioni armoniche* (« *Revista de la Unión Mat. Argentina* », 17).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la parola al Socio Picone che commemora il Collega Guido Ascoli.

Assistono alla cerimonia la Vedova con i familiari del compianto scienziato e il prof. Faedo, Preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Pisa, in rappresentanza del Rettore di quella Università. Numerose le adesioni pervenute da parte di Colleghi e di allievi, tra le quali un messaggio dell'Istituto Matematico della Università di Torino, a firma del Socio A. Terracini.

Il Presidente ringrazia il Socio Picone per la sua elevata orazione e rinnova ai familiari del prof. Ascoli i sentimenti del più vivo cordoglio dell'Accademia e suo personale per la scomparsa dell'illustre Collega.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente porge il cordiale saluto della Classe al prof. Arthur Rosenthal della « *Purdue University* » di Lafayette (Indiana), presente all'adunanza. Comunica poi che il Collega Beniamino Segre è partito per la Romania, ove terrà tre cicli di conferenze presso le Università di Bucarest, Cluj e Iassi e commemorerà inoltre, il 23 corrente, Evangelista Torricelli presso l'Accademia della Repubblica Popolare Romana.

Il predetto Professore ha chiesto alla Presidenza di inviare un messaggio di adesione alla citata Accademia Romana e il Presidente sottopone tale proposta alla Classe che l'approva.

Il prof. Giordani informa quindi che il prof. Detlew W. Bronk, Presidente dell'Accademia Nazionale delle Scienze degli Stati Uniti d'America, ha invitato il nostro Istituto a fare designazioni di giovani scienziati che intendono partecipare a corsi di perfezionamento nelle Università americane e ricorda che l'Accademia dei Lincei, d'intesa con il Consiglio Nazionale delle Ricerche, ha già provveduto, nell'anno accademico 1956-57, ad una analoga selezione che è stata svolta da una apposita Commissione composta dai rappresentanti dei due Istituti. Di tale Commissione facevano parte, per l'Accademia, lo stesso Presidente Giordani e i Colleghi E. Bompiani, Colonnetti, Cotronei e Gortani.

Il Presidente pertanto chiede alla Classe se, per le nuove designazioni, si possa seguire lo stesso procedimento e la Classe si pronuncia favorevolmente, dando mandato alla Presidenza di nominare i rappresentanti dell'Accademia.

Il prof. Giordani dà notizia di una comunicazione del « Rockefeller Institute for Medical Research », concernente il progetto per una riunione internazionale fra medici e cultori di elettronica, organizzata dal CIOMS; di un rapporto dell'UNESCO circa l'organizzazione della Prima Conferenza Internazionale sulla elaborazione dei dati scientifici, che dovrebbe aver luogo a Parigi o a Roma dal 15 al 20 giugno 1959; della Conferenza Internazionale sulla informazione scientifica, che si terrà a Washington dal 16 al 21 novembre 1958, per iniziativa dei seguenti enti americani: « National Academy of Sciences », « National Research Council », « National Science Foundation » e « American Documentation Institute ».

Il Presidente propone inoltre di inviare un messaggio di adesione alla « Société de Chimie Physique » di Parigi che celebrerà, il 31 corrente, il cinquantenario della sua fondazione.

Il prof. Giordani informa infine la Classe che il 20 corrente, nell'Aula Magna dell'Università di Pavia, avrà luogo la cerimonia inaugurale della III Riunione Internazionale della Società Farmaceutica del Mediterraneo Latino. La Presidenza provvederà ad inviare un messaggio di adesione.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Desio presenta un fascicolo edito dall'Istituto di Geologia, Paleontologia e Geografia Fisica dell'Università di Milano, che illustra la storia dell'Istituto e l'attività scientifica e didattica da esso svolta nel periodo 1925-1956.

Presenta poi una trentina di lavori di assistenti e di allievi del citato Istituto, pubblicati a cura dello stesso, e li illustra brevemente. Di tali lavori, alcuni contengono studi stratigrafici sul sistema cretaceo in Italia, mentre

altri, pure di carattere stratigrafico, si riferiscono al terziario subalpino lombardo, studiato dal punto di vista petrografico e paleontologico. Un terzo gruppo raccoglie lavori di carattere paleontologico, riguardanti la regione prealpina della Lombardia, un quarto si occupa di micropaleontologia, che oggi ha assunto una grande importanza anche nel campo applicativo e cioè in quello delle ricerche petrolifere, mentre una quinta serie è dedicata allo studio di problemi geologici di territori alpini.

Il Socio Desio presenta poi l'elenco delle sue pubblicazioni fino al 1952, un suo studio dal titolo « Argille scagliose e strutture di tipo appenninico nel Peloponneso e nelle Isole Egee », nonché due altre Note, da lui redatte in collaborazione con Bruno Zanettin, rispettivamente dal titolo « Spedizione scientifico-alpinistica Italiana al Karakorum (Himalaya) 1953-1955. Notizie geologico-petrografiche preliminari sul bacino del Baltoro » e « Sur la constitution Géologique du K2 (8611 m.) dans la chaîne du Karakorum (Himalaya) ».

Il prof. Desio presenta infine una Memoria, dovuta ad un allievo dell'Istituto di Geologia dell'Università di Milano, Ezio Nordio, perito tragicamente sul lavoro il 13 marzo 1950. Questa Memoria, che l'autore aveva presentato come tesi di laurea nel 1948, è uno studio scientifico veramente pregevole sul sottosuolo di Milano e rimane ancora oggi valido nei dati di fatto e nelle conclusioni.

Il Socio Picone comunica che il dott. Stig Ekelöf, professore di Eletticità teorica alla Scuola politecnica di Göteborg, avendo rinvenuta, per caso, in una libreria antiquaria di Roma, una copia della celebre Memoria di Giorgio Green, dal titolo « Un saggio sull'applicazione dell'Analisi matematica alla teoria dell'elettricità e del magnetismo », ha pensato di farne stampare un facsimile e gli ha proposto di presentare all'Accademia, come suo omaggio, una copia di tale facsimile. Nell'adempiere l'onorifico incarico, il prof. Picone esprime il suo compiacimento per il pregevole apporto alla Biblioteca accademica conferitole da questo omaggio del prof. Ekelöf. Gli risulta infatti che la Biblioteca non possiede alcuna copia di quella celeberrima memoria, pubblicata 130 anni or sono, in un numero di copie non superiore a 100.

Il Socio Picone mette in evidenza che questa memoria, com'è ben noto, segna l'inizio della Fisica-matematica moderna. In essa, per esempio, è usato, per la prima volta, il termine *funzione potenziale*. Con essa, i matematici possono levarsi la legittima curiosità di vedere dove e come, per la prima volta, fosse scritta la formola di Green trasformante un integrale di volume in integrale di superficie e introdotta la funzione di Green, così cara ai loro cuori.

Il Socio D'Erasmo presenta alcune sue recenti pubblicazioni, fra cui un opuscolo destinato a mettere in luce l'opera vulcanologica del suo Maestro Giuseppe De Lorenzo, ed il volume III della « Bibliografia geologica d'Italia », che riguarda la Campania. Questo ultimo, pubblicato, come i precedenti, sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche, è dovuto alla collaborazione dello stesso prof. D'Erasmo e della dott. M. L. Benassai Sgadari

e costituisce, fra le bibliografie regionali italiane, una delle più ricche, comprendendo le indicazioni bibliografiche di circa 9000 pubblicazioni, oltre ad una introduzione che riassume assai brevemente le attuali conoscenze sulla geologia della regione.

L'oratore, mentre rinnova i suoi più vivi ringraziamenti al Consiglio Nazionale delle Ricerche, si augura che l'opera possa essere di qualche utilità per quanti si occupano di geologia campana.

Il Presidente si compiace vivamente con il Collega D'Erasmo per il prezioso contributo da lui dato all'importante lavoro.

Il Socio Crocco presenta il volume, edito dall'Associazione Italiana Razzi, contenente i Rendiconti del VII Congresso Internazionale Astronautico, svoltosi a Roma dal 17 al 22 settembre 1956, osservando che le Memorie presentate in questo Congresso sono più numerose di quelle trattate nelle manifestazioni precedenti. Il volume vede la luce con un po' di ritardo, a causa di ragioni varie, ma tale ritardo, in questo caso, può essere considerato utile, in quanto gli avvenimenti sensazionali che hanno avuto luogo in questi ultimi tempi nel campo dell'astronautica sono venuti ad avvalorare le tesi sostenute dagli scienziati che hanno partecipato al Congresso.

Il Socio Crocco, nel fare omaggio dell'opera alla Biblioteca accademica, confida che essa possa essere utilmente consultata da tutti coloro che si interessano d'astronautica.

Il Presidente ringrazia i Soci Desio, Picone, D'Erasmo e Crocco e presenta quindi il volume dal titolo « Alcune Memorie Matematiche » del Collega Francesco Paolo Cantelli, edito dalla Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Roma, in occasione delle onoranze tributate al predetto professore mercoledì 14 corrente.

Il prof. Giordani, dolente di non aver avuto la possibilità di intervenire alla cerimonia, assicura però che l'Accademia è stata degnamente rappresentata dal Socio Picone e desidera esprimere al Collega Cantelli, Matematico insigne e venerato Maestro, i sentimenti di affettuoso compiacimento e di cordiale augurio dei Soci tutti.

La Classe si associa con un vibrante applauso.

Il Presidente presenta il fascicolo n. 3 (marzo 1958) dei Rendiconti ed è lieto di constatare che la pubblicazione ha ripreso il ritmo regolare, grazie, soprattutto, alla solerzia dei Segretari Accademici.

Il Segretario accademico presenta le opere inviate in omaggio all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note, per la pubblicazione nei Rendiconti, i Soci: Sansone (per conto del Collega Margaria), G. Bompiani, Chisini, Chiarugi, Signorini, Natta, Cotronei, Quilico, Perucca (a nome del Collega Deaglio), G. B. Dal Piaz, Caglioti, Supino, D'Ancona e Armellini.

Il Socio Panichi presenta una sua Memoria dal titolo « Superfici sferiche armoniche e coordinazione ».

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

ARTOM M. e GENTILE C. – Spettrofotometro a filtri interferenziali (pres. dal Corrisp. R. DEAGLIO).

BENEDETTI E. L. – Sulla presenza di granuli ferruginosi nell'Apparato di Golgi delle cellule eritroblastiche (pres. dal Corrisp. G. BOMPIANI).

BOYARSKY L. L. – Sulla relazione tra frequenza di stimolo e fatica nella placca neuromotrice (pres. dal Socio R. MARGARIA).

EVANGELISTI G. – Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche. Nota I e II (pres. dal Corrisp. G. SUPINO).

GIANNUZZI M. A. – Determinazione della densità delle componenti di un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse. Nota II (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

HAIMOVICI M. – Alcune proprietà delle decomposizioni dei sistemi differenziali (pres. dal Socio B. SEGRE).

MARCHIONNA E. – Sul teorema di Riemann–Roch relativo alle varietà algebriche. Nota III (pres. dal Socio O. CHISINI).

MARINOZZI V. – Nuovi rilievi sulla fine struttura degli alveoli polmonari desunti dall'osservazione al microscopio elettronico di sezioni ultrasottili sottoposte ad impregnazione argentea (pres. dal Corrisp. G. BOMPIANI).

RIZZA G. B. – Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa (pres. dal Socio B. SEGRE).

TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E. – Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – III. Movimenti passivi e peristalsi (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E. – Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. – IV. Sul cosiddetto peristaltismo terziario dell'esofago, o motilità segmentale non peristaltica (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

VESENTINI E. – Sopra i sistemi fibrati kähleriani compatti (pres. dal Socio B. SEGRE).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 17 maggio 1958

- ALEXINSCHI AL. — Vedi: POPESCU-GORJ A., NICULESCU E. și ALEXINSCHI AL.
- AREN Boris. — *Atlas Geologiczny Polski. Zagadnienia stratygraficzno-facjalne*. Fascicolo 11: *Trzecieorząd*. Warszawa, Instytut Geologiczny, 1957. 1 foglio di introduzione e 5 tavv., in-4° obl.
- ASCOLI Piero. — *Microfaune della serie eoecenica di Rio Repregoso e della serie oligocenica superiore di Mombisaggio-Mongariolo (Tortona-Alessandria)*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXII, 1956, n. 3.
- *Microfaune del Tortoniano di Mombisaggio e della serie pliocenica di Volpeglino*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXIII, 1957, n. 1.
- AVAZBAKIEVA M. F. — *Vlijanie klimata Kazahstana i Kirgizii na organizm čeloveka*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1958. Pp. 206, in-8°, con figg.
- BENASSAI SGADARI M. L. — Vedi: *Bibliografia Geologica d'Italia*.
- BENCI G. — *Un'ipotesi sulla formazione della superficie terrestre e dei satelliti*. Ancona, Stab. Tip. Pucci, 1958. Pp. 20, in-8°, con figg.
- BERINI Luciana. — *Studi paleontologici sul Lias del Monte Albenza (Bergamo). Lamelli-branchi e gastropodi del Lias inferiore*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXIII, 1957, n. 1.
- Bibliografia Geologica d'Italia*. Volume III: *Campania*. A cura di G. D'Erasmus e M. L. Benassai Sgadari. Napoli, Stab. Tip. Guglielmo Genovese, 1958. Pp. XIX-553, in-8° (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Comitato per la Geografia, Geologia e Mineralogia).
- Brevi cenni sui risultati ottenuti dagli studi del prof. Salvatore Di Franco, già Direttore dell'Istituto e del Museo di Mineralogia dell'Università di Catania*. Catania, Tip. G. Zuccarello e Figli, 1958. Pp. 14, in-8°.
- BYKOV B. A. — *Geobotanika*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1957. Pp. 381, in-8°, con figg.
- CAMBONI Michele. — *L'importanza sociale di una razionale terapia etiologica e funzionale delle cardiopatie reumatiche*. Roma, Istituto di Medicina Sociale, 1958. Pp. 89, in-8° (Collana di Studi sui Problemi Medico-Sociali, XLIII).
- CASSINIS Giuseppe. — *Su alcune specie di «Aptychus» del Giura superiore e della Creta inferiore delle Prealpi Bresciane*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXIII, 1957, n. 4.
- CASTELNUOVO-TEDESCO Ugo. — *La figura umana di Gaetano Pieraccini*. Estr. da « Il Ponte », a. XIV, 1958, n. 4.
- CITA M. B. — *Studi stratigrafici sul sistema Cretaceo in Italia*. Nota I: *Introduzione allo studio del Cretaceo italiano*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXIV, 1958, n. 1.
- CONGRESSO (VII) INTERNAZIONALE ASTRONOMICOMICO. ROMA, 17-22 SETTEMBRE 1956. — *Rendiconti*. Roma, Associazione Italiana Razzi, 1956. Pp. XXVI-927, in-8°, con tavv.
- DAUVILLIER Alexandre. — *Le volcanisme lunaire et terrestre. Origine des continents, des océans et des atmosphères. L'énergie géothermique*. Paris, Éditions Albin Michel, 1958. Pp. 30, in-8°, con figg. (« Sciences d'Aujourd'hui »).
- D'ERASMO Geremia. — *Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche durante l'anno 1957 letta nell'adunanza plenaria del dì 26 gennaio 1958*. Estr. da « Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli », ser. 4^a, vol. XXV, 1958.
- *La Vulcanologia nell'opera di Giuseppe De Lorenzo*. Estr. da « Bulletin Volcanologique », ser. 2^a, t. XIX, 1958.

- D'ERASMO Geremia. — Vedi: *Bibliografia Geologica d'Italia*.
- DESIO Ardito. — « *Argille scagliose* » e *strutture di tipo appenninico nel Peloponneso e nelle Isole Egee*. Estr. da « Bollettino della Società Geologica Italiana », vol. LXXV, 1956.
- DESIO Ardito e ZANETTIN Bruno. — *Spedizione scientifico-alpinistica Italiana al Karakorum (Himalaya) 1953-1955. Notizie geologico-petrografiche preliminari sul bacino del ghiacciaio Baltoro*. Estr. da « La Ricerca Scientifica », a. XXVII, 1957, n. 3.
- *Sur la constitution géologique du K2 (8611 m) dans la chaîne du Karakorum (Himalaya)*. Estr. da « Bulletin de la Société Géologique de France », ser. 6^a, t. VI, 1956.
- FIorentini Maria C. — *La microradiografia elettronica come mezzo complementare di indagine nello studio dei giacimenti minerali*. Estr. da « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », a. XIII.
- *I rapporti di giacitura della Gonfolite col substrato mesozoico a Monte Olimpino (Como)*. Estr. da « Atti della Società Italiana di Scienze Naturali », vol. XCVI, 1957, fasc. 1-2.
- FRANCHINO A. — *Studi stratigrafici sul sistema Cretaceo in Italia*. Nota III: *Il Flysch e la Scaglia della Brianza orientale fra Olginate e Cernusco Monteverchia*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXIV, 1958, n. 1.
- GALUZO I. G. — *Argasovye klešči (Argazidy) i ih épizootologičeskoe značenie (sistematika, biologija, vredonosnost' i mery bor'by)*. Alma-Ata, Izdatel'stvo Akademii Nauk Kazahskoj SSR, 1957. Pp. 131, in-8°, con figg.
- GIORCELLI Augusto. — *La serie stratigrafica della Valle dell'Ardof Bormio (Alpi Retiche)*. Estr. da « Rendiconti della Società Mineralogica Italiana », a. XIII.
- GIUNTA ILACQUA Margherita. — *I foraminiferi calabrieri di Rometta superiore (Messina)*. Estr. da « Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia », vol. LXII, 1956, n. 4.
- GREEN George. — *An essay on the application of mathematical analysis of the theories of electricity and magnetism*. Nottin-
- gham, T. Wheelhouse, 1928. Facsimile Edition. Göteborg, Wezäta-Melins Antiebolag, 1958. Pp. IX-72, in-8°.
- INSTITUT D'ASTROPHYSIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE. OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE. — *An Atlas of nitrous oxide, methane and ozone infreared absorption bands*. P. II: *Measures and Identifications*. Liège, 1957. Pp. 40, in-8°.
- Klucze do oznaczania owadów Polski. Fasc. XIX, nn. 43-44; XXVIII, n. 1. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1957. Fasc. 2, in-8°, con figg.
- METALLO A. — *Meccanismo della circolazione superficiale del Mediterraneo*. Estr. da « Rivista Marittima », 1958, gennaio.
- NIČULESCU E. — Vedi: POPESCU-GORJ A., NIČULESCU E. și ALEXINSCHI Al.
- NORDIO Ezio. — *Il sottosuolo di Milano*. A cura dell'Istituto di Geologia, Geografia Fisica e Paleontologia dell'Università di Milano. Milano, Comune di Milano, Servizio Acqua Potabile, 1957. Pp. VIII-108, in-8°, con tavv.
- PANNARIA Francesco. — *Il mondo fisico di retroscena, antiparticelle, antireazione chimica*. Estr. da « Bollettino della Federazione Nazionale dell'Ordine dei Chimici », a. VI, 1957, n. 11-12.
- *Il moto in assenza di forze ed il moto di scambio*. Estr. da « Ingegneria Ferroviaria », 1955, n. 3.
- *Mutazione fisica, reazione chimica e relatività*. Estr. da « Bollettino della Federazione Nazionale degli Ordini dei Chimici », a. VI, 1957, maggio, giugno, luglio-agosto.
- *Nel V Centenario della nascita di Leonardo da Vinci 1452-1519. Il principio di inerzia*. Estr. da « Ingegneria Ferroviaria », 1952, n. 10.
- *Il principio di cambio. Conseguenze biosfiche di una nuova concezione del moto*. Estr. da « Rassegna del Progresso Medico Internazionale, Recentia Medica », vol. XX, 1955, nn. 7-8.
- *Le « sollecitazioni di scambio » e gli « scambi di accelerazione »*. Estr. da « Ingegneria Ferroviaria », 1954, n. 10.
- POPESCU-GORJ A., NIČULESCU E. și ALEXINSCHI Al. — *Lepidoptera familia aegeriidae*. București, Academia Republicii Populare Romîne, 1958. Pp. 197, in-8°, con tavv. (Fauna Republicii Populare Romîne. Insecta, vol. XI, fasc. 1).

- POZZI Renato. — *La Geologia della bassa valle di Fraele (Alpi Retiche)*. Estr. da « *Eclogae Geologicae Helveticae* », vol. L, 1957, n. 1.
- *Sulla presenza di Pliocene nel sottosuolo di Torre Garofoli (Alessandria)*. Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXIII, 1957, n. 4.
- REGGIORI G. — *Studi stratigrafici sul sistema Cretaceo in Italia*. Nota II: *Gli affioramenti cretacei della zona nord-occidentale del Lago di Varese*. Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXIV, 1958, n. 1.
- ROSSI RONCHETTI Carla. — *I foraminiferi del deposito elveziano di Dogliani (Cuneo)*. Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXI, 1955, n. 4.
- *Sopra un singolare carattere morfologico dell'Ursus spelaeus Ros.* Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXI, 1955, n. 4.
- SALVATORI Umberto. — *I coralli e i foraminiferi del Miocene inferiore di M. Curlo (Voghera)*. Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXII, 1956, n. 2.
- SANTINI Letizia. — *Studi stratigrafici sul Terziario subalpino lombardo*. Nota VII: *Studio stratigrafico e micropaleontologico delle formazioni marmoso-arenacee della gonfolite di Como*. Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXII, 1956, n. 4.
- UNIVERSITÀ DI MILANO. ISTITUTO DI GEOLOGIA, GEOGRAFIA FISICA E PALEONTOLOGIA. — *Pubblicazioni del direttore dr. prof. Ardito Desio fino al 1952*. S.n.t. Pp. 9 e un'appendice, in-4° (In ciclostile).
- *Storia dell'Istituto. Attività scientifica e didattica 1925-1956*. Milano, 1957. Pp. 39, in-8°, con tavv.
- VILLA Floriano. — *Studi stratigrafici sul Terziario subalpino lombardo*. Nota IV: *Gli affioramenti terziari del lago di Varese*. Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXI, 1955, n. 2.
- *Studi stratigrafici sul Terziario subalpino lombardo*. Nota VI: *Microfaune e microfacies del Nummulitico di Travedona (Varese)*. Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXI, 1955, n. 2.
- ZANETTIN Bruno. — Vedi: DESIO Ardito e ZANETTIN Bruno.
- ZINONI A. — *Microfaune plioceniche del Golfo di Orosei (Sardegna)*. Estr. da « *Rivista Italiana di Paleontologia e Stratigrafia* », vol. LXIV, 1958, n. 1.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 10 giugno 1958

Presiede il Presidente FRANCESCO GIORDANI

NOTE DI SOCI

Chimica. — *Sulle frequenze stretching N—H dell'ammonio nei suoi sali semplici e complessi* (*) Nota di VINCENZO CAGLIOTI e CLAUDIO FURLANI, presentata (**) dal Socio V. CAGLIOTI.

Nel corso di studi sul comportamento chimico e sugli spettri di vibrazione di alcuni sali semplici e complessi dell'ammonio è stato osservato che le frequenze delle vibrazioni stretching dell'ammonio aumentano nel passare dai sali semplici (NH_4F o NH_4Cl) a sali complessi come $(\text{NH}_4)_2\text{SiF}_6$ o $(\text{NH}_4)\text{BF}_4$, mentre contemporaneamente aumenta la tendenza a formare composti di addizione con NH_3 . Dai dati roentgenografici noti sulla struttura del reticolo di tali sali risulta che la coordinazione degli anioni fluoro e cloro attorno all'ammonio non è sempre dello stesso tipo (vi possono essere 8 oppure 12 anioni attorno ad ogni gruppo NH_4^+), ma che le distanze NH_4^+ -alogeno sono sistematicamente più grandi nei sali complessi che in quelli semplici (ad esempio $\text{NH}_4\text{—F}$ è 2,66 Å in NH_4F e circa 2,98 Å in $(\text{NH}_4)_2\text{SiF}_6$, ecc.); abbiamo allora pensato che tra l'aumento delle distanze interioniche e l'innalzamento delle frequenze stretching potesse sussistere un rapporto di causa ed effetto, e per dimostrare tale ipotesi abbiamo cercato una funzione potenziale per lo ione ammonio in base alla quale si potesse prevedere almeno la costante di forza principale di stretching N—H, e, considerando l'effetto

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica Generale delle Università di Roma e di Trieste.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

del campo cristallino generato dagli anioni circostanti ad uno ione NH_4^+ come una perturbazione, abbiamo investigato l'effetto di variazioni della distanza ammonio-alogeno sulla forma della funzione potenziale e sul valore delle costanti di forza N-H , ottenendo previsioni in piena concordanza con i dati sperimentali, sia riguardo all'esistenza ed all'ammontare dell'effetto di innalzamento della frequenza, che riguardo ai valori assoluti delle costanti di forza.

Il metodo seguito per l'impostazione della funzione potenziale è stato quello di Hartmann («Z. Naturforsch.», 2 a, 689 (1947)), con lievi modifiche; nella descrizione del campo cristallino, per attenerci ad un modello unico, l'abbiamo supposto eguale a quello che si avrebbe in un reticolo nel quale ogni ione NH_4^+ fosse circondato ad egual distanza da otto ioni fluoro (schematizzati come cariche negative $-e$) posti ai vertici di un cubo. Tale supposizione è in parte arbitraria, ma dà certamente la corretta simmetria ed il corretto ordine di grandezza dell'intensità del campo cristallino; il fatto che la coordinazione reale attorno allo ione ammonio possa essere nei singoli casi un po' differente da quella supposta non può influenzare la validità delle previsioni ottenute in base al modello citato, ma tutt'al più modificare lievemente i risultati quantitativi.

Prima di passare però allo studio dell'ammonio abbiamo voluto collaudare la bontà della trattazione teorica prescelta, applicandola all'isostera molecola CH_4 , per la quale è noto sperimentalmente un maggior numero di proprietà caratteristiche; le previsioni ottenute si sono rivelate anche qui in accordo molto soddisfacente coi dati sperimentali.

TRATTAZIONE TEORICA E SUA APPLICAZIONE ALLA MOLECOLA CH_4 ⁽¹⁾.

Com'è noto, Hartmann (loc. cit.) ha proposto di considerare le molecole CH_4 e NH_4^+ (e noi aggiungiamo qui che si potrebbe studiare con lo stesso metodo anche lo ione BH_4^-) come atomi di pseudo-neon, nei quali gli otto elettroni di valenza sono nella stessa configurazione $1s^2$ dello stato fondamentale $(2s)^2 (2p)^6$ del Ne (o del C^{4-} o dell' N^{3-}); è possibile in tal caso tener conto in modo completo di tutte le interazioni elettroniche trattandole coi metodi della strutturistica atomica. Quale nucleo centrale viene considerato quello del C o dell' N^+ con carica \approx schermata per l'effetto degli elettroni $(1s)^2$, e i nuclei di H vengono trattati come cariche perturbatrici con un metodo che ricalca i tratti essenziali della teoria del campo dei leganti nei complessi elettrostatici. L'operatore dell'energia potenziale per il problema centrale

(1) Mentre il presente lavoro era in corso di stesura, H. HARTMANN e G. GLIEMANN hanno pubblicato una analoga trattazione, mediante la quale essi sono riusciti a prevedere tutte le frequenze di vibrazione di CH_4 , CD_4 e NH_4^+ ; essi non hanno però preso in considerazione l'effetto del campo cristallino sulle frequenze dell' NH_4^+ ; e le loro previsioni risultano meno vicine delle nostre ai dati sperimentali («Z. Phys. Chem.», N. F., 15, 108 (1958)).

separabile è $-\sum_i^8 \frac{Z_o e^2}{r_i}$ e tutte le altre interazioni vengono considerate come perturbazioni; l'operatore totale dell'energia potenziale è quindi:

$$(1) \quad V = -\sum_i^8 Z_o \frac{e^2}{r_i} - \sum_i^8 \frac{(\mathfrak{Z} - Z_o) e^2}{r_i} + \sum_{i,j} \frac{e^2}{r_{ij}} - \sum_i^8 \sum_H^4 \frac{e^2}{r_i} + \frac{4e^2}{R} \mathfrak{Z} + \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

dove l'indice i si riferisce agli elettroni, l'indice H ai nuclei di idrogeno, e R è la distanza C—H (o N—H); \mathfrak{Z} è 4 per C, e 5 per N⁺.

Usando autofunzioni idrogenoidi Hartmann (loc. cit.) ha potuto calcolare, in accordo abbastanza buono con l'esperienza, la distanza di equilibrio C—H, l'energia di formazione e la suscettività diamagnetica del metano. Noi abbiamo introdotto qualche lieve modifica nella forma e nell'uso dello operatore (1), ottenendo un ulteriore miglioramento dei risultati; anzitutto abbiamo usato autofunzioni $2l$ del tipo di Slater anziché idrogenoidi; di conseguenza abbiamo supposto l'effetto di schermo di un elettrone $1s$ eguale a 0,85 e anziché ad $1e$, e la carica nucleare del C agente sugli elettroni eguale quindi a $\mathfrak{Z} = 4,30$ anziché 4. La carica del nucleo di C agente sui nuclei d'idrogeno è certamente più schermata, dato che i protoni sono molto meno penetranti delle orbite $1s$ che non gli elettroni di valenza, e l'abbiamo quindi assunta eguale a 4,15. Infine, la repulsione tra i nuclei decresce probabilmente in modo più rapido di quello indicato dalla legge di Coulomb, e noi l'abbiamo supposta inversamente proporzionale ad una potenza di R leggermente superiore ad 1. L'operatore (1) diventa quindi (in unità atomiche):

$$(2) \quad V = -\sum_i^8 \frac{Z_o}{r_i} - \sum_i^8 \left(\frac{4,30 - Z_o}{r_i} \right) + \sum_{i,j} \frac{1}{r_{ij}} - \sum_i^8 \sum_H^4 \frac{1}{r_{iH}} + \frac{4 \times 4,15}{R^{1,1}} + \frac{3\sqrt{6}}{2R}$$

e l'energia totale assume la forma:

$$(3) \quad E = -Z_o^2 - 2\sigma Z_o + 28 F^o(2l, 2l) - 2G^i(2l, 2l) - \\ - \frac{6}{5} F^2(2l, 2l) - 32G(o) + \frac{16,6}{R^{1,1}} + \frac{3,6744}{R}$$

dove σ è la costante di schermo e F^k , G^k e $G(k)$ sono gli integrali definiti nell'appendice. Sostituendo a questi integrali i loro valori numerici, l'energia è data da:

$$(4) \quad E = Z^2 - 3,86155 Z_o - 32 Z_o G(o) + \frac{16,6}{R^{1,1}} + \frac{3,6744}{R}$$

e risulta quindi funzione sia di Z_o che di R ; in un diagramma (R, Z_o) i valori di energia sono rappresentati da punti o da curve quotate (ved. fig. 1). Il minimo di energia, corrispondente alla configurazione di equilibrio dello stato fondamentale del metano, si ha per $R = 2,025$ u. at. = $1,072 \text{ \AA}$ e $Z_o = 2,725$; il corrispondente valore dell'energia (che è eguale all'energia di formazione di CH_4 a partire da $\text{C}^{4+} + 4\text{H}^+ + 8e^-$) è $-8,193$ u. at. en. = $221,8 \text{ eV}$;

questi valori sono vicini a quelli riportati da Hartmann ($1,06 \text{ \AA}$, $2,777$ e $-7,70$ u. at. en.), ma in miglior accordo coi valori sperimentali ($R = 1,093 \text{ \AA}$ ed $E = -8,14$ u. at. en.).

Osserviamo ora che nel diagramma $E-R-Z_0$ di fig. 1 si è supposto che le quattro distanze $C-H$ (R_1, R_2, R_3 e R_4) siano eguali tra di loro ed eguali ad R ; perciò ogni spostamento nel senso di R crescente o decrescente rappresenterà una deformazione di stretching simmetrico (A_1, T_1) della molecola CH_4 . La curva di Morse corrispondente a tale modo di vibrazione sarà data da una sezione verticale attraverso la superficie $E-R-Z_0$, passante per il minimo: ad esempio una sezione parallela all'asse R (linea tratteggiata in

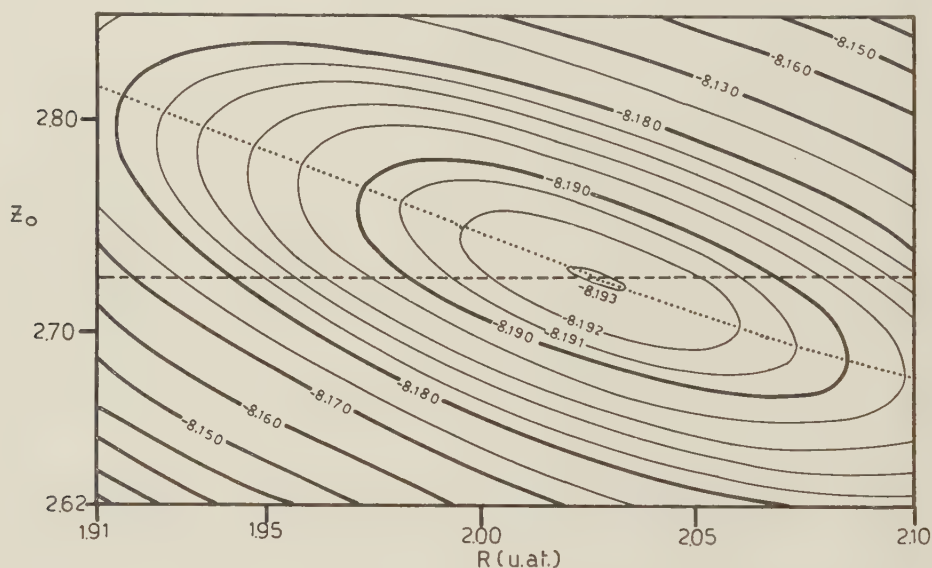


Fig. - 1. Calcolo dell'energia della molecola CH_4 .

fig. 1) rappresenterebbe le variazioni di energia dovute a spostamenti dei soli nuclei, essendo costante Z_0 , che è il parametro caratteristico della distribuzione degli elettroni. Volendo invece tener conto del fatto che anche gli elettroni seguono in parte il moto dei nuclei, la curva di Morse da prendere in esame sarà data dalla sezione che passa per tutti i punti di minimo dell'energia rispetto a Z_0 (percorso punteggiato in fig. 1); tale curva, che nelle vicinanze del minimo è rappresentabile dall'equazione:

$$(5) \quad \Delta E = 1/2 F \Delta R^2$$

corrisponde ora all'effettiva variazione di energia che si ha nel corso di una vibrazione stretching simmetrica; il coefficiente F (che ha il significato di derivata seconda di E rispetto ad R nel punto di minimo e nella direzione della curva punteggiata) ha un'espressione analitica molto complessa e si è perciò preferito determinarlo graficamente dalla curvatura della superficie

$E-Z_o-R$ costruita per punti. D'altra parte la variazione di energia ΔE che accompagna la vibrazione stretching A_1 è data dalla teoria delle vibrazioni molecolari nella forma:

$$(6) \quad \Delta E = 1/2 f_r (\Delta R_1^2 + \Delta R_2^2 + \Delta R_3^2 + \Delta R_4^2) + 1/2 \sum_{i,j}^4 f_{rr'} \Delta R_i \Delta R_j = \\ = 1/2 (4f_r + 12f_{rr'}) \Delta R^2.$$

Dal confronto della (6) con la (5) si può ricavare il valore della costante di forza principale f_r dello stretching C—H:

$$(7) \quad f_r = \frac{F - 12f_{rr'}}{4}$$

dove F , come già detto, si ricava graficamente, mentre $f_{rr'}$ si può invece calcolare facilmente, dato che nessuno dei termini della (4) che dà derivate miste in $\partial R_i \partial R_j$ diverse da zero è contemporaneamente anche funzione di Z_o . In tal modo si calcola per il metano:

$$f_r = 0,318 \text{ u. at.} = 4,92 \cdot 10^5 \text{ dine/cm} \quad f_{rr'} = 0,046 \text{ u. at.} = 0,71 \cdot 10^5 \text{ dine/cm}$$

mentre il valore sperimentale è $f_r = 5,04 \cdot 10^5 \text{ dine/cm sec.}$ G. Herzberg (« Infrared & Raman Spectra », p. 182; altri Autori danno valori leggermente differenti). Il buon accordo ottenuto nella previsione delle distanze interatomiche dell'energia di formazione e della costante di stretching principale del metano conferma quindi l'attendibilità del procedimento di calcolo prescelto.

IONE AMMONIO.

Come primo tentativo di estensione del metodo di calcolo illustrato nel paragrafo precedente allo ione ammonio, si è considerato il caso di uno ione NH_4^+ completamente libero (come se fosse una molecola gassosa isolata): allora la funzione potenziale è ancora la (3), solo con z aumentato di un'unità (cioè eguale a 5,30, risp. 5,15).

Ripetendo il procedimento di calcolo già esposto per il metano, si ottengono i seguenti valori di equilibrio, al minimo dell'energia:

$$R = 1,932 \text{ u.at.} = 1,002 \text{ \AA} \quad Z_o = 3,374 \quad E = -12,386 \text{ u. at. en.}$$

Questi valori potrebbero essere attendibili, data la mancanza di precisi dati sperimentali al riguardo; se però si va a calcolare, sempre col procedimento già visto, la costanti di forza di stretching N—N, si trova un valore decisamente troppo alto: $6,82 \cdot 10^5 \text{ dine/cm}$ contro il valore sperimentale $5,46 \cdot 10^5 \text{ dine/cm}$. Questo fatto ci ha indotto a sospettare che l'approssimazione dello ione NH_4^+ libero fosse inadeguata ed a prendere in considerazione l'influenza del campo elettrostatico, dovuto agli anioni che circondano lo

ione NH_4^+ nel reticolo dei suoi sali solidi: è risultato, come vedremo che è appunto l'effetto del campo cristallino ad abbassare la costante di forza fino a valori vicini a quello sperimentale, e che l'effetto è tanto maggiore quanto minore la distanza ammonio-alogeno, cioè quanto maggiore la perturbazione elettrostatica; si deve quindi considerare il valore relativamente basso della costante di stretching in NH_4F come tipico di uno ione ammonio fortemente perturbato dagli anioni suoi vicini nel reticolo, mentre il valore più alto riscontrato nei fluoruri complessi di ammonio sarebbe indizio di perturbazione diminuita in seguito all'aumento delle distanze interatomiche e tenderebbe al limite dell'alto valore corrispondente ad un ipotetico ione NH_4^+ libero.

TABELLA I.

Frequenze di stretching dello ione NH_4^+ in alcuni suoi sali (valori sperimentali).

Solido	Sistema crist.	$R_{\text{N-alog}} (\text{\AA})$ media	$\bar{\nu}_x (\text{cm}^{-1})$ stretch. simm.	$\bar{\nu}_3 (\text{cm}^{-1})$ stretch. asimm.
NH_4F	esag.	2,66	—	3100
$(\text{NH}_4)_2\text{SiF}_6$	cubico	2,98	3233	3314
NH_4BF_4	rombico	3,03	—	3335
NH_4PF_6	cubico	—	—	3350
NH_4Cl	cubico	3,34	3033	3134
$(\text{NH}_4)_2\text{PtCl}_6$	cubico	3,48	—	3225
$(\text{NH}_4)_2\text{PbCl}_6$	cubico	3,58	—	3238
$(\text{NH}_4)_2\text{SnCl}_6$	cubico	3,55	3162	3245

Il modello seguito per il calcolo del campo cristallino è già stato descritto all'inizio; esso risulta anche più chiaramente dalla fig. 2. L'atomo di N dell'ammonio è circondato a distanza R da 8 cariche negative puntiformi situate ai vertici di un cubo, che rappresentano altrettanti ioni F^- ; i legami $\text{N}-\text{H}$ sono diretti secondo le diagonali del cubo e puntano quindi verso quattro dei vertici di esso. Le interazioni elettrostatiche tra gli ioni fluoro e il nucleo di N e tra gli ioni fluoro e gli elettroni di valenza dell'ammonio si possono trascurare, perché le prime sono del tutto indipendenti, e le seconde praticamente indipendenti da R . Restano così da considerare le interazioni tra le cariche degli anioni ed i nuclei di idrogeno; esse portano il seguente contributo all'energia:

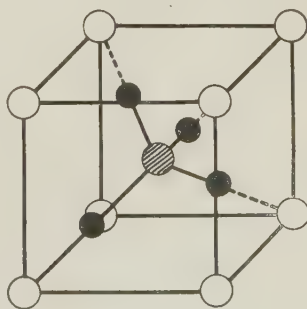
$$(8) \quad E' = -\frac{4}{R-R} - \frac{4}{R+R} - \frac{12}{\left(R^2 + R^2 + \frac{2}{3}RR\right)^{1/2}} - \frac{12}{\left(R^2 + R^2 - \frac{2}{3}RR\right)^{1/2}}.$$

TABELLA II.

Variazione calcolata dei valori R e Z_o di equilibrio e di f_r in funzione della distanza ammonio-alogeno R .

R (u. at.)	R (Å)	R (u. at.)	R (Å)	Z_o	$f_r \left(\frac{\text{dine}}{\text{cm}} \cdot 10^5 \right)$
∞	∞	1,932	1,022	3,374	6,82
8,00	4,23	1,935	1,024	3,371	6,75
7,00	3,70	1,939	1,025	3,370	6,63
6,50	3,44	1,944	1,028	3,366	6,52
6,00	3,17	1,948	1,030	3,363	6,36
5,80	3,06	1,952	1,032	3,361	6,25
5,60	2,96	1,955	1,034	3,359	6,14
5,40	2,85	1,959	1,036	3,356	6,01
5,20	2,75	1,966	1,040	3,352	5,77
5,00	2,64	1,977	1,046	3,346	5,44
4,80	2,54	2,004	1,060	3,333	4,78

Aggiungendo la (8) alla (4) e minimizzando, si vede che l'introduzione campo cristallino porta ad un abbassamento del valore di equilibrio di Z_o e ad un innalzamento di $(R)_o$ (ved. Tabella II); di conseguenza anche f_r (calcolato al solito modo, cioè partendo dalla determinazione grafica di F) risulta abbassato ⁽²⁾. Tutti e tre gli effetti, cioè le variazioni di R , Z_o e di f_r , aumentano in modo press'a poco esponen-



● H

 $N-H = R$

○ F

 $N-F = R$

● N

Fig. 2. — Modello per la descrizione del campo cristallino.

(2) In uno studio recente sulle frequenze di vibrazione dell'acqua nei complessi si è potuto stabilire che anche in tal caso una perturbazione di natura elettrostatica porta ad un allungamento della distanza di legame O—H e ad una diminuzione delle corrispondenti frequenze stretching (G. SARTORI, C. FURLANI e A. DAMIANI, Comunicazione al Simposio Internazionale su Composti di Coordinazione, Roma settembre 1957).

ziale al diminuire di \mathcal{R} (ved. fig. 3); in particolare per $\mathcal{R} = 5,00$ u. at. $= 2,65 \text{ \AA}$ (che è quasi esattamente la distanza ammonio-fluoro in NH_4F) il valore di f_r previsto è $5,44 \cdot 10^5$ dine/cm, mentre il valore sperimentale è $5,46 \cdot 10^5$, e per $\mathcal{R} = 5,60$ u. at. $= 2,97 \text{ \AA}$ (come si ha ad esempio in $(\text{NH}_4)_2\text{SiF}_6$) la

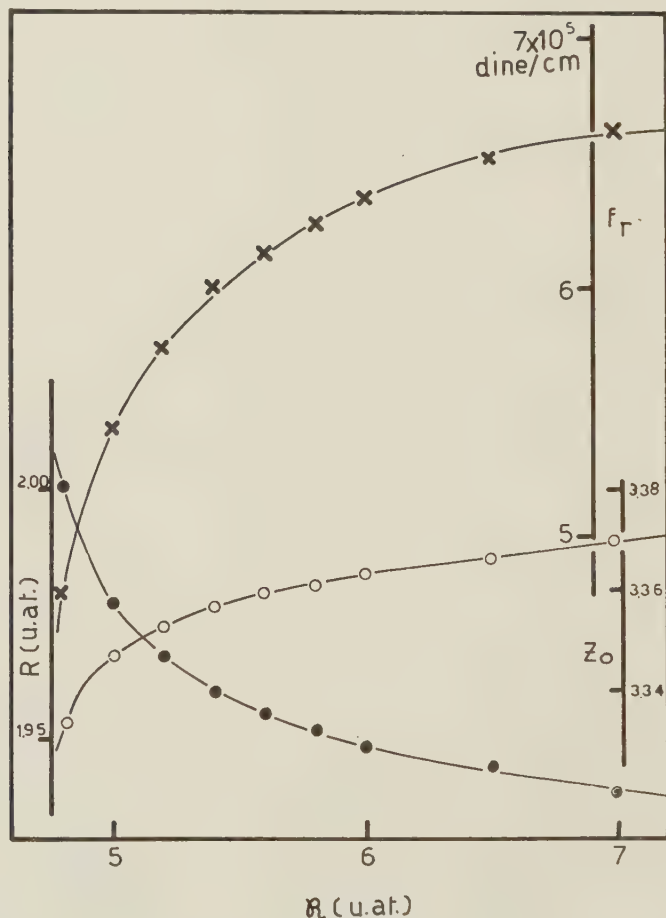
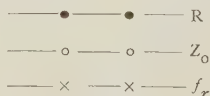


Fig. 3. - Variazioni di R , Z_0 e f_r in funzione di \mathcal{R} .



costante di forza si prevede aumentata a $6,14 \cdot 10^5$, cioè del 13 % e quindi per le frequenze di assorbimento corrispondenti si prevede un innalzamento di circa il 6,3 % mentre l'innalzamento osservato per ν_3 è da 3100 a 3314 cm^{-1} , cioè del 6,9 %.

Dal confronto tra queste previsioni teoriche e i dati sperimentali risulta quindi confermata l'ipotesi che la variazione delle frequenze stretching dell'ammonio nel passaggio dai suoi alogenuri semplici a quelli complessi sia

dovuta primariamente a variazioni di intensità del campo cristallino, anche se nel nostro modello semplificato del campo cristallino non tutti i fatti sperimentali noti sulla struttura cristallina dei sali di ammonio sono stati tenuti nel giusto conto. Ad esempio, si è trascurato il fatto che nel cloruro e nel fluoruro di ammonio la coordinazione attorno ad NH_4^+ è più compatta che negli alogenuri complessi (dodici atomi di cloro o fluoro anziché otto); ma ciò significa che la perturbazione esercitata dal campo cristallino sullo ione ammonio nei suoi alogenuri semplici è anche più forte di quanto da noi ammesso e non farebbe quindi che rinforzare l'effetto già previsto. Anche la semplificazione introdotta col considerare gli ioni alogenici come cariche negative puntiformi è abbastanza drastica; essa è probabilmente ancora giustificabile per il fluoro, ma non più per il cloro, i cui ioni sono molto più grandi. Qualitativamente si può però prevedere che l'effetto del campo cristallino sia minore per i cloruri che per i fluoruri di ammonio, poiché le distanze N—Cl sono sempre maggiori di quelle N—F, ed anche ciò è verificato sperimentalmente: infatti l'aumento di frequenza nel passare dai sali semplici a quelli complessi è di circa $200\text{--}250\text{ cm}^{-1}$ per i sali fluorurati, ma di soli 100 cm^{-1} per i sali clorurati.

APPENDICE.

Le autofunzioni di approssimazione zero scelte per gli elettroni $2s$ e $2p$ dell'atomo di pseudo-neon hanno una parte radiale del tipo di Slater:

$$R(r) = (Z_0^5/24)^{1/2} r \exp\left(\frac{-Z_0 r}{2}\right).$$

In tal caso la parte radiale è eguale per le autofunzioni s e p , e ciò semplifica il calcolo degli integrali G^k e F^k .

Nel calcolo dell'energia di perturbazione coi vari termini dell'operatore (2), l'integrazione fornisce i seguenti risultati:

$$-\sum_i \int \psi^* \frac{Z_0 - Z_0}{r_i} \psi d\tau = -8\sigma \overline{r^{-1}} = -2\sigma Z_0$$

$$\text{poiché } \overline{(r^{-1})_{2s}} = \overline{(r^{-1})_{2p}} = \frac{Z_0}{n^2} = \frac{Z_0}{4}.$$

L'integrale $\sum_{i,j} \int \psi^* \frac{1}{r_{ij}} \psi d\tau$ si calcola col solito metodo di Slater per la previsione dei termini spettroscopici in accoppiamento Russell-Saunders; si ha un solo termine (1S) e, trattandosi di un insieme di sottolivelli completi, vale la relazione:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \int \psi^* \frac{1}{r_{ij}} \psi d\tau &= 2(2p+1)(2s+1)[2F^0(2p, 2s) - 1/2 \sum_k C_{spk} G^k(2p, 2s)] + \\ &+ (2p+1)^2 [2F^0(2p, 2p) - 1/2 \sum_k C_{ppk} F^k(2p, 2p)] + \\ &+ (2s+1)^2 [2F^0(2s, 2s) - 1/2 \sum_k C_{ssk} F^k(2s, 2s)] = \\ &= 28F^0(2l, 2l) - 2G^1(2s, 2p) - \frac{6}{5}F^2(2l, 2l) \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 F^0(2l, 2l) &= \int_0^\infty \left[\int_0^{r_2} \frac{1}{r_2} R^2(r) r_1^2 dr_1 + \int_{r_2}^\infty \frac{1}{r_1} R^2(r) r_1^2 dr_1 \right] R^2(r) r_2^2 dr = \\
 &= \frac{Z_0^5}{24} \int_0^\infty \left[\int_0^{r_2} \frac{1}{r_2} e^{-Z_0 r_1} r_1^4 dr_1 + \int_{r_2}^\infty e^{-Z_0 r_1} r_1^3 dr_1 \right] \frac{Z_0^5}{24} r_2^4 e^{-Z_0 r_2} dr_2 = 0,18164 Z_0 \\
 F^2(2l, 2l) &= \int_0^\infty \frac{Z_0^5}{24} \left[\int_0^{r_2} \frac{1}{r_2^3} e^{-Z_0 r_1} r_1^6 dr_1 + \int_{r_2}^\infty r_2^2 e^{-Z_0 r_1} r_1 dr_1 \right] \frac{Z_0^5}{24} r_2^4 e^{-Z_0 r_2} dr_2 = \\
 &= 0,08789 Z_0 \\
 G^1(2s, 2p) &= \frac{Z_0^5}{24} \int_0^\infty \left[\int_0^{r_2} \frac{1}{r_2^2} e^{-Z_0 r_1} dr_1 + \int_{r_2}^\infty r_2 e^{-Z_0 r_1} r_1^2 dr_1 \right] \frac{Z_0^5}{24} r_2^4 e^{-Z_0 r_2} dr = \\
 &= 0,12050 Z_0.
 \end{aligned}$$

Sarà quindi

$$\sum_{i,j} \int \psi^* \frac{1}{r_{ij}} \psi d\tau = + 4,73845 Z_0.$$

L'energia di perturbazione dovuta all'interazione tra i quattro nuclei di idrogeno e gli otto elettroni di valenza risulta funzione di un solo parametro $G(0)$:

$$- \sum_i^8 \sum_H^4 \int \psi^* \frac{1}{r_{iH}} \psi d\tau = - 32 Z_0 G(0)$$

dove

$$\begin{aligned}
 G(0) &= \int_0^R \frac{Z_0^4}{24} r^4 \frac{1}{R} e^{-Z_0 r} dr + \int_R^\infty \frac{Z_0^4}{24} r^3 e^{-Z_0 r} dr = \\
 &= \frac{1}{Z_0 R} - e^{-Z_0 R} \left(\frac{R^2 Z^2}{24} + \frac{R Z_0}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{R Z_0} \right).
 \end{aligned}$$

Infine l'autovalore di approssimazione zero dell'energia è $-8 \left(\frac{1}{2} \frac{Z_0^2}{n^2} \right) = -Z_0^2$.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi. — *Propriétés spectrales des équations différentielles non-autoadjointes.* Nota di F. R. D. AGUDO (*) e FRANTIŠEK WOLF, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Soit $L = \sum_{j=0}^n a_j \frac{d^{n-j}}{dx^{n-j}}$, $a < x < b$, un opérateur formellement auto-adjoint avec des coefficients réels. Nous avons la formule de Green

$$\int_y^x (vLu - uLv) dx = [u, v](x) - [u, v](y),$$

où

$$[u, v] = \sum_{m=1}^n \sum_{\substack{j+k=m-1 \\ j, k \geq 0}} (-1)^j u^{(k)} (a_{n-m} v)^{(j)}.$$

Si u, v sont des solutions de $(L - \lambda)y = 0$, la valeur de $[u, v](x)$ ne dépend pas de la variable x . Si n est pair ($n = 2\nu$) et λ non réel, on a un système fondamental de solutions w_1, \dots, w_n avec les propriétés suivantes (1):

- (i) $w_1, \dots, w_\nu \in \mathcal{L}^2(a, c)$ (ii) $w_{\nu+1}, \dots, w_n \in \mathcal{L}^2(c, b)$, $a < c < b$
 (iii) $[w_\alpha, w_\beta] = 0$ si $\alpha, \beta \leq \nu$ ou $\alpha, \beta > \nu$.

Avec ces solutions nous pouvons construire la fonction de Green

$$G(x, y, \lambda) = \begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=\nu+1}^n F_{\alpha, \beta} w_\beta(x) w_\alpha(y), & (a < y \leq x < b) \\ \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=\nu+1}^n F_{\alpha, \beta} w_\beta(y) w_\alpha(x), & (a < x \leq y < b), \end{cases}$$

ou $(F_{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de $([w_\alpha, w_\beta])$.

L'opérateur intégral $\mathcal{G}(\lambda)$ engendré par le noyau $G(x, y, \lambda)$ est inverse à droite de l'opérateur $A - \lambda$ défini par $L - \lambda$ avec le domaine $\mathfrak{D}(A) = \{u/u^{(k)}, 0 \leq k < n \text{ absolument continus et } u, Lu \in \mathcal{L}^2(a, b)\}$. Si A est auto-adjoint, $\mathcal{G}(\lambda)$ est aussi inverse à gauche et par conséquent $\mathcal{G}(\lambda) = (A - \lambda)^{-1}$.

(*) Boursier de Fundaçãs Calouste Gulbenkian et Instituto de Alta Cultura, Portugal.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1958.

(1) V. KODAIRA, *Eigenfunction expansions*, « American Journal of Math. », 72, 503-513 (1950).

2. Appliquons maintenant les résultats précédents à l'opérateur $L = \frac{d^n}{dx^n}$, $-\infty < x < \infty$, $n = 2\nu$, que nous montrerons autoadjoint.

Prenons $\lambda = i$ et soient ρ_1, \dots, ρ_ν les racines $\sqrt[n]{i}$ avec $\operatorname{Re} \rho_j > 0$ et $\rho_{\nu+1}, \dots, \rho_n$ ($\rho_{\nu+k} = -\rho_k$) les racines avec $\operatorname{Re} \rho_j < 0$. Les fonctions $w_j = e^{\rho_j x}$ forment un système de solutions de l'équation $\frac{d^n}{dx^n} y - iy = 0$ avec les propriétés (i) et (ii).

De plus, on a

$$[w_\alpha, w_\beta] = \begin{cases} \frac{\rho_\alpha^n - \rho_\beta^n}{\rho_\alpha + \rho_\beta} e^{(\rho_\alpha + \rho_\beta)x} = 0 & \text{si } \rho_\alpha \neq -\rho_\beta \\ n\rho_\alpha^{n-1} & \text{si } \rho_\alpha = -\rho_\beta \quad \text{ou } \beta - \alpha = \pm \nu. \end{cases}$$

et la propriété (iii) est aussi satisfaite.

$$\text{Nous obtenons } F_{\alpha, \beta} = -F_{\beta, \alpha} = \begin{cases} i\rho_j/n, & \text{si } \alpha = j, \beta = \nu + j \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

et

$$G(x, y, i) = \begin{cases} \frac{i}{n} \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j e^{\rho_j(y-x)}, & y \leq x, \\ \frac{i}{n} \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j e^{\rho_j(x-y)}, & x \leq y. \end{cases}$$

Aucune des solutions est de carré sommable en $(-\infty, \infty)$ et A est autoadjoint, et $\mathfrak{G}(\lambda)$ est l'inverse de $A - \lambda$.

3. Enfin nous posons la question suivant: Quelle perturbation de la forme $B = \sum_{r=1}^n b_r(x) \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}$ est A -compact, c'est à dire telle que $\mathfrak{D}(B) \supseteq \mathfrak{D}(A)$ et pour tous les ensembles $\mathfrak{G} = \{x \mid \|x\| + \|Ax\| \leq M\}$ la fermeture de $B\mathfrak{G}$ est compact ? ⁽²⁾.

On sait que $BR_i = B(A - i)^{-1}$ doit être complètement continu. Nous avons

$$BR_i f = \frac{i}{n} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^n \left[(-1)^{n-r} b_r \rho_j^{n-r+1} e^{-\rho_j x} \int_{-\infty}^x e^{\rho_j y} f(y) dy + b_r \rho_j^{n-r+1} e^{\rho_j x} \int_x^{\infty} e^{-\rho_j y} f(y) dy \right]$$

(2) Voir la définition et les propriétés des opérateurs A -compacts en Gokhberg et Krein, Uspekhi 12, 47-117 (1957) (en russe) ou dans un article en anglais par F. Wolf à paraître prochainement dans les Communications on Pure and Applied Mathematics.

et BR_i est un opérateur intégral engendré par le noyau

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{n} \sum_{j=1}^v \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} b_r \rho_j^{n-r+1} e^{\varrho_j(y-x)}, & y < x, \\ \frac{i}{n} \sum_{j=1}^v \sum_{r=1}^n b_r \rho_j^{n-r+1} e^{\varrho_j(x-y)}, & y > x. \end{cases}$$

Avec

$$B_j(x) = \sum_{r=1}^n (-1)^{n-r} b_r(x) \rho_j^{n-r+1}$$

$$C_j(x) = \sum_{r=1}^n b_r(x) \rho_j^{n-r+1}$$

nous obtenons

$$n^2 |H(x, y)|^2 = \begin{cases} \sum_{j, \varepsilon=1}^v B_j \bar{B}_\varepsilon e^{(\varrho_j + \bar{\varrho}_\varepsilon)(y-x)}, & y < x, \\ \sum_{j, \varepsilon=1}^v C_j \bar{C}_\varepsilon e^{(\varrho_j + \bar{\varrho}_\varepsilon)(x-y)}, & x < y. \end{cases}$$

Comme $\lim_{y \rightarrow -\infty} e^{(\varrho_j + \bar{\varrho}_\varepsilon)y} = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-(\varrho_j + \bar{\varrho}_\varepsilon)y} = 0$, il est facile d'obtenir

$$n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H(x, y)|^2 dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, \varepsilon=1}^v \frac{B_j \bar{B}_\varepsilon + C_j \bar{C}_\varepsilon}{\rho_j + \bar{\rho}_\varepsilon} dx.$$

Par conséquence $H(x, y)$ est de carré sommable si tous les $b_r(x)$ le sont aussi. Dans cette hypothèse le domaine de B contient le domaine de A et ainsi nous avons obtenu une condition suffisante pour que B soit A -compact.

4. Application. Soit $C = A + B$ l'opérateur

$$\frac{d^{2v}}{dx^{2v}} + b_1 \frac{d^{2v-1}}{dx^{2v-1}} + \dots + b_{2v-1} \frac{d}{dx} + b_{2v}, \quad -\infty < x < \infty, \quad b_j \in \mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$$

avec le domaine $\mathfrak{D}(C) = \mathfrak{D}(A)$.

En conséquence des propriétés des perturbations A -compactes ⁽²⁾ nous pouvons dire:

(i) Tous les λ non-réels, exceptés ceux d'un ensemble discret, sont dans l'ensemble résolvant de C , c'est à dire pour ces valeurs de λ , l'équation $Cf - \lambda f = v$ a une et seulement une solution de carré sommable pour chaque $v \in \mathcal{L}^2(-\infty, \infty)$.

(ii) Pour λ non-réels, les ensembles $\{f \in \mathcal{L}^2(-\infty, \infty) \mid Cf = \lambda f\}$ et $\{f \in \mathcal{L}^2(-\infty, \infty) \mid C^*f = \lambda f\}$ ont la même dimension.

(iii) L'ensemble discret exceptionnel est composé des valeurs propres de C , avec un nombre fini de fonctions propres. La dimension des espaces Σ_i caractérisées par $(C - \lambda_i)^n \Sigma_i = 0$, λ_i fixe et n quelconque, est bornée.

Ainsi tout spectre essentiel, particulièrement le spectre continu de C est sur l'axe réel et les deux demi-plans sont des domaines de Fredholm.

Analisi matematica. — *Alcune proprietà delle decomposizioni dei sistemi differenziali.* Nota di MENDEL HAIMOVICI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

In una precedente Nota ⁽¹⁾ ci siamo già occupati delle decomposizioni dei sistemi differenziali: abbiamo definito le decomposizioni regolari, e dimostrato alcuni teoremi che permettono di stabilire quando una decomposizione sia regolare (per varietà integrali β -dimensionali).

Data una tale decomposizione di un sistema S in $S^{(1)}$ ed $S^{(2)}$, il trovare l'integrale generale di S riviene all'integrazione successiva di $S^{(1)}$ e poi — su di una varietà integrale generica di questo — di $S^{(2)}$.

Lo studio delle decomposizioni regolari può essere considerato sia dal punto di vista del calcolo, in quanto può offrire metodi semplificati di integrazione, sia dal punto di vista algebrico.

Fra i caratteri di un sistema S e quelli dei suoi componenti $S^{(1)}$ ed $S^{(2)}$ (nel caso di una decomposizione regolare) intercede la relazione

$$(1) \quad v_{\beta}^* + \mu_{\beta} + f_{\beta} = m_{\beta},$$

stabilita in N_1 . In questa formula, v_{β}^* denota il rango del sistema lineare Σ_{β}^* , cui debbono soddisfare le componenti di un elemento lineare E_r , per essere associato, nel sistema $S^{(1)}$, ad un elemento E_{β} integrale generico di S ; μ_{β} è il rango del sistema lineare, S'_{β} , cui deve soddisfare un E_r situato su di un E_r integrale generico di $S^{(1)}$ (r essendo il genere di questo) per essere associato ad un elemento piano E_{β} , integrale di $S^{(2)}$ e situato sullo stesso E_r . Inoltre, detto S_{β} il sistema lineare cui deve soddisfare un E_r per essere associato in S ad un E_{β} integrale generico di questo, m_{β} è il rango di S_{β} ed abbiamo $m_{\beta} = s_0 + \dots + s_{\beta}$, dove, s_0, \dots, s_{β} sono i caratteri di S . Consideriamo infine il sistema Σ_r delle relazioni cui deve soddisfare un E_r per essere situato su di un E_r integrale generico di $S^{(1)}$. Tenendo conto di Σ_{β}^* , Σ_r diviene Σ_{β}^* e S_{β} diviene \bar{S}_{β} : il numero di relazioni identiche intercedenti fra \bar{S}_{β} e Σ_{β}^* è f_{β} .

La (1) vale anche se β è il genere di $S^{(2)'}$, cioè di $S^{(2)}$ considerato su di una varietà \mathcal{O}_r integrale generica di $S^{(1)}$, a condizione di assumere l'elemento E_r sull' E_{β} integrale di $S^{(2)}$, invece che associato ad E_{β} .

Questa Nota ha per iscopo di presentare, nei teoremi I e II, alcune precisioni circa i numeri f_{β} ; con ciò la relazione (1) diviene più semplice nel caso, frequentissimo, in cui gli elementi piani integrali di S siano regolari per $S^{(1)}$.

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) M. HAIMOVICI, *Sulla decomposizione dei sistemi differenziali*, « Rend. Lincei » (VIII), vol. XXIII, 379-386 (1957). Questa Nota sarà citata con N_1 .

In questo caso (e soltanto in esso), come risulta dai detti teoremi, tutti gli f_β sono nulli, onde lo studio della decomposizione si semplifica.

§ 1. — CLASSIFICAZIONE DEGLI ELEMENTI PIANI INTEGRALI SINGOLARI DI UN SISTEMA DIFFERENZIALE ESTERNO S.

Sia dato un sistema differenziale chiuso S ed un suo elemento piano integrale h -dimensionale E_h .

Scriviamo le equazioni di S di grado minore di $h + 2$, sostituendo, in ogni prodotto esterno di grado g , per $g - 1$ dei differenziali dx , i componenti di $g - 1$ elementi lineari situati in E_h , e, per un altro differenziale, i componenti δx di un elemento lineare E_1 (δ). Facendo questa operazione in tutti i modi possibili, otteniamo per δx un sistema lineare S_h , di cui sia m_h^* il rango. Se $m_h^* + h < n$ (n essendo il numero delle variabili di S), il sistema S_h esprime che E_1 forma con E_h un elemento piano E_{h+1} integrale di S (E_1 è associato ad E_h). Se $m_h^* + h = n$, allora S_h esprime che E_1 è situato su E_h .

Diciamo che E_h è semiregolare, se, per ogni elemento piano h -dimensionale integrale di S e situato in un certo intorno di E_h , il numero m_h^* è lo stesso che per E_h e in questo caso scriviamo $m_h^* = m_h$. E_h dicesi *regolare a sinistra*, se è contenuto di una catena di elementi piani semiregolari $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_h$. E_h dicesi *regolare a destra*, se è contenuto in una catena di elementi piani integrali semiregolari $E_h \subset E_{h+1} \subset \dots \subset E_p$, dove E_p è tale che $m_p + p = n$ (p è il genere del sistema). E_h dicesi *regolare* se è regolare sia a destra che a sinistra.

Se E_h non è regolare, si dice che è *singolare*. Più precisamente, possiamo fare la seguente classificazione: E_h verrà detto *singolare di prima specie*, se esiste in ogni suo intorno un elemento piano h -dimensionale per cui il rango m_h sia maggiore di quello che corrisponde ad E_h . E_h verrà detto *singolare di seconda specie*, se è semiregolare e non regolare a sinistra — cioè se, per un certo $k < h$, tutti gli elementi piani E_k , contenuti in E_h , sono singolari di prima specie; è *singolare di terza specie*, se è semiregolare e non regolare a destra, cioè se, per un certo $k > h$, tutti gli elementi piani E_k che contengono E_h sono singolari di prima specie.

Se un elemento piano integrale singolare E_h è contenuto in un E_p integrale generico di S (p essendo il genere), allora diciamo che E_h è *caratteristico*.

§ 2. — PROPRIETÀ DEGLI ELEMENTI PIANI INTEGRALI DI UN SISTEMA S, IN RELAZIONE CON UNA DECOMPOSIZIONE DI QUESTO IN $S^{(1)}$ ED $S^{(2)}$. RELAZIONE FRA I CARATTERI DI QUESTI COMPONENTI E QUELLI DI S.

Supponiamo che il sistema S, in n variabili, di genere p , sia regolarmente decomponibile in $S^{(1)}$ ed $S^{(2)}$ con β variabili indipendenti. Sia un elemento piano E_γ (d_1, \dots, d_γ) integrale generico di S ($\gamma < \beta$).

TEOREMA I. - Se E_γ è semiregolare per il sistema $S^{(1)}$ ed $f_\gamma > 0$, allora ogni $E_{\gamma+1}$, integrale regolare di S e contenente E_γ , è caratteristico per $S^{(1)}$ (singolare di prima o di terza specie).

Dimostrazione. - A) Siano

$$(\Sigma_\gamma^*) \mathcal{A}_a(E_\gamma, \delta) = 0 \quad ; \quad (\bar{\Sigma}_\gamma^*) \mathcal{B}_b(E_\gamma, d_{\gamma+1}, \dots, d_r, \delta) = 0 \quad ; \quad (\bar{S}_\gamma) \mathcal{C}_c(E_\gamma, \delta) = 0$$

rispettivamente le equazioni dei sistemi Σ_γ^* , $\bar{\Sigma}_\gamma^*$, \bar{S}_γ . Questi sono sistemi di equazioni lineari nei δx , con coefficienti polinomi interi nei $d_1 x, \dots, d_r x$. Fra le equazioni (Σ_γ^*) ve ne sono, per un E_γ integrale generico di S , v_γ^* di indipendenti. Del resto, E_γ essendo semiregolare, $v_\gamma^* = v_\gamma$ e possiamo scrivere Σ_γ^* , $\bar{\Sigma}_\gamma^*$ invece di Σ_γ^* , $\bar{\Sigma}_\gamma^*$. Fra le $(\bar{\Sigma}_\gamma^*)$ ve ne sono ancora $(d_{\gamma+1}, \dots, d_r$ essendo i sistemi di differenziali che corrispondono ad elementi lineari integrali di $S^{(1)}$, formando con E_γ una catena di elementi piani compressi ognuno nel seguente) $n - r - v_\gamma$ di indipendenti fra loro e da Σ_γ . Il sistema \bar{S}_γ contiene $m_\gamma - v_\gamma$ equazioni indipendenti fra loro e dal sistema Σ_γ .

Le equazioni $\mathcal{B}_b = 0$ del sistema $\bar{\Sigma}_\gamma^*$ possono essere classificate in equazioni i cui coefficienti dipendono (oltre che da E_γ) da $d_{\gamma+1} x$, poi da $d_{\gamma+2} x$ e così via:

$$(\bar{\Sigma}_\gamma^*) \mathcal{B}_{b_1}(E_\gamma, d_{\gamma+1}, \delta) = 0 \quad , \quad \mathcal{B}_{b_2}(E_\gamma, d_{\gamma+1}, d_{\gamma+2}, \delta) = 0, \dots$$

Supponiamo che

$$A_a(E_\gamma, \delta) = 0 \quad (a = 1, \dots, v_\gamma),$$

$$B_b(E_\gamma, d_{\gamma+1}, \dots, d_r, \delta) = 0 \quad (b = 1, \dots, n - r - v_\gamma),$$

$$C_c(E_\gamma, \delta) = 0 \quad (c = 1, \dots, m_\gamma - v_\gamma),$$

siano dei sistemi di equazioni indipendenti (per argomenti $E_\gamma, d_{\gamma+1}, \dots$ generici) contenuti in $\Sigma_\gamma, \bar{\Sigma}_\gamma, \bar{S}_\gamma$.

Le equazioni $B_b = 0$ possono essere classificate nello stesso modo come sopra: $B_{b_1}(E_\gamma, d_{\gamma+1}, \delta) = 0$ sono tutte le equazioni del sistema $B_b = 0$ indipendenti fra loro (e da Σ_γ) che fanno parte del sistema $B_b(E_\gamma, d_{\gamma+1}, \delta) = 0$, ecc. Supponiamo che, fra le equazioni di questi sistemi, intercedano in base a Σ_γ , le f_γ relazioni identiche ⁽²⁾:

$$(2.1) \quad k_b^u B_b - l_c^u C_c = 0 \quad (u = 1, \dots, f_\gamma).$$

Osserviamo che si può risolvere il sistema Σ_γ rispetto a v_γ dei differenziali δx_i - più precisamente, possiamo supporre rispetto agli ultimi.

Se introduciamo le espressioni di questi differenziali nelle variabili k, l, B, C , otteniamo delle forme lineari in δx_s ($s = 1, \dots, n - v_\gamma$), i cui coefficienti sono espressioni intere nei $d_{\gamma+1} x, \dots, d_r x$, e razionali nei $d_1 x, \dots, d_\gamma x$, aventi a denominatore un certo determinante Δ . Del resto possiamo elimi-

(2) S'intende che si fa la somma per tutti i valori che prende ogni indice.

nare, allo stesso modo, anche $d_{\gamma+1} x_i, \dots, d_\gamma x_i$ con $i > n - \nu_\gamma$. Le espressioni che troviamo sono sempre espressioni lineari in δx_s ($s = 1, \dots, n - \nu_\gamma$), con coefficienti interi in $d_{\gamma+1} x_s, \dots, d_\gamma x_s$ e razionali in $d_1 x_i, \dots, d_\gamma x_i$ ($i = 1, \dots, n$) (aventi a denominatore una potenza di Δ). Finalmente, possiamo supporre che nelle (2.1) le forme B, C nei δx_s ($s = 1, \dots, n - \nu_\gamma$) abbiano coefficienti interi nei $d_1 x_i, \dots, d_\gamma x_i$ ($i = 1, \dots, n$) e nei $d_{\gamma+1} x_s, \dots, d_\gamma x_s$ ($s = 1, \dots, n - \nu_\gamma$), e che i coefficienti k, l siano interi negli stessi differenziali.

Facendo $\delta = d_{\gamma+1}$, risulta

$$(2.2) \quad l_c'' C_c(E_\gamma, d_{\gamma+1}) = 0.$$

Da (2.1) e (2.2), si ha identicamente

$$(2.3) \quad C_1(E_\gamma, d_{\gamma+1}) k_b'' B_b = l_{c'}'' \{C_{c'}(E_\gamma, \delta) C_1(E_\gamma, d_{\gamma+1}) - \\ - C_{c'}(E_\gamma, d_{\gamma+1}) C_1(E_\gamma, \delta)\} \quad (c' = 2, \dots, m_\gamma - \nu_\gamma).$$

Ponendo poi

$$C_c(E_\gamma, \delta) = C_{cs}(E_\gamma) \delta x_s \quad (s = 1, \dots, n - \nu_\gamma),$$

segue da (2.3) che l'espressione

$$l_{c'}'' C_{c's}(E_\gamma) C_{1t}(E_\gamma) d_{\gamma+1} x_s \quad (t = 1, \dots, n - \nu_\gamma),$$

è divisibile per

$$C_{1s}(E_\gamma) d_{\gamma+1} x_s.$$

Se

$$(2.4) \quad C_{1s}(E_\gamma) d_{\gamma+1} x_s = 0,$$

abbiamo da (2.3)

$$(2.5) \quad l_{c'}'' C_{c'}(E_\gamma, d_{\gamma+1}) C_{1s}(E_\gamma) = 0,$$

dove abbiamo denotato con $l_{c'}''$ ciò che diventa $l_{c'}''$ in base a (2.4).

Le quantità $C_{c'}(E_\gamma, d_{\gamma+1})$ sono forme lineari nei $d_{\gamma+1} x_s$, indipendenti fra loro e dalla $C_{1s} d_{\gamma+1} x_s$. Ne risulta che le $l_{c'}''$ si annullano in base alle relazioni

$$(2.6) \quad C_{c'}(E_\gamma, d_{\gamma+1}) = 0.$$

Le espressioni

$$\frac{l_{c'}'' - l_{c'}''^0}{C_{1s} d_{\gamma+1} x_s} = L_{c'}''$$

sono polinomi nei differenziali $d_1 x_i, \dots$. Da (2.3) abbiamo (in base a (2.5)):

$$k_b'' B_b = L_{c'}'' C_{c'}(E_\gamma, \delta) C_1(E_\gamma, d_{\gamma+1}) + l_{c'}''^0 C_{c'}(E_\gamma, \delta) - \\ - L_{c'}'' C_{c'}(E_\gamma, d_{\gamma+1}) C_1(E_\gamma, \delta).$$

Facendo

$$(2.7) \quad C_c(E_\gamma, d_{\gamma+1}) = 0 \quad (c = 1, 2, \dots),$$

abbiamo dunque

$$(2.8) \quad k_b^\mu B_b = 0.$$

Se non tutti i k_b^μ sono nulli per l'elemento piano E_γ integrale generico di S , vuol dire che, per questo E_γ , quando $E_{\gamma+1}$ sia anch'esso integrale generico di S , le forme lineari B_b (indipendenti fra loro, quando $E_{\gamma+1}$ sono elementi piani integrali generici di $S^{(1)}$) diventano linearmente dipendenti fra loro.

Se, per (2.7), tutti i k_b^μ si annullano, otteniamo lo stesso risultato. Supponiamo infatti che le B rimangano indipendenti fra di loro. Secondo il teorema V della N_1 , per (2.7) il numero delle forme C_c indipendenti fra di loro e dalle B_b è lo stesso che per elementi $E_x(d_{\gamma+1})$ generici (associati a E_γ in S). Sia C_{c^*} un sistema di tali forme indipendenti anche per (2.7) e una delle relazioni (2.1) scritta sotto la forma

$$k_b^\mu B_b - l_{c^*}^\mu C_{c^*} - l_{c_1}^\mu C_{c_1} = 0,$$

per un valore fisso di c_1 . I coefficienti k, l non sono altro che minori d'ordine $n - r - v_\gamma + m_\gamma - v_\gamma - f_\gamma - 1$ della matrice dei coefficienti di B_b, C_{c^*}, C_{c_1} . Se tutti questi si annullassero, la matrice risulterebbe d'ordine minore, ciò che è impossibile nelle nostre ipotesi.

La conclusione è dunque che *fra le forme B - indipendenti se $E_\gamma, E_{\gamma+1}, \dots$ formano una catena di elementi piani integrali regolari generici di $S^{(1)}$ - intercede, per (2.7), un sistema di relazioni identiche della forma (2.8).*

B) Sia

$$(2.9) \quad k_1^v B_1 + k_2^v B_{b_2} + \dots + k_0^v B_0 - l_c^v C_c = 0$$

una parte delle relazioni (2.1), dove nei B intervengono i differenziali $d_{\gamma+1}, \dots, d_{\gamma+\tau}$ ($\gamma + \tau < r$), e supponiamo che non vi sia nessuna altra relazione dove compaiano soltanto i differenziali $d_{\gamma+1}, \dots$ con indice minore o uguale a $\gamma + \tau$. Se le (2.7) non sono verificate, le forme B figuranti in (2.9) sono indipendenti fra di loro. Considerando un sistema qualunque di $\sigma_0 + \dots + \sigma_{\gamma+\tau}$ (ove le σ denotano i caratteri di $S^{(1)}$) forme B (in cui intervengano le componenti di E_γ ed i differenziali $d_{\gamma+1}, \dots, d_{\gamma+\tau}$), che siano generalmente indipendenti fra loro e dalle A_a , fra queste forme intercederà una relazione identica se sono verificate le (2.7).

Cioè l'elemento piano $E_{\gamma+\tau}$ è singolare, qualunque siano $E_x(d_{\gamma+2}), \dots, E_x(d_{\gamma+\tau})$, nel caso in cui $E_{\gamma+1}$ è un elemento integrale generico di S . Se, come abbiamo supposto, E_γ è semiregolare, questo vuol dire, se $\tau = 1$, che $E_{\gamma+1}$ è singolare di 1^a specie e, se $\tau > 1$, che $E_{\gamma+1}$ è singolare di 3^a specie.

Il fatto che, in questo caso, $E_{\gamma+1}$ è caratteristico per $S^{(1)}$ risulta manifestato dalla decomponibilità del sistema, visto il teorema V di N_1 .

TEOREMA II. — Sia un E_γ integrale semiregolare di S e suppongasì:

1° E_γ regolare a destra per $S^{(1)}$;

2° ogni $E_{\gamma+\tau}$ regolare di S e contenente E_γ sia singolare di prima o di terza specie per $S^{(1)}$.

In queste condizioni, $f_\gamma > 0, f_{\gamma+\tau} > 0$.

Dimostrazione. — Consideriamo infatti i sistemi $\Sigma_\gamma, \bar{\Sigma}_\gamma, \bar{S}_\gamma$. Nel sistema $\bar{\Sigma}_\gamma$, riferiamoci alle equazioni classificate come abbiamo mostrato sopra, e sia $\gamma + \tau$ il minimo indice, per cui ogni $E_{\gamma+\tau}$ integrale di $S^{(1)}$ e contenente un E_γ integrale regolare di S , risulti singolare di 1ª specie per $S^{(1)}$. Visto che $E_\tau(d_{\gamma+\tau})$ ed $E_\tau(d_{\gamma+\tau})$ hanno uffici simmetrici, possiamo supporre che $E_\tau(d_{\gamma+\tau})$ (invece di $E_\tau(d_{\gamma+\tau})$) verifichi \bar{S}_γ .

Per il teorema V di N_τ , $\gamma + \tau < r$. Sia ora una catena di elementi piani integrali (semi-regolari per $S^{(1)}$): $E_\gamma \subset E_{\gamma+\tau} \subset \dots \subset E_{\gamma+\tau}$. Affinché un elemento lineare $E_\tau(\delta)$ sia associato ad $E_{\gamma+\tau}$, occorre ch'esso verifichi, oltre al sistema E_γ , le

$$(2.10) \quad B_{b_1}(E_\gamma, d_{\gamma+1}\delta) = 0, \dots, B_{b_\tau}(E_\gamma, d_{\gamma+1}, \dots, d_{\gamma+\tau}, \delta) = 0,$$

ove si intende che $E_\tau(d_{\gamma+1})$ verifichi il sistema Σ_γ , poi $E_\tau(d_{\gamma+2})$ verifichi il sistema formato da Σ_γ e da $B_{b_1} = 0, \dots, E_\tau(d_{\gamma+\tau})$ verifichi il sistema formato da Σ_γ e dalle equazioni $B_{b_1} = 0, \dots, B_{b_{\tau-1}} = 0$.

Possiamo dunque considerare, invece di (2.10), le sole equazioni

$$(2.11) \quad \bar{B}_{b_\tau}(E_\gamma, d_{\gamma+1}, \dots, d_{\gamma+\tau}, \delta) = 0$$

provenienti dalle equazioni B_{b_τ} dopo aver sostituito (mediante Σ_γ) le ultime v_γ delle componenti $d_{\gamma+1}x_i$ in funzione di $d_1x_1, \dots, d_1x_{n-v_\gamma}$, poi (mediante Σ_γ e B_{b_1}) le ultime $v_{\gamma+1}$ delle componenti di $dx_{\gamma+1}$ in funzione di $d_2x_1, \dots, d_2x_{n-v_{\gamma+1}}$, finalmente (mediante Σ_γ e $B_{b_1} = 0, \dots, B_{b_{\tau-1}} = 0$) le ultime $v_{\gamma+\tau-1}$, componenti di $d_{\gamma+\tau}x_i$ e di δx_i in funzione di $d_{\gamma+\tau}x_1, \dots, d_{\gamma+\tau}x_{n-v_{\gamma+\tau-1}}$, e risp. di $\delta x_1, \dots, \delta x_{n-v_{\gamma+\tau-1}}$.

Le equazioni (2.11), in cui si considerino $d_1x_1, \dots, d_{\gamma+\tau-1}x_i$ come fissi, formano un sistema bilineare alternato nei $d_{\gamma+\tau}x_i, \delta x_i$ ($i=1, \dots, n-v_{\gamma+\tau-1}$). Siccome le equazioni $C_c(E_\gamma, \delta) = 0$ sono indipendenti dalle $B_{b_1} = 0, \dots, B_{b_{\tau-1}} = 0$, in virtù del teorema I possiamo eseguire sulle (2.11) una trasformazione lineare degli argomenti, ponendo

$$X_i = C_i(E_\gamma, d_{\gamma+1}), \dots, X_{m_\gamma-v_\gamma} = C_{m_\gamma-v_\gamma}(E_\gamma, d_{\gamma+1}),$$

$$Y_i = C_i(E_\gamma, \delta), \dots, Y_{m_\gamma-v_\gamma} = C_{m_\gamma-v_\gamma}(E_\gamma, \delta),$$

e prendendo per $X_{m_\gamma-v_\gamma+1}, \dots, X_{n-v_{\gamma+\tau-1}}$ e risp. $Y_{m_\gamma-v_\gamma+1}, \dots, Y_{n-v_{\gamma+\tau-1}}$ delle forme lineari indipendenti fra loro e dalle C_c . In questo modo, (2.11) diventa un sistema bilineare alternato, che scriviamo nella forma

$$(2.12) \quad D_g = D_{gij} X_i Y_j (D_{gij} + D_{gji} = 0, i, j = 1, \dots, n-v_{\gamma+\tau-1}),$$

dove i coefficienti D_{gij} possono dipendere anche da $d_1x_1, \dots, d_{\gamma+\tau-1}x_i$.

Per

$$(2.13) \quad X_i = \dots = X_{m_Y - v_Y} = 0$$

le (2.11) non risultano indipendenti fra loro nei δx , sicché le (2.13) non sono indipendenti fra loro nelle Y_i . Esistono dunque delle relazioni identiche della forma

$$(2.14) \quad H_g D_g^* = 0,$$

dove le D^* sono le espressioni a cui si riducono le D in virtù delle (2.13) e le H_g denotano dei polinomi:

$$H_g = P_{gj_1, \dots, j_e} X_{j_1} \dots X_{j_e},$$

i cui coefficienti P dipendono da $d_1 x_i, \dots, d_{Y+\tau-1} x_i$. Se, per un sistema di valori delle Y , le D_g^* fossero indipendenti nelle X , tenuto conto delle (2.13), risulterebbe che le H_g dovrebbero annullarsi per D_g^* . Ma questo è impossibile, dato che le H_g non dipendono dalle Y . Dunque le $D_{\delta\tau}^*$ non sono indipendenti nelle X_j ($j = m_Y - v_Y + 1, \dots, n - v_{Y+\tau-1}$). Scambiando poi le X con le Y (ciò che è legittimo, data la simmetria sghemba delle D), risulta che, per X generiche, le D^* non sono indipendenti nelle Y_j ($j = m_Y - v_Y + 1, \dots, n - v_{Y+\tau-1}$), cioè fra le equazioni (2.11) esistono delle relazioni lineari in forza di \bar{S}_Y . Vuol dire che, fra la (2.10) e \bar{S}_Y , esistono delle relazioni lineari, cioè $f_Y > 0$.

Per dimostrare ora che $f_{Y+1} > 0$, osserviamo che se $\tau = 1$ la cosa è evidente. Se $\tau > 1$, allora $v_{Y+1}^* = v_{Y+1}$. L'elemento piano E_{Y+1} integrale generico di S , essendo contenuto in un E_r integrale generico di $S^{(1)}$, sia $E_i(d_{Y+1})$ un elemento lineare generico di E_r ed $E_i^*(d_{Y+1}^*)$ un elemento lineare di E_r associato in S ad E_{Y+1} . Un elemento lineare $E_i(\delta)$, affinché risulti associato all'elemento piano $E_Y \times E_i(d_i)$, deve verificare un sistema lineare Σ_{Y+1} di rango v_{Y+1} ; e perché sia situato su E_r deve verificare un sistema Σ_r formato da Σ_{Y+1} , ed inoltre un sistema Σ_{Y+1}^* di $n - r - v_{Y+1}$ equazioni indipendenti. Lo stesso sistema Σ_r è formato da Σ_{Y+1}^* , di rango v_{Y+1}^* e da $\bar{\Sigma}_{Y+1}^*$. Le equazioni di Σ_{Y+1}^* essendo per definizione indipendenti da \bar{S}_{Y+1} , cioè anche da \bar{S}_Y , risulta che esisteranno in $\bar{\Sigma}_{Y+1}^*$ delle equazioni che si possono esprimere linearmente mediante quelle di \bar{S}_Y ; e ciò dimostra il teorema.

Osserviamo infine che il teorema II rimarrebbe valido anche quando l'ipotesi 1^a non fosse verificata, tranne che allora la catena di elementi $E_Y \subset E_{Y+1} \subset \dots \subset E_{Y+\tau}$ non sarebbe più formata da elementi semiregolari di $S^{(1)}$, ed i ranghi dei sistemi (2.10) non sarebbero più gli stessi. La dimostrazione non differisce essenzialmente da quella esposta sopra, ove ci siamo limitati al caso in cui è verificata l'ipotesi 1^a perché questo è il solo che ci interesserà in ulteriori ricerche, ed anche per semplicità di esposizione.

Analisi matematica. — *Studio di un sistema di equazioni differenziali della Dinamica dei Gas* (*). Nota di CARLO PUCCI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Si considera il problema di Dirichlet consistente nella ricerca di due funzioni U e T di classe $C^{(2)}$ in un insieme aperto limitato semplicemente connesso B del piano x, y , continue in \bar{B} , verificanti in B le equazioni:

$$(1) \quad T(U_{xx} + U_{yy}) - U_x T_x - U_y T_y = 0,$$

$$(2) \quad T_{xx} + T_{yy} - \alpha U_{xx} - \alpha U_{yy} = 0,$$

e sulla frontiera di B le condizioni

$$(3) \quad U = \psi, \quad T = \varphi,$$

ove la costante α e le funzioni φ e ψ sono prescritte, $\alpha \neq 0$.

Il problema, indicatoci dal prof. Picone, si è presentato nello studio dell'influenza, nella diffusione di un vapore in un gas, della distribuzione della temperatura sulle pareti di una camera a diffusione. Una approssimazione delle soluzioni U e T è stata ottenuta dall'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo per particolari B, α, φ, ψ proposti dall'Istituto di Fisica di Roma ⁽¹⁾.

In questa Nota diamo una facile estensione del principio di massimo a una classe di equazioni non lineari del secondo ordine ottenendo in conseguenza limitazioni a priori per le eventuali soluzioni U e T in dipendenza dei dati φ e ψ .

Costruiamo poi due semplici esempi, uno di non unicità, l'altro di non esistenza, per il problema di Dirichlet considerato. Proviamo infine che se φ è positiva oppure negativa esiste almeno una soluzione del problema.

Osserviamo preliminarmente che con la seguente posizione

$$(4) \quad V = T - \alpha U,$$

il problema di Dirichlet considerato è ricondotto al più semplice problema consistente nella ricerca di due funzioni V e T , di classe $C^{(2)}$ in B e $C^{(0)}$ in \bar{B} , verificanti le equazioni:

(*) Lavoro eseguito nell'Institute for Fluid Dynamics and Applied Mathematics della Università del Maryland, proposto dall'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

(1) Vedere M. PICONE, « La Ricerca Scientifica ».

$$(5) \quad V_{xx} + V_{yy} = 0 \quad \text{in } B,$$

$$(6) \quad V = \varphi - \alpha\psi \quad \text{su } \mathfrak{F}B,$$

$$(7) \quad T(T_{xx} + T_{yy}) - T_x^2 - T_y^2 + T_x V_x + T_y V_y = 0 \quad \text{in } B,$$

$$(8) \quad T = \varphi \quad \text{su } \mathfrak{F}B.$$

Nelle ipotesi che adotteremo esiste una e una sola funzione V soluzione delle (5), (6) e resta pertanto da compiere l'indagine sulle eventuali funzioni T soluzioni del problema di Dirichlet (7), (8), la funzione V figurando nella (7) come una funzione nota.

LIMITAZIONI A PRIORI DELLE SOLUZIONI. - Indichiamo dapprima una estensione del principio di massimo ad equazioni differenziali non lineari del secondo ordine. La dimostrazione è basata su considerazioni assai semplici ed ormai classiche in questo campo.

Sia $F(p_{ik}, p_i, u, x)$ una funzione continua per x variabile in un insieme aperto B dello spazio euclideo S_m e per qualsiasi altro valore reale delle variabili da cui dipende ($i, k = 1, 2, \dots, m; p_{ik} = p_{ki}$).

I. La funzione F abbia derivate parziali continue rispetto alle variabili p_i, p_{ik} . Si abbia inoltre per x in B e per qualsiasi valore reale di u, p_{ik}, λ_i

$$(9) \quad F(0, 0, u, x) = 0,$$

$$(10) \quad \left| \sum F_{p_{ik}}(p_{ik}, 0, u, x) \lambda_i \lambda_k \right| \geq \alpha(u) \sum \lambda_i^2,$$

ove $\alpha(u)$ è una funzione continua di u , positiva per $u \neq \mu$, con μ costante assegnata. Una qualsiasi funzione $u(x)$ di classe $C^{(2)}$ in B , verificante l'equazione

$$(11) \quad F[u_{ik}(x), u_i(x), u(x), x] = 0 \quad \text{in } B,$$

non ha massimi o minimi in B diversi da μ .

Indicato con u una soluzione della (11) si ha per la (9)

$$\begin{aligned} 0 &= F(u_{ik}, u_i, u, x) - F(0, 0, u, x) = F(u_{ik}, u_i, u, x) - \\ &\quad - F(u_{ik}, 0, u, x) + F(u_{ik}, 0, u, x) - F(0, 0, u, x) = \\ &= \int_0^1 dt F(tu_{ik}, 0, u, x) + \int_0^1 dt F(u_{ik}, tu_i, u, x), \end{aligned}$$

e pertanto

$$\sum_{hj} u_{hj} \int_0^1 F_{u_{hj}}(tu_{ik}, 0, u, x) dt + \sum_h u_h \int_0^1 F_{u_{ik}}(u_{ik}, tu_i, u, x) dt = 0.$$

Dalla (10) e da un noto principio di massimo per le equazioni ellittiche lineari del secondo ordine ⁽²⁾ segue che la funzione u non può avere un massimo o un minimo in B diverso da μ ⁽³⁾.

Ritornando al problema di Dirichlet considerato si ha il seguente teorema:

II. *Se esistono due funzioni U e T di classe $C^{(2)}$ in B , $C^{(0)}$ in \bar{B} , verificanti le (1), (2), (3) tali funzioni risultano così limitate in \bar{B}*

$$(12) \quad \min \{0, \min_{\mathfrak{F}B} \varphi\} \leq T \leq \max \{0, \max_{\mathfrak{F}B} \varphi\},$$

$$(13) \quad \min_{\mathfrak{F}B} (\varphi - \alpha\psi) \leq T - \alpha U \leq \max_{\mathfrak{F}B} (\varphi - \alpha\psi).$$

La seconda limitazione è una conseguenza immediata delle (4), (5), (6). La prima segue dalle (7), (8) e dal precedente teorema.

UN ESEMPIO DI NON UNICITÀ. — È ovvio che le limitazioni (12), (13) non implicano l'unicità della soluzione del problema di Dirichlet definito dalle (1), (2), (3). Osserviamo anzi che per tale problema vi sono casi per i quali esiste più di una soluzione. Sia ad esempio B l'insieme dei punti $x^2 + y^2 < 1$ e sia $\psi \equiv 1$, $\varphi \equiv \alpha$ su $\mathfrak{F}B$; la coppia di funzioni $T \equiv (x^2 + y^2)\alpha$, $U \equiv x^2 + y^2$ soddisfa al problema di Dirichlet (1), (2), (3) e così pure la coppia di funzioni $T \equiv \alpha$, $U \equiv 1$.

SULLA ESISTENZA DI SOLUZIONI. — Osserviamo dapprima che pur supponendo la frontiera di B e le funzioni φ e ψ arbitrariamente differenziabili non si può provare in generale l'esistenza di due funzioni U e T di classe $C^{(2)}$ in \bar{B} soluzioni del problema di Dirichlet (1) (2) (3). Supponiamo ad esempio $\varphi = \alpha\psi$ su $\mathfrak{F}B$ e quindi $T - \alpha U = 0$ in \bar{B} . La funzione T deve pertanto soddisfare alle condizioni

$$T(T_{xx} + T_{yy}) - T_x^2 - T_y^2 = 0 \quad \text{in } B, \quad T = \varphi \quad \text{su } \mathfrak{F}B.$$

Se φ è nulla in un punto (x_0, y_0) della frontiera di B e se esiste una soluzione T di classe $C^{(2)}$ in \bar{B} deve essere in (x_0, y_0) $\text{grad } T = 0$ il che può essere possibile solamente se la funzione prescritta φ in tale punto ha derivata (tangenziale a $\mathfrak{F}B$) nulla.

Da tale esempio risulta giustificata l'ipotesi $\varphi \neq 0$ su $\mathfrak{F}B$ adottata nel seguente teorema di esistenza.

III. *Supponiamo l'insieme B di classe $C^{(3,\lambda)}$ e le funzioni φ e ψ di classe $C^{(3)}$ su $\mathfrak{F}B$ ⁽⁴⁾.*

(2) Vedere ad esempio C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Springer-Verlag 1955, p. 3 e pp. 138-139. In seguito ci riferiremo più volte a tale pubblicazione indicando soltanto il nome dell'Autore e la pagina.

(3) Si possono facilmente ottenere estensioni e perfezionamenti del precedente teorema. Ad esempio alla ipotesi $\alpha(u) > 0$ per $u \neq \mu$ si può sostituire l'ipotesi $\alpha(u) > 0$ per u esterno ad un insieme I dell'asse reale concludendo in tal caso che ogni soluzione della (11) non può avere in B massimi o minimi i cui valori siano esterni ad I .

(4) Adottiamo ora varie notazioni per la definizione delle quali rimandiamo a C. Miranda. Così per la definizione di insiemi di classe $C^{(3,\lambda)}$ vedere p. 2 e per la definizione di fun-

Se φ è positiva oppure negativa su $\mathfrak{F}B$ esiste almeno una coppia di funzioni U e T di classe $C^{(2,\lambda)}$ in \bar{B} soluzioni del problema di Dirichlet (1) (2) (3).

Per le nostre ipotesi esiste una e una sola funzione V di classe $C^{(2,\lambda)}$ in \bar{B} soluzione del problema di Dirichlet (5), (6). Il teorema è provato se dimostriamo che esiste una soluzione T di classe $C^{(2,\lambda)}$ in \bar{B} del problema di Dirichlet (6), (7). Supponiamo ad esempio $\varphi > 0$ su $\mathfrak{F}B$ e proviamo l'esistenza di una soluzione T positiva. Posto

$$T = e^W$$

il problema è ricondotto alla dimostrazione della esistenza di una soluzione W , di classe $C^{(2,\lambda)}$, del problema di Dirichlet

$$(14) \quad W_{xx} + W_{yy} + e^{-W}(W_x V_x + W_y V_y) = 0 \quad \text{in } B,$$

$$(15) \quad W = \log \varphi (\equiv \varphi_1) \quad \text{su } \mathfrak{F}B,$$

e ciò non presenta difficoltà trattandosi soltanto di verificare che sono soddisfatte le ipotesi di un generale teorema di esistenza di Bernstein-Schauder-Caccioppoli.

Se una soluzione W esiste essa non può avere massimi o minimi all'interno di B e pertanto

$$(16) \quad |W| \leq \max_{\mathfrak{F}B} |\varphi_1| \quad \text{in } \bar{B}.$$

Facciamo alcune osservazioni.

a) Per $\varphi_1 \equiv 0$, il problema di Dirichlet (14), (15) ammette una e una sola soluzione.

Ciò segue dalla (16).

b) Il problema di Dirichlet per l'equazione alle variazioni corrispondente alla soluzione identicamente nulla è « illimitatamente risolubile » (5).

Tale problema alle variazioni è il seguente

$$(\delta\sigma)_{xx} + (\delta\sigma)_{yy} + V_x(\delta\sigma)_x + V_y(\delta\sigma)_y = \delta f \quad \text{in } B, \quad \delta\sigma = \delta\varphi \quad \text{su } \mathfrak{F}B.$$

c) Indicata con Γ_M la classe delle funzioni W , di classe $C^{(2)}$ in \bar{B} , soluzioni dei problemi di Dirichlet (14), (15) corrispondenti a funzioni φ_1 tali che

$$\max_{\mathfrak{F}B} |\varphi_1| + \theta_{1,\lambda}(\varphi_1, \mathfrak{F}B) \leq M^{(6)},$$

esiste una costante K tale che

$$|W_x|, |W_y| \leq K \quad \text{in } \bar{B} \quad \text{per } W \in \Gamma_M.$$

zioni di classe $C^{(3)}$ sulla frontiera di B vedere p. 3. Si intende che λ è una costante assegnata con $0 < \lambda \leq 1$. Osserviamo che le ipotesi di differenziabilità relative alla frontiera di B e alle funzioni φ e ψ possono essere considerevolmente ridotte.

(5) Vedere C. MIRANDA, p. 146.

(6) $\theta_{1,\lambda}(\varphi_1, \mathfrak{F}B)$ indica il massimo dei coefficienti di Holder, relativi all'esponente λ , della derivata di φ su $\mathfrak{F}B$. Per una definizione rigorosa vedere C. MIRANDA, p. 117.

Ogni soluzione W della (14) può essere considerata soluzione di una equazione lineare

$$W_{xx} + W_{yy} + b_1 W_x + b_2 W_y = 0,$$

ove

$$b_1 = V_x e^{-W}, \quad b_2 = V_y e^{-W},$$

e tali coefficienti b_1 e b_2 per la (16) risultano uniformemente limitati per $W \in \Gamma_M$. Pertanto per un teorema di Bers-Nirenberg ⁽⁷⁾ la c) è provata.

Dalla (16) e dalle a), b), c) segue quanto si voleva dimostrare ⁽⁸⁾.

Geometria. — *Sopra i sistemi fibrati kähleriani compatti.* Nota di EDOARDO VESENTINI, presentata ^(*) dal Socio B. SEGRE.

1. Sia V una varietà kähleriana compatta e connessa, di dimensione complessa n , dotata di una proiezione olomorfa π ⁽¹⁾ sopra una varietà kähleriana compatta e connessa B , di dimensione complessa b ($0 < b < n$). L'immagine inversa $M_\xi = \pi^{-1}(\xi)$ di un qualsiasi punto $\xi \in B$ è una sottovarietà complessa compatta di dimensione complessa $\geq n - b$. Noi supporremo, in tutto il seguito, che, al variare di ξ in B le immagini inverse M_ξ siano varietà complesse compatte, connesse non singolari, regolarmente immerse in V , di dimensione complessa $= n - b$, ad eccezione, al più, delle immagini inverse dei punti di una sottovarietà compatta LCB (eventualmente vuota), di dimensione $< b$. Più esattamente, supporremo che il rango della rappresentazione π sia massimo ($= b$) in ogni punto di V , ad eccezione della immagine inversa di una sottovarietà complessa propria L di B ($\dim L < b$).

Un teorema di Enriques ⁽²⁾ afferma che, qualora B sia una curva algebrica ($b = 1$), irriducibile e non singolare, di genere riemanniano $g(B) > 1$ e V una superficie algebrica, irriducibile e non singolare, di genere geometrico zero, le curve algebriche $M_\xi = \pi^{-1}(\xi)$ immagini inverse dei punti $\xi \in B$ sono curve razionali, sicché V risulta birazionalmente equivalente ad una superficie rigata. Questo teorema, stabilito da Enriques in una classica Memoria ([4], pp. 3-4) dedicata prevalentemente al caso in cui B sia una curva ellittica, si presenta di notevole interesse nel quadro della teoria degli spazi fibrati. È noto infatti [3] che la proiezione olomorfa $\pi: V \rightarrow B$ definisce in V (almeno nel caso in cui V è algebrica) un sistema fibrato di base B . Pertanto qualora

(7) L. BERS e L. NIRENBERG, *On linear and non-linear elliptic boundary value problems in the plane*, «Atti del Convegno internazionale sulle Equazioni a derivate parziali», Trieste, 1954.

(8) Vedere MIRANDA, p. 151, teorema 43, I e p. 155, teorema 43, II.

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) Per la definizione di proiezione olomorfa cfr. ad esempio [12], n. 6, p. 240. I numeri in parentesi quadra rinviano alla Bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

(2) Cfr. [4], [5], pp. 378-379.

le fibre $\pi^{-1}(\xi) \subset V$ siano tutte non singolari, esse risultano tutte fra loro omeomorfe, e la successione spettrale della coomologia singolare di tale sistema fibrato [10] permette di maggiore i numeri di Betti $b_q(V)$, di dimensioni q , di V , mediante le relazioni

$$(1) \quad b_q(V) \leq \sum_r b_r(B) \cdot b_{q-r}(M),$$

ove $b_r(B)$ e $b_{q-r}(M)$ denotano i numeri di Betti, di dimensione r e $q-r$, di B e della fibra-tipo M . Qualora V sia una varietà complessa compatta (non necessariamente kähleriana), dotata di una fibrazione *analitica-complessa* sopra la base B (complessa, compatta, ma non necessariamente kähleriana), con fibra M (kähleriana compatta) e gruppo strutturale connesso, una successione spettrale per la $\bar{\delta}$ -coomologia, costruita da A. Borel, permette di sostituire alle (1) le disequaglianze:

$$(2)_{p,q} \quad h^{p,q}(V) \leq \sum_{r,s} h^{r,s}(B) \cdot h^{p-r,q-s}(M),$$

involgenti le dimensioni, $h^{p,q}(V)$, $h^{r,s}(B)$ e $h^{p-r,q-s}(M)$, dei gruppi di Dolbeault $H^q(V, \Omega^p)$, $H^s(B, \Omega^r)$ e $H^{q-s}(M, \Omega^{p-r})$ di V , B e M ⁽³⁾.

In particolare, qualora V sia kähleriana compatta, in virtù di un risultato di Blanchard [1], nella $(2)_{p,q}$ valgono i segni di eguaglianza. D'altra parte alcuni esempi mostrano che la proiezione olomorfa π - anche se di rango b in ogni punto di V - non definisce in generale in V una fibrazione analitica-complessa. In tal caso la successione spettrale costruita da A. Borel non sembra più utilizzabile, mentre la ordinaria successione spettrale per la d -coomologia (che dà luogo alle (1)) non pare fornire in generale alcuna relazione significativa fra le dimensioni dei gruppi di Dolbeault di V , di B e delle fibre ⁽⁴⁾.

Orbene, il teorema di Enriques si inquadra nell'ambito della questione precedente, fornendo una relazione fra i gruppi di Dolbeault di V , B e M_ξ , valida nelle ipotesi enunciate all'inizio del secondo capoverso di questo numero: ipotesi non involgenti la proiezione olomorfa π . Tale teorema per-

(3) A. BOREL, *A spectral sequence for complex analytic bundles* (non pubblicato). I risultati di Borel hanno una portata, sotto vari aspetti, assai maggiore di quelli che qui interessano. Essi riguardano anzitutto il caso in cui, in luogo del gruppo di Dolbeault $H^{q-s}(B, \Omega^{p-r})$ si consideri il gruppo di coomologia $H^{q-s}(B, \Omega^{p-r}(W))$ di B a coefficienti nel mucchio $\Omega^{p-r}(W)$ dei germi delle $(p-r)$ -forme olomorfe a coefficienti in uno spazio fibrato analitico complesso, W , a fibra vettoriale, di base B , ed in luogo di $H^q(V, \Omega^p)$ si consideri l'analogo gruppo $H^q(V, \Omega^p(\pi^*(W)))$. Inoltre tali disequaglianze conseguono da risultati generali, validi sotto ipotesi ancora più ampie su V e B .

Ringrazio A. Borel per avermi mostrato gentilmente il manoscritto del lavoro testé citato.

(4) Riguardo alle condizioni caratteristiche perché nelle (1) valga il segno di eguaglianza, nell'ipotesi che la varietà complessa compatta V sia fibrata, nel senso di J. P. Serre, da varietà complesse compatte M sopra la base B (anch'essa complessa compatta), cfr. [1], pp. 176-179.

mette di affermare che, qualora sia $n = \dim V = 2$, $b = \dim B = 1$, e nelle ipotesi dianzi indicate ⁽⁵⁾, se $h^{0,2}(V) = 0$ e $h^{0,1}(B) > 1$, risulta $h^{0,1}(M_\xi) = 0$, cioè la $(2)_{0,2}$ è un'eguaglianza. L'ipotesi $h^{0,1}(B) > 1$ — riguardante soltanto la base B — è essenziale, in quanto, come ha mostrato Enriques ([4]; [5], pp. 379–392), se $h^{0,1}(B) = 1$ ⁽⁶⁾, può aversi simultaneamente $h^{0,2}(V) = 0$ e $h^{0,1}(M_\xi) > 0$.

In un lavoro in preparazione abbiamo stabilito la seguente generalizzazione del teorema di Enriques.

TEOREMA I. — *Sia V una varietà kähleriana compatta e connessa, di dimensione (complessa) n , dotata di una proiezione olomorfa $\pi: V \rightarrow B$, sopra una curva algebrica irriducibile e non singolare B . Se V ha genere geometrico $g_n = 0$, e se il genere riemanniano $g(B)$ di B è maggiore di uno, le fibre non singolari della fibrazione indotta da π hanno genere geometrico zero.*

2. La dimostrazione del teorema I poggia su alcuni risultati di [12] e sopra alcune proprietà delle serie lineari speciali sopra la curva B . Ecco le linee essenziali della dimostrazione.

Essendo dunque M, M_1 e M_2 tre ipersuperficie (complesse) non singolari qualsiasi di V , immagini inverse $M = \pi^{-1}(\xi)$, $M_1 = \pi^{-1}(\xi_1)$ e $M_2 = \pi^{-1}(\xi_2)$, di tre punti distinti, ξ, ξ_1 e ξ_2 , di B , non appartenenti al sottoinsieme L (il quale, essendo $b = 1$, è finito) siano: $[M], [M_1]$ e $[M_2]$ le strutture analitiche di rette complesse associate alle ipersuperficie M, M_1 e M_2 (cfr. ad esempio [7], pp. 111–112); K e K_M le strutture di rette complesse canoniche ([7], p. 113) in V ed in M ; $\Gamma(F)$ e $\Gamma_M(F')$ gli spazi vettoriali generati dalle sezioni olomorfe globali di due qualsiasi strutture analitiche di rette complesse, F e F' , definite rispettivamente in V ed in M .

Dall'ipotesi $g_n = 0$, in base ai risultati dei nn. 5 e 6 di [12] (pp. 238–241) ed al teorema 5.1 di [8] (p. 146) consegue che tutte le immagini inverse dei punti di $B-L$ hanno il medesimo genere geometrico $g^{(n)}$, ossia che $\dim \Gamma_M(K_M) = g$ per ogni $M = \pi^{-1}(\xi)$ ($\xi \in B - L$). Ancora in base ai risultati di [12] si ha che

$$(3) \quad \dim \Gamma(K \otimes [M_1] \otimes [M_2]) = 2g, \quad \dim \Gamma(K \otimes [M_1] \otimes [M_2] \otimes [M]^{-1}) = g,$$

e che la successione

$$0 \rightarrow \Gamma(K \otimes [M_1] \otimes [M_2] \otimes [M]^{-1}) \rightarrow \Gamma(K \otimes [M_1] \otimes [M_2]) \rightarrow \Gamma_M(K_M) \rightarrow 0$$

è esatta per ogni valore del genere geometrico g di M e del genere riemanniano $g(B)$ di B .

(5) Tali ipotesi non coincidono con quelle di [1] e del lavoro di A. Borel testè citato. Infatti quelle riguardanti la fibrazione sono più ampie di quelle di A. Borel, mentre quelle concernenti l'algebricità della varietà ambiente sono assai più restrittive. Cfr. anche (3).

(6) Relativamente al caso $g(B) = 0$, cfr. i successivi nn. 3 e 4.

(7) È presumibile che tale fatto sussista indipendentemente dall'ipotesi $g_n = 0$, come, ad esempio, accade — qualora V sia algebrica — per le curve di un sistema algebrico. Cfr. [9], pp. 363–364; [2].

D'altra parte, qualora sia $g(B) > 1$, l'esistenza di serie lineari speciali su B implica che è possibile fissare i tre punti distinti ξ , ξ_1 e ξ_2 in $B-L$, in guisa che la successione precedente non sia esatta, a meno che, naturalmente, sia $g = 0$, nel qual caso, a norma delle (3), i tre termini intermedi di essa riduconsi allo zero.

3. In [13] faremo un'altra applicazione dei risultati di [12], considerando il caso in cui la varietà B sia uno spazio proiettivo complesso, di dimensione b , e la sottovarietà $L \subset B$ sia vuota. In altre parole, supporremo che la proiezione olomorfa $\pi: V \rightarrow B$, di V sopra lo spazio proiettivo complesso B , definisca in V un sistema fibrato le cui fibre siano varietà complesse compatte (tutte non singolari), regolarmente immerse in V , di dimensione complessa $n - b$, lungo le quali il rango di π sia massimo ($= b$).

Proveremo in [13], che nelle ipotesi precedenti sussiste il

TEOREMA 2. - *Se la restrizione di una forma olomorfa ω di V alla fibra $\pi^{-1}(\xi)$, è identicamente nulla, per ogni $\xi \in B$, la forma ω è identicamente nulla.*

Denotando con g_q la dimensione dello spazio vettoriale delle forme olomorfe di grado q di V , dal teorema precedente consegue il

COROLLARIO 3. - *Risulta $g_q = 0$ per $q = n - b + 1, \dots, n$.*

4. Nel caso particolare in cui sia $b = 1$, cioè nel caso in cui V sia un sistema fibrato, sopra la sfera di Riemann, il teorema 2 consegue, relativamente alle forme lineari olomorfe, da classiche considerazioni trascendenti di F. Severi⁽⁸⁾. In tal caso, dal corollario 3 discende che il genere geometrico g_n di V è eguale a zero. Qualora sia $n = 2$, cioè qualora V sia una superficie kähleriana compatta, tale corollario consegue anche dalle seguenti semplici considerazioni numeriche.

Osserviamo anzitutto che tutte le fibre della proiezione $\pi: V \rightarrow B$ sono curve irriducibili aventi il medesimo genere riemanniano $g(M)$ ⁽⁹⁾. Poiché π è definita in ogni punto di V , due qualsiasi fibre distinte di π sono disgiunte, sicché il numero d'intersezione, $I(M^2)$, della classe di omologia in V del ciclo fondamentale della fibra M con se stessa, è eguale a zero. Siccome inoltre le fibre M sono tutte non singolari, la caratteristica di Eulero Poincaré $\chi(V)$, è espressa dalla

$$\chi(V) = -I(M^2) + 4 - 4g(M) = 4 - 4g(M) \quad (10).$$

(8) Rinviamo per la bibliografia a [14]; ad essa deve aggiungersi la Nota [3]. Le considerazioni trascendenti di F. SEVERI e quelle topologiche di W. L. CHOW [3], sono svolte nel caso algebrico.

(9) Ciò segue dal fatto che, essendo π ovunque definita e di rango massimo ($=1$), le fibre sono tutte fra loro omeomorfe, come abbiamo ricordato nel secondo capoverso del n. 1. Per il caso algebrico, cfr. (7).

(10) Cfr. [6], p. 121, e, nel caso algebrico, ad esempio [5], p. 167; [14], p. 62. Nelle nostre ipotesi, tale relazione consegue anche da un risultato generale della teoria degli spazi fibrati (cfr. [10]), secondo il quale la caratteristica di Eulero Poincaré di V è il prodotto delle caratteristiche di Eulero Poincaré della base B e della fibra M .

Pertanto, denotando con $h^{1,1}$ il numero delle forme armoniche di tipo $(1, 1)$ linearmente indipendenti su V , si ha

$$(4) \quad 2 - 4g_1 + 2g_2 + h^{1,1} = 4 - 4g(M).$$

Poiché, in base al teorema 2⁽¹¹⁾ risulta

$$g_1 \leq g(M),$$

mentre, come è ben noto, $h^{1,1} \geq 1$, dalla (4) consegue che

$$g_2 = 0,$$

e che

$$g_1 = g(M).$$

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. BLANCHARD, *Sur les variétés analytiques complexes*, « Ann. Sci. École Norm. Sup. » (3), 63, 157-202 (1956).
- [2] W. L. CHOW, *On the genus of curves of an algebraic system*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 65, 137-140 (1949).
- [3] W. L. CHOW, *On the fundamental group of an algebraic variety*, « Amer. J. Math. », 74, 726-736 (1952).
- [4] F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero*, « Rend. Circ. Mat. Palermo » (1), 20, 1-33 (1906).
- [5] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Bologna, Zanichelli, 1949.
- [6] F. HIRZEBRUCH, *Uebertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen*, « J. reine u. ang. Math. », 191, 110-124 (1953).
- [7] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, « Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete », Neue Folge, Heft 9; Springer Verlag, 1957.
- [8] K. KODAIRA-D. C. SPENCER, *On the variation of almost complex structure*, « Algebraic geometry and topology », Princeton University Press, 139-150 (1957).
- [9] B. SEGRE, *On limits of algebraic varieties, in particular of their intersection and tangential forms*, « Proc. London Math. Soc. » (2), 47, 351-403 (1942).
- [10] J. P. SERRE, *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*, « Ann. of Math. », 54, 425-505 (1951).
- [11] F. SEVERI, *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (5), 20, 537-546 (1910)₁.
- [12] E. VESENTINI, *Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà Kähleriana compatta. Nota I*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8), 23, 232-241 (1957).
- [13] E. VESENTINI, *On a special class of Kähler varieties* (in preparazione).
- [14] O. ZARISKI, *Algebraic surfaces*, « Erg. der Math. und ihrer Grenzgebiete », Berlin, J. Springer, 1935.

(11) Trattandosi qui di forme lineari olomorfe, vale quanto detto nel primo capoverso di questo numero, cfr. anche ⁽⁸⁾.

Geometria. — *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa.* Nota di GIOVANNI BATTISTA RIZZA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

1. Nel presente lavoro sono stabilite alcune proprietà geometriche locali delle varietà V_{2n} a struttura complessa, dotate di metrica hermitiana definita positiva $ds^2 = 2g_{p\bar{q}}dz^p d\bar{z}^q$.

L'elemento essenziale, che interviene, è la nozione, introdotta al n. 3, di *deviazione caratteristica* di una faccetta piana. Essa deriva sostanzialmente dall'osservazione che ad ogni faccetta piana, relativa ad un punto \bar{O} di V_{2n} , può essere associato un angolo, il quale ne indica, per così dire, il divario dall'essere una faccetta caratteristica (n. 3).

Per la deviazione caratteristica di una faccetta sono ottenute ai nn. 3, 6 diverse espressioni.

Si considera poi, su di una faccetta piana qualunque, la forma esterna $\omega = ig_{p\bar{q}}dz^p \wedge d\bar{z}^q$ associata alla metrica. Essa appare prodotto dell'elemento d'area per il coseno della deviazione caratteristica della faccetta (n. 7).

Ciò permette di dare risposta al problema del significato geometrico di ω su di una faccetta qualunque (nn. 9, 7) ⁽¹⁾.

Al n. 8 sono esaminati i casi particolari delle faccette caratteristiche e delle faccette a prodotto hermitiano reale. In corrispondenza, la deviazione caratteristica diviene rispettivamente minima e massima. Ne seguono varie caratterizzazioni dei due tipi di faccette.

Infine, al n. 9, si ritrovano come casi particolari alcune proposizioni dovute a W. Wirtinger.

2. GENERALITÀ E PREMESSE. — Sia V_{2n} una varietà a struttura complessa dotata di metrica hermitiana definita positiva ⁽²⁾ ⁽³⁾ ed \bar{O} un suo punto. Indicate con x^j ($j = 1, \dots, 2n$) e con $z^p = x^p + ix^{n+p}$ ($p = 1, \dots, n$) coordinate locali, risp. reali e complesse, in un intorno U di \bar{O} su V_{2n} , sia:

$$(1) \quad ds^2 = 2g_{p\bar{q}}dz^p d\bar{z}^q,$$

la forma quadratica, che definisce la metrica in U ⁽⁴⁾, ed E_{2n} lo spazio centro affine tangente relativo al punto \bar{O} (immagine reale dello spazio complesso tangente \mathbb{S}_n) ⁽⁵⁾.

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) La questione venne posta da E. MARTINELLI nel lavoro [6] (n. 16, p. 17).

(2) Per le nozioni fondamentali ved. per esempio B. ECKMANN [4], Cap. II, § IV; K. YANO-S. BOCHNER [10].

(3) Più generalmente si potrebbero considerare varietà V_{2n} quasi-complesse. Ved. le osservazioni al n. 8 del lavoro [7] di E. MARTINELLI.

(4) Per le nozioni e le notazioni di calcolo tensoriale ved. K. YANO-S. BOCHNER [10], Cap. VIII. I tensori considerati in questo lavoro sono autoaggiunti ([10], p. 120). Gli indici p, q, s, t percorrono gli interi $1, \dots, n$.

(5) Per la geometria nello spazio E_{2n} (con la metrica euclidea ordinaria) vedere B. SEGRE [8], Cap. IV, § 1.

Nel seguito, i vettori di V_{2n} sono sempre considerati nel punto \bar{O} . Essi vengono rappresentati in E_{2n} e si intendono applicati nell'origine O .

Denotate con $M^p, M^{\bar{p}}, N^p, N^{\bar{p}}, R^p, R^{\bar{p}}$ le coordinate contravarianti complesse di tre vettori M, N, R ⁽⁶⁾, le uguaglianze:

$$(2) \quad M \times N = g_{pq} (M^p N^{\bar{q}} + M^{\bar{q}} N^p),$$

$$(3) \quad \text{mis}^2 R = R \times R$$

$$(4) \quad \cos MN = \frac{M \times N}{\text{mis} M \cdot \text{mis} N}$$

definiscono risp. il *prodotto scalare* di M ed N , la *misura* di R , il *coseno dell'angolo* MN .

Il vettore \tilde{R} di componenti:

$$(5) \quad \tilde{R}^p = iR^{\bar{p}}, \quad \tilde{R}^{\bar{p}} = -iR^p$$

si dice *coniugato* di R ⁽⁷⁾.

L'operazione J di passaggio al coniugato è anti-involutoria; cioè:

$$(6) \quad \tilde{\tilde{R}} = -R.$$

In E_{2n} il piano $R\tilde{R}$ è il piano caratteristico determinato da R , (da \tilde{R}) ⁽⁸⁾. Esso riesce orientato positivamente dalla coppia $R\tilde{R}$.

I vettori R, \tilde{R} sono ortogonali e di ugual misura; cioè:

$$(7) \quad R \times \tilde{R} = 0, \quad R \times R = \tilde{R} \times \tilde{R}.$$

Più in generale, dalle (2), (3), (5) deriva direttamente:

$$(8) \quad M \times \tilde{N} + \tilde{M} \times N = 0, \quad M \times N = \tilde{M} \times \tilde{N}.$$

Una coppia ordinata di vettori dà luogo ad un *bivettore*. Le componenti contravarianti complesse del bivettore ρ , determinato dalla coppia R, \tilde{R} , sono:

$$(9) \quad \rho^{pq} = \begin{vmatrix} R_1^p & R_1^q \\ R_2^p & R_2^q \end{vmatrix}, \quad \rho^{\bar{p}\bar{q}} = \begin{vmatrix} R_1^{\bar{p}} & R_1^{\bar{q}} \\ R_2^{\bar{p}} & R_2^{\bar{q}} \end{vmatrix}, \quad \rho^{\bar{p}q} = \overline{\rho^{\bar{p}\bar{q}}}, \quad \rho^{p\bar{q}} = \overline{\rho^{\bar{p}q}}, \quad (p, q = 1, \dots, n).$$

Le uguaglianze:

$$(10) \quad \mu \times \nu = \frac{1}{2} g_{pq} g_{s\bar{t}} [\mu^{\bar{p}s} \nu^{\bar{q}\bar{t}} + \mu^{\bar{p}\bar{t}} \nu^{\bar{q}s} + \mu^{\bar{q}s} \nu^{\bar{p}\bar{t}} + \mu^{\bar{q}\bar{t}} \nu^{\bar{p}s}],$$

$$(11) \quad \text{mis}^2 \rho = \rho \times \rho,$$

$$(12) \quad \cos \mu\nu = \frac{\mu \times \nu}{\text{mis} \mu \cdot \text{mis} \nu},$$

definiscono risp. il *prodotto scalare dei bivettori* μ e ν , la *misura* di ρ , l'*angolo* $\mu\nu$ ⁽⁹⁾.

(6) Le componenti complesse di un vettore S , di componenti reali s^j ($j = 1, \dots, 2n$), sono $S^p = s^p + is^{n+p}$, $S^{\bar{p}} = s^p - is^{n+p}$.

(7) La nozione è dovuta ad E. MARTINELLI. Ved. [5], pp. 145-147, ove sono anche segnalate alcune delle proprietà del seguito.

(8) I piani caratteristici di E_{2n} sono le immagini reali delle rette di \mathbb{S}_n . Per una retta di E_{2n} passa uno ed un solo piano caratteristico (ved. per esempio B. SEGRE ([8], p. 354).

(9) Ved. per esempio E. CARTAN, [2], pp. 5-9. La (10) segue ovviamente dalla definizione (15) di p. 8. L'angolo di due bivettori può riguardarsi come angolo tra vettori in uno spazio più ampio (E. CARTAN [2], p. 8; ved. anche E. MARTINELLI [6], p. 28).

Nel seguito converrà avere presente la *relazione*:

$$(13) \quad \mu \times \nu = \begin{vmatrix} M_1 \times N_1 & M_1 \times N_2 \\ M_2 \times N_1 & M_2 \times N_2 \end{vmatrix}$$

che si ottiene dalla (10), tenuto conto delle (2), (9) ⁽¹⁰⁾.

Dalle (11), (13) è poi immediato che due vettori unitari ed ortogonali danno luogo ad un bivettore di misura unitaria.

3. DEVIAZIONE CARATTERISTICA DI UN PIANO. - Le considerazioni di questo numero e dei successivi si riferiscono alle *faccette piane* di V_{2n} ⁽¹¹⁾ di origine \bar{O} , vale a dire ai piani di E_{2n} uscenti da O e dotati di orientazione. Esse costituiscono un sistema $\infty^{4(n-1)}$, entro il quale è di particolare interesse il sistema $\infty^{2(n-1)}$ delle faccette caratteristiche ⁽¹²⁾ di origine \bar{O} (piani caratteristici di E_{2n} passanti per O ed orientati (n. 2)).

Le rette ed i piani, che intervengono nel seguito, si intendono sempre uscenti da O e dotati di orientazione. Essi vengono definiti risp. da vettori e da coppie ordinate di vettori (o da bivettori) applicati in O .

Ciò premesso, sia E_2 un piano di E_{2n} per O , \mathcal{F} il fascio di centro O su E_2 , E_1 una retta di \mathcal{F} , $E_2^{(E_1)}$ il piano caratteristico per E_1 .

Sussiste il:

TEOREMA 1. - *L'angolo $E_1 E_2^{(E_1)}$ è costante al variare di E_1 nel fascio \mathcal{F} .*

Il piano E_2 sia individuato dai vettori unitari ortogonali $\underset{1}{M} \underset{2}{M}$, la retta E_1 di \mathcal{F} dal vettore unitario:

$$(14) \quad R = r^1 \underset{1}{M} + r^2 \underset{2}{M},$$

(r^1, r^2 reali). Quindi:

$$(15) \quad \underset{j}{M} \times \underset{k}{M} = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2)$$

$$(16) \quad R \times R = \sum_j r^j r^j = 1.$$

Il piano caratteristico per E_1 , cioè $E_2^{(E_1)}$, è il piano $\tilde{R}\tilde{R}$ (n. 2).

Dalle (14), (5) segue:

$$(17) \quad \tilde{R} = r^1 \tilde{\underset{1}{M}} + r^2 \tilde{\underset{2}{M}}.$$

Indicati ora con μ, ρ_R i bivettori $\underset{1}{M} \underset{2}{M}, R\tilde{R}$, per l'osservazione alla fine del n. 2 dalle (15), (7), (16) scende:

$$(18) \quad \text{mis } \mu = \text{mis } \rho_R = 1.$$

(10) Nel caso $\mu = \nu$ la (13) è già in E. CARTAN ([2], p. 6). Se la metrica si riduce a $ds^2 = \sum dz^p dz^p$, il determinante che interviene nella (13) può riguardarsi come determinante del prodotto di due matrici nelle componenti reali dei vettori $\underset{1}{M}, \underset{2}{M}$ ed $\underset{1}{N}, \underset{2}{N}$ risp. (Cfr. B. SEGRE [8], (2), p. 363).

(11) Elementi lineari 2-dimensionali orientati di V_{2n} .

(12) Immagini reali di elementi 1-dimensionali complessi della \mathcal{O}_n complessa, di cui V_{2n} è immagine reale (ved. per esempio E. MARTINELLI [7], § 11). Nel trattato [10] di K. YANO-S. BOCHNER le faccette caratteristiche sono denominate « holomorphic sections ».

Tenute presenti le (13), (14), (17), in virtù delle (15), (7)₁, (8), (16) risulta poi:

$$(19) \quad \mu \times \rho_R = \begin{vmatrix} M_1 \times R & M_1 \times \tilde{R} \\ M_2 \times R & M_2 \times \tilde{R} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^1 & r^2 M_1 \times \tilde{M}_2 \\ r^2 & r^1 M_2 \times \tilde{M}_1 \end{vmatrix} = -M_1 \times \tilde{M}_2.$$

In definitiva, dalle (12), (18), (19) deriva:

$$(20) \quad \cos E_2 E_2^{(E_1)} = \cos \mu \rho_R = -M_1 \times \tilde{M}_2.$$

Dunque $\cos E_2 E_2^{(E_1)}$ non dipende da r^1, r^2 e pertanto il Teorema 1 è dimostrato.

Convieni notare subito che, se E_2 è *caratteristico*, per ogni E_1 di $\mathfrak{F} E_2^{(E_1)}$ si riduce ad $E_2^{(13)}$ ed il Teorema 1 è banale. Quindi, tenuto conto dell'orientazione, è: $\cos E_2 E_2^{(E_1)} = \pm 1$. Ciò risulta anche dalla (20), in quanto nella ipotesi attuale è $M = \pm \tilde{M}$.

Si consideri poi il sistema Σ_{E_2} dei piani caratteristici per O ad intersezione con E_2 di dimensione massima. In particolare, se E_2 è caratteristico, Σ_{E_2} è costituito soltanto da E_2 .

Ciò premesso, l'angolo che interviene nella (20) appare come *deviazione di E_2 dai piani caratteristici di Σ_{E_2}* . Esso verrà perciò denominato *deviazione caratteristica di E_2* ed indicato con δ_{E_2} .

La (20) diviene:

$$(21) \quad \cos \delta_{E_2} = \cos E_2 E_2^{(E_1)} = -M_1 \times \tilde{M}_2.$$

Infine è immediato riconoscere che la deviazione caratteristica di un piano caratteristico orientato positivamente è nulla.

4. RIFERIMENTI CARATTERISTICI. TEOREMA DI INVARIANZA. — Per la deviazione caratteristica di un piano sussiste il Teorema 3 del n. 6. Le considerazioni, che seguono, ed il Teorema 2, che ne deriva, sono necessarie premesse a quel risultato.

Un sistema fondamentale di riferimento di origine O in E_{2n} , brevemente un *riferimento* in E_{2n} , è dato da una $2n$ -pla di vettori unitari, ortogonali, uscenti da O. In particolare, si dirà *caratteristico* un riferimento in E_{2n} costituito da n coppie di vettori coniugati R_t, \tilde{R}_t ($t = 1, \dots, n$) (n. 2).

Ogni coppia R_t, \tilde{R}_t individua un piano caratteristico; di qui la denominazione.

I riferimenti caratteristici sono ∞^{n^2} (14).

(13) Ved. nota (8).

(14) Ved. B. SEGRE [8], pp. 372-375.

In particolare, se la metrica si riduce a $ds^2 = \sum_p dz^p dz^p = \sum_j dx^j dx^j$, un riferimento caratteristico è costituito dai versori degli assi di E_{2n} che corrispondono naturalmente alle linee coordinate, x^p, x^{n+p} ($p = 1, \dots, n$) in U .

Tenuto conto della (8), è immediato riconoscere che la:

$$(22) \quad R \times R = \delta_{pq} \quad , \quad R \times \tilde{R} = 0 \quad (p, q = 1, \dots, n)$$

è condizione necessaria e sufficiente perché i $2n$ vettori R_t, \tilde{R}_t ($t = 1, \dots, n$) costituiscano un riferimento caratteristico.

Si considerino ora due riferimenti caratteristici $\bigwedge_t \tilde{\bigwedge}_t, {}'\bigwedge_t {}'\tilde{\bigwedge}_t$ ($t = 1, \dots, n$), nel seguito indicati con R, R' . Siano poi $\lambda^{(t)}, \lambda'^{(t)}$ i bivettori definiti da $\bigwedge_t \tilde{\bigwedge}_t, {}'\bigwedge_t {}'\tilde{\bigwedge}_t$, ed $E_2^{(t)}, {}'E_2^{(t)}$ i relativi piani caratteristici.

Ciò premesso, si ha:

TEOREMA 2. - Per ogni piano E_2 di E_{2n} passante per O sussiste la relazione:

$$(23) \quad \sum_t \cos E_2 E_2^{(t)} = \sum_t \cos E_2 {}'E_2^{(t)}.$$

5. DIMOSTRAZIONE. - Per la dimostrazione conviene anzitutto tradurre analiticamente le ipotesi.

Poiché R, R' sono riferimenti caratteristici le $\bigwedge_p \tilde{\bigwedge}_p, {}'\bigwedge_q {}'\tilde{\bigwedge}_q$ ($p, q = 1, \dots, n$) soddisfanno alla condizione (22).

Inoltre:

$$(24) \quad {}'\bigwedge_q = \alpha_q^p \bigwedge_p + \tilde{\alpha}_q^p \tilde{\bigwedge}_p \quad (q = 1, \dots, n),$$

e quindi, per la (6):

$$(25) \quad {}'\tilde{\bigwedge}_q = -\tilde{\alpha}_q^p \bigwedge_p + \alpha_q^p \tilde{\bigwedge}_p \quad (q = 1, \dots, n),$$

con le $\alpha_q^p, \tilde{\alpha}_q^p$ reali, soddisfacenti alla:

$$(26) \quad \sum_t \alpha_r^t \alpha_s^t + \tilde{\alpha}_r^t \tilde{\alpha}_s^t = \delta_{rs} \quad ; \quad \sum_t \alpha_r^t \tilde{\alpha}_s^t - \tilde{\alpha}_r^t \alpha_s^t = 0, \quad (r, s = 1, \dots, n).$$

Il piano E_2 , come al n. 3, è definito dal bivettore μ , cioè dai vettori unitari ortogonali M_1, M_2 . In relazione ad R, R' si ha:

$$(27) \quad M_j = m_j^p \bigwedge_p + \tilde{m}_j^p \tilde{\bigwedge}_p = {}'m_j^q {}'\bigwedge_q + {}'\tilde{m}_j^q {}'\tilde{\bigwedge}_q \quad (j = 1, 2),$$

con le $m_j^p, \tilde{m}_j^p, {}'m_j^q, {}'\tilde{m}_j^q$ reali soddisfacenti alla:

$$(28) \quad \sum_p m_j^p m_k^p + \tilde{m}_j^p \tilde{m}_k^p = \sum_q {}'m_j^q {}'m_k^q + {}'\tilde{m}_j^q {}'\tilde{m}_k^q = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2).$$

Dalla (27), tenuto conto delle (24), (25), segue poi subito:

$$(29) \quad m_j^p = \alpha_q^p {}'m_j^q - \tilde{\alpha}_q^p {}'\tilde{m}_j^q, \quad \tilde{m}_j^p = \tilde{\alpha}_q^p {}'m_j^q + \alpha_q^p {}'\tilde{m}_j^q, \quad (j = 1, 2; p = 1, \dots, n).$$

Ciò premesso, in virtù delle (13), (24), (25) e della condizione (22) per le $\bigwedge_t \tilde{\bigwedge}_t$ ($t=1, \dots, n$), si ha successivamente:

$$(30) \quad \mu \times \lambda^{(t)} = \begin{vmatrix} M_1 \times \bigwedge_t & M_1 \times \tilde{\bigwedge}_t \\ M_2 \times \bigwedge_t & M_2 \times \tilde{\bigwedge}_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1^t & \tilde{m}_1^t \\ m_2^t & \tilde{m}_2^t \end{vmatrix} = m_1^t \tilde{m}_2^t - \tilde{m}_1^t m_2^t.$$

D'altra parte, avendo presente la (29), si perviene direttamente alla relazione:

$$m_1^t \tilde{m}_2^t - \tilde{m}_1^t m_2^t = (a_r^t a_s^t + \tilde{a}_r^t \tilde{a}_s^t) (m_1^r \tilde{m}_2^s - \tilde{m}_1^s m_2^r) + (a_r^t \tilde{a}_s^t - \tilde{a}_r^t a_s^t) (m_1^r \tilde{m}_2^s + \tilde{m}_1^s m_2^r),$$

dalla quale, sommando membro a membro per $t = 1, \dots, n$ e tenendo conto della (26), segue:

$$(31) \quad \sum_t m_1^t \tilde{m}_2^t - \tilde{m}_1^t m_2^t = \sum_t m_1^t \tilde{m}_2^t - \tilde{m}_1^t m_2^t.$$

In conclusione, dalle (30), (31) deriva:

$$(32) \quad \sum_t \mu \times \lambda^{(t)} = \sum_t \mu \times \lambda^{(t)}.$$

Ora, in virtù delle ipotesi e dell'osservazione alla fine del n. 2 i bivettori in considerazione sono unitari. La (32) diviene quindi:

$$(33) \quad \sum_t \cos \mu \lambda^{(t)} = \sum_t \cos \mu \lambda^{(t)},$$

ed il Teorema 2 è dimostrato.

6. TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE. — Il Teorema 2 del n. 4 mette in rilievo che *l'espressione*:

$$(34) \quad \sum_t \cos E_2 E_2^{(t)}$$

dipende solo apparentemente dal riferimento caratteristico \mathcal{R} ; si tratta cioè di un invariante rispetto ai cambiamenti del riferimento caratteristico (n. 4).

In virtù di tale osservazione, *la somma (34) dipende soltanto dal piano E_2 ; quindi potrà essere espressa mediante i vettori $M_1 M_2$, che individuano E_2 .*

Per ottenere la relazione accennata, si procede in questo modo.

Si consideri un riferimento caratteristico \mathcal{R}' , definito dai vettori $\bigwedge_t \tilde{\bigwedge}_t$ ($t = 1, \dots, n$), soddisfacente all'ipotesi: $\bigwedge_t = M_1$. Esistono $\infty^{(n-1)^2}$ riferimenti di questo tipo⁽¹⁵⁾.

Ciò premesso, tenuto conto della (13) e della condizione (22) per le $\bigwedge_t \tilde{\bigwedge}_t$, si ha successivamente:

$$\mu \times \lambda^{(t)} = \begin{vmatrix} M_1 \times \bigwedge_t & M_1 \times \tilde{\bigwedge}_t \\ M_2 \times \bigwedge_t & M_2 \times \tilde{\bigwedge}_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bigwedge_t \times \bigwedge_t & \bigwedge_t \times \tilde{\bigwedge}_t \\ M_2 \times \bigwedge_t & M_2 \times \tilde{\bigwedge}_t \end{vmatrix} = \delta_{1t} M_2 \times \tilde{\bigwedge}_t,$$

($t = 1, \dots, n$); e di qui, in virtù dell'ipotesi $'\bigwedge_1 = \tilde{M}_1$ e della (8) del n. 2, derivano immediatamente le uguaglianze:

$$\mu \times ' \lambda^{(1)} = \tilde{M}_2 \times ' \bigwedge_1 = \tilde{M}_2 \times \tilde{M}_1 = - \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2 \quad ; \quad \mu \times ' \lambda^{(t)} = 0 \quad (t = 2, \dots, n).$$

In definitiva, della somma a secondo membro della (23) sono nulli tutti gli addendi salvo il primo, il quale, poiché i bivettori $\mu, ' \lambda^{(1)}$ sono unitari, si riduce precisamente a $-\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$.

Si perviene quindi alla *relazione*:

$$(35) \quad \sum_t \cos E_2 E_2^{(t)} = - \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2,$$

annunciata all'inizio di questo numero.

Dalle (21), (35) scende poi direttamente il:

TEOREMA 3. - *Per la deviazione caratteristica di un piano E_2 di E_{2n} sussiste la relazione:*

$$(36) \quad \cos \delta_{E_2} = \sum_t \cos E_2 E_2^{(t)},$$

i piani caratteristici $E_2^{(t)}$ appartenendo ad un riferimento caratteristico arbitrario.

7. LA FORMA ESTERNA ω . - Si consideri ora la *forma esterna*:

$$(37) \quad \omega = i g_{p\bar{q}} dz^p \wedge d\bar{z}^{\bar{q}},$$

associata alla metrica hermitiana (1) del n. 2.

Sia E_2 il piano dei vettori $\tilde{M}_1 \tilde{M}_2$ unitari, ortogonali, uscenti da O (n. 3) ed ω_{E_2} la forma (37) su E_2 .

Sul piano E_2 è:

$$dz^r = \tilde{M}_1^r d\xi^1 + \tilde{M}_2^r d\xi^2 \quad , \quad d\bar{z}^{\bar{r}} = \tilde{M}_1^{\bar{r}} d\bar{\xi}^1 + \tilde{M}_2^{\bar{r}} d\bar{\xi}^2,$$

con ξ^1, ξ^2 parametri reali.

Perciò, tenuto conto delle (2), (5), risulta:

$$(38) \quad \omega_{E_2} = i g_{p\bar{q}} (\tilde{M}_1^p \tilde{M}_2^{\bar{q}} - \tilde{M}_1^{\bar{q}} \tilde{M}_2^p) d\xi^1 \wedge d\bar{\xi}^2 = - (\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2) d\xi^1 \wedge d\bar{\xi}^2.$$

D'altra parte, nelle ipotesi attuali su $\tilde{M}_1 \tilde{M}_2, \xi^1 \xi^2$ danno luogo su E_2 ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con unità di misura uguale a quella ivi determinata dalla metrica. Di conseguenza l'*elemento d'area* su E_2 è $d\mathcal{A}_{E_2} = d\xi^1 \wedge d\bar{\xi}^2$.

Ciò premesso, in virtù delle (21), (35), dalla (38) deriva immediatamente la *relazione*:

$$(39) \quad \omega_{E_2} = d\mathcal{A}_{E_2} \cos \delta_{E_2} = d\mathcal{A}_{E_2} \cos E_2 E_2^{(E_1)} = \sum_t d\mathcal{A}_{E_2} \cos E_2 E_2^{(t)}.$$

Tenuta presente poi la definizione di deviazione caratteristica (n. 3) è naturale chiamare *componente caratteristica* dell'elemento d'area il prodotto $d\mathcal{A}_{E_2} \cos \delta_{E_2}$.

In conclusione, per la forma esterna ω , associata alla metrica hermitiana (I), sussistono i teoremi seguenti:

TEOREMA 4. — *Su di un piano E_2 di E_{2n} la forma ω è la componente caratteristica dell'elemento d'area di E_2 .*

TEOREMA 5. — *La forma ω su di un piano E_2 di E_{2n} è somma delle proiezioni dell'elemento d'area di E_2 sui piani caratteristici di un arbitrario riferimento caratteristico.*

8. CASI PARTICOLARI. — Per i piani di E_{2n} , passanti per O , si presentano due casi particolari notevoli.

A) *Piani caratteristici.*

Valgono le proprietà:

A_1 — *Se E_2 è caratteristico, la deviazione caratteristica δ_{E_2} è 0 ovvero π (in dipendenza dall'orientazione di E_2); e viceversa.*

A_2 — *Se E_2 è caratteristico, la forma esterna ω , considerata su E_2 equivale all'elemento d'area di E_2 ; e viceversa.*

A_3 — *Se E_2 è caratteristico, l'elemento d'area di E_2 è la somma delle sue proiezioni sui piani caratteristici di un riferimento caratteristico arbitrariamente fissato; e viceversa.*

La A_1 deriva direttamente dalla definizione di deviazione caratteristica. Dalla A_1 , in virtù della (39), seguono poi le A_2, A_3 , nelle quali il piano E_2 va inteso orientato positivamente (n. 2).

B) *Piani a prodotto hermitiano reale.*

L'espressione:

$$(40) \quad M_1 * M_2 = g_{p\bar{q}} M_1^p M_2^{\bar{q}},$$

dicesi *prodotto hermitiano* dei vettori $M_1 M_2$, uscenti da O ⁽¹⁶⁾.

In particolare, se $M_1 * M_2$ è reale, lo stesso avviene per ogni coppia di vettori uscenti da O ed appartenenti al piano $M_1 M_2$. Il piano $M_1 M_2$ si dice allora piano *a prodotto hermitiano reale*, brevemente *piano p.h.r.* ⁽¹⁷⁾.

Per il seguito conviene osservare che, se E_2 è un piano p.h.r. ed $M_1 M_2$ sono vettori (unitari ed ortogonali) di E_2 uscenti da O , è;

$$(41) \quad \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2 = 0,$$

e viceversa ⁽¹⁸⁾.

(16) In K. YANO-S. BOCHNER [10], p. 129, viene denominato « inner product ».

(17) Le faccette p.h.r. sono state considerate da V. DALLA VOLTA ([3], p. 5). Una proprietà notevole di queste faccette appare in un teorema di S. BOCHNER ([1], p. 186; ved. anche K. YANO-S. BOCHNER [10], p. 129).

(18) Invero dalle definizioni (2), (5), (40) risulta immediatamente $M_1 \times M_2 = -i(M_1 * M_2 - \bar{M}_1 * \bar{M}_2)$ e di qui segue subito l'asserto.

Ciò premesso, valgono le proprietà:

B_1 - Se E_2 è *p.h.r.* la deviazione caratteristica è $\pi/2$ ovvero $3\pi/2$ (in dipendenza dall'orientazione di E_2), cioè i piani del sistema Σ_{E_2} formano con E_2 angoli retti; e viceversa.

B_2 - Se E_2 è *p.h.r.*, la forma esterna ω , considerata su E_2 è nulla; e viceversa.

B_3 - Se E_2 è *p.h.r.*, è nulla la somma delle proiezioni dell'elemento d'area di E_2 sui piani caratteristici di un riferimento caratteristico arbitrariamente fissato; e viceversa.

La B_1 si ottiene immediatamente dalle (21), (41). Le B_2, B_3 seguono subito dalla B_1 , in virtù della (39).

9. OSSERVAZIONI.

O_1 - È noto che nello spazio improprio S_{2n-1} di E_{2n} le direzioni dei vettori congiunti R, \tilde{R} (n. 2) si corrispondono in una omologia armonica, avente per assi due spazi massimi J_{n-1}, \tilde{J}_{n-1} dell'assoluto Σ_{2n-2} ⁽¹⁹⁾.

Sia ora E_2 un piano di E_{2n} per O ed r la sua retta impropria.

Indicate con A, \tilde{A} le intersezioni di r con Σ_{2n-2} , con r', \tilde{r}' le proiezioni di r da \tilde{J}_{n-1}, J_{n-1} su J_{n-1}, \tilde{J}_{n-1} risp. e con Σ_2 la sfera sezione di Σ_{2n-2} con l' S_3 congiungente r', \tilde{r}' , si considerino le rette a, \tilde{a} di Σ_2 appartenenti alla schiera di r', \tilde{r}' e passanti risp. per A, \tilde{A} .

In definitiva, per ogni piano E_2 per O in E_{2n} è univocamente determinato il birapporto $(a, \tilde{a}, r', \tilde{r}')$. E esso, come ho verificato con calcolo un pò lungo ma privo di difficoltà, risulta legato alla deviazione caratteristica δ_{E_2} (n. 3) dalla relazione:

$$(a, \tilde{a}, r', \tilde{r}') = -\operatorname{tg}^2 \frac{\delta_{E_2}}{2}.$$

In particolare, se E_2 è caratteristico ovvero a prodotto hermitiano reale (n. 8), il birapporto $(a, \tilde{a}, r', \tilde{r}')$ vale risp. 0 e -1 ; e viceversa.

Le considerazioni di questa Osservazione sono state suggerite dal prof. B. Segre.

O_2 - Il Teorema 1, stabilito per via diretta al n. 3, può anche esser dedotto dal Teorema 2 del n. 4.

Invero, nel corso della dimostrazione del Teorema 3 del n. 6 si è implicitamente stabilita la relazione:

$$\sum_i \cos E_2 E_2^{(i)} = \cos E_2 E_2^{(E_1)},$$

nella quale per E_1 si intende la retta del fascio \mathfrak{F} del n. 3 individuata dal vettore \mathbf{M}_1 .

D'altra parte il vettore \mathbf{M}_1 è un qualunque vettore unitario di E_2 uscente da O (n. 3); pertanto la relazione precedente sussiste per qualsiasi retta E_1 del fascio \mathfrak{F} .

Ne segue immediatamente il Teorema 1.

O_3 - Dalla (21) si ha subito $\cos \delta_{E_2} = -\cos \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2^{\circ}$. Poiché la forma (1) è definita positiva, ne deriva $|\cos \delta_{E_2}| \leq 1$.

Tenuto conto allora della (39) del n. 7 e della proprietà A_1 del n. 8, si perviene al risultato seguente.

Per ogni piano E_2 di E_{2n} e per un arbitrario riferimento caratteristico \mathfrak{R} sussiste la relazione:

$$-d\mathfrak{A}_{E_2} \leq \sum_i d\mathfrak{A}_{E_2} \cos E_2 E_2^{(i)} \leq d\mathfrak{A}_{E_2}.$$

I valori estremi sono raggiunti se e solo se E_2 è un piano caratteristico.

Nell'ipotesi che la metrica si riduca a $ds^2 = \sum_p dz^p dz^p = \sum_j dx^j dx^j$ e che il riferimento caratteristico \mathfrak{R} sia quello costituito dai versori degli assi di E_{2n} (n. 4), il risultato precedente è noto (W. Wirtinger [9], p. 347; ved. anche B. Segre [8], Teorema II, p. 366).

O_4 - In virtù dell'osservazione O_3 , dalla (39) deriva:

$$-d\mathfrak{A}_{E_2} \leq \omega_{E_2} \leq d\mathfrak{A}_{E_2}.$$

Nel caso particolare, già considerato in O_3 , la relazione ottenuta, con la precisazione A_2 , esprime in termini locali un teorema di W. Wirtinger⁽²⁰⁾.

O_5 - E. Martinelli in [6] ha posto il problema del significato geometrico della forma esterna ω associata da una metrica hermitiana definita positiva, quando essa venga considerata su di una faccetta piana qualsiasi⁽²¹⁾.

I Teorema 4, 5 del n. 7 risolvono completamente la questione.

Il caso delle faccette caratteristiche, già noto⁽²²⁾, è esaurito dalla proprietà A_2 del numero 8.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] S. BOCHNER, *Curvature in Hermitian manifolds*, « Bull. Am. Math. Soc. », 53 (1947).
- [2] E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, 2^{me} ed., Gauthier-Villars, Paris (1951).
- [3] V. DALLA VOLTA, *Varietà totalmente geodetiche nello spazio delle matrici simmetriche*, « Rend. di Mat. », 5, 13 Roma (1955).
- [4] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internazionale Matematico Estivo (1956).
- [5] E. MARTINELLI, *Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche ecc.*, « Atti Acc. Italia », 12 (1941).
- [6] E. MARTINELLI, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa*, Centro Internazionale Matematico Estivo (1956).
- [7] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, « Ann. di Mat. », 6, 43 (1957).
- [8] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, I, Docet, Roma (1951).
- [9] W. WIRTINGER, *Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in Euclidischer und Hermitescher Massbestimmung*, « Monatshefte f. Math. u. Phys. », 44 (1936).
- [10] K. YANO-S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, « Ann. of Math. Studies », n. 32 Princeton Univ. Press. (1953).

(20) W. WIRTINGER [9], p. 351.

(21) E. MARTINELLI [6], p. 17.

(22) Ved. E. MARTINELLI [6], p. 17.

Geometria. — *Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche.* Nota III (*) di ERMANNO MARCHIONNA, presentata (**) dal Socio O. CHISINI.

6. Sia D un'ipersuperficie irriducibile e priva di punti multipli tracciata su V_d ⁽³⁶⁾.

La deficienza del sistema staccato su D dal suo sistema aggiunto non supera la somma delle due ultime irregolarità di V_d , cioè sussiste la disuguaglianza

$$(I_6) \quad \text{def} |K + D| \cdot D \leq q_d + q_{d-1} \quad (37).$$

Per la dimostrazione consideriamo un sistema ausiliario *ampio* $|X|$ tale che il sistema $|D + X|$ sia ampio; risulterà ampio pure il sistema $|X| \cdot D$ segato su D dal sistema $|X|$.

Verifichiamo dapprima che

$$\text{def} |K + D + X| \cdot D = 0.$$

A tale scopo applichiamo la (8₁) della Nota I:

$$(2_6) \quad \begin{aligned} & (-1)^{d+1} (j|C| - j|A| + j||C| \cdot B|) = \\ & = s|A| - s|C| + s||C| \cdot B| - \text{def} |C| \cdot B \end{aligned}$$

e poniamo

$$C = K + D + X \quad ; \quad B = D \quad ; \quad A = C - B = K + X.$$

I sistemi $|A|$ e $|C|$ di V_d sono non speciali ($j|A| = j|C| = 0$) ed aggiunti rispettivamente ai sistemi *ampi* $|X|$ ed $|X + D|$; si ha pertanto $s|A| = s|C| = 0$ (per il teorema II di Kodaira ricordato nel n. 1 della Nota I).

Inoltre, poiché il sistema $||K + D| \cdot D|$ coincide col sistema canonico impuro $|K(D)|$ dell'ipersuperficie D , avviene che il sistema $|C| \cdot B$ tracciato su D è non speciale ($j||C| \cdot B| = 0$) ed aggiunto al sistema ampio $|X| \cdot D$; laonde anche $s||C| \cdot B| = 0$.

(*) Continuazione delle Note I e II apparse su questo volume dei « Rendiconti » alle pp. 396-404 e pp. 500-504.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(36) Come nelle precedenti Note I e II, supporremo sempre che V_d sia irriducibile e priva di punti multipli e che i sistemi lineari di V_d da noi considerati siano virtualmente privi di punti base. Inoltre l'ipersuperficie D sarà tacitamente supposta, come al solito, *non eccezionale*.

(37) La (16) per $d = 2$ coincide con un noto risultato di ENRIQUES (cfr. ad es. [1], p. 112), e per $d = 3$ si trova in SEVERI [8], n. 20, sotto l'ipotesi che l'irregolarità della superficie D sia uguale all'irregolarità superficiale della varietà. Nel n. 31 della stessa Memoria, Severi ha enunciato una proposizione analoga per le V_d di dimensione qualsiasi; tuttavia ivi la penultima irregolarità q_{d-1} non possiede ancora il significato che le si attribuisce attualmente, ma appare come limite superiore dell'irregolarità $(d-1)$ -dimensionale delle ipersuperficie di V_d (e l'esistenza di tale limite è assunta esplicitamente come un *postulato*).

Ciò posto, si deduce dalla (2₆) che

$$\text{def} | \bar{C} | \cdot B = \text{def} | K + D + X | \cdot D = 0.$$

Orbene, poiché il sistema $| K + D + X |$ aggiunto ad $X + D$ taglia su D un sistema completo, si può affermare (in base ad un lemma di Severi ⁽³⁸⁾) che la deficienza del sistema tagliato su D dal sistema aggiunto $| K + D |$ non supera quella del sistema tagliato su X dal sistema aggiunto $| K + X |$; cioè

$$\text{def} | K + D | \cdot D \leq \text{def} | K + X | \cdot X.$$

Ma, poiché X è *ampio*, si ha

$$\text{def} | K + X | \cdot X = q_d + q_{d-1} \text{ }^{(39)};$$

si conclude pertanto che

$$\text{def} | K + D | \cdot D \leq q_d + q_{d-1}.$$

Osservazione. — Nella (2₆) poniamo $C = K + D$, $B = D$, $A = C - B$. Otteniamo

$$\begin{aligned} (3_6) \quad & (-1)^{d+1} (j | K + D | - j | K | + j || K + D | \cdot D |) = \\ & = s | K | - s | K + D | + s || K + D | \cdot D | - \text{def} | K + D | \cdot D. \end{aligned}$$

Si ha ovviamente

$$j | K + D | = 0 \quad ; \quad j | K | = 1 \quad ; \quad j || K + D | \cdot D | = 1,$$

e per le (1₄), (2₄) del n. 4 (Nota II),

$$s | K | = q_d(V_d) = q_d \quad ; \quad s || K + D | \cdot D | = s | K(D) | = q_{d-1}(D).$$

La (3₆) diventa così

$$s | K + D | = q_d + q_{d-1}(D) - \text{def} | K + D | \cdot D$$

e, tenendo conto della (1₆), si deduce

$$s | K + D | \geq q_{d-1}(D) - q_{d-1},$$

cioè *la sovrabbondanza del sistema aggiunto ad un'ipersuperficie D , irriducibile e senza punti multipli, non è mai inferiore alla differenza delle irregolarità $(d-1)$ -dimensionali di D e di V_d .*

(38) Cfr. [8], e precisamente il Lemma I del n. 20. Tale lemma è stato dimostrato per le V_3 , ma (come avverte Severi nel n. 31 della stessa Memoria) esso si estende alle V_d di dimensione qualsiasi con ovvie varianti di linguaggio.

(39) Questa relazione non è altro che la (3₄) del n. 4 (Nota II) considerata per $i = 1$.

Notiamo che è certamente $s | K + D | \geq 0$ ⁽⁴⁰⁾ non solo quando $q_{d-1}(D) = q_{d-1}$ ⁽⁴¹⁾ ma anche nel caso che D abbia in comune con V_d i valori delle irregolarità a $2, 3, \dots, d-2$ dimensioni e sia tale che sopra di essa non si annulli nessuna forma differenziale di prima specie di grado $d-1$ appartenente a V_d (avendosi allora $q_{d-1}(D) \geq q_{d-1}$ ⁽⁴²⁾).

7. Nei nn. 4, 5 (Nota II) è stato osservato che *la sovrabbondanza di un sistema $|D|$ è uguale od opposta a quella del sistema $|K - D|$, residuo di $|D|$ rispetto al sistema canonico, a seconda che la dimensione della varietà V_d sia pari o dispari.*

Tenendo conto di ciò è possibile esprimere la sovrabbondanza di un sistema *ampio* $|E|$ tracciato su V_d in funzione di deficienze legate soltanto ad $|E|$ ed al sistema canonico $|K|$.

Ricordiamo che, se $|D|$ è un sistema lineare qualsiasi ed $|X|$ un sistema lineare *ampio* tale che $|X + D - K|$ sia ampio, si ha

$$(17) \quad s | D | = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{def} | D + iX | \cdot X^i,$$

(teorema di Riemann-Roch nell'enunciato di Hodge; cfr. il n. 1 della Nota I).

Poniamo

$$D = K - E, \quad X = 2E.$$

I due sistemi $|X|$ e $|X + D - K| = E$ sono entrambi ampi, cosicché è possibile applicare la (17).

Si ottiene

$$s | K - E | = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{i+1} \text{def} | K - E + 2iE | \cdot (2E)^i.$$

D'altra parte, poiché $s | E | = (-1)^d s | K - E |$, si ha

$$(27) \quad s | E | = \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{d+i+1} \text{def} | K + (2i-1)E | \cdot (2E)^i.$$

(40) E di conseguenza, poiché

$$\dim | K + D | = \delta(K + D) + s | K + D | \quad (j | K + D | = 0),$$

si ottiene

$$\dim | K + D | \geq P_a(V_d) + P_a(D) - 1.$$

Per questo si ricordi il n. 1 (Nota I) e precisamente la nota ⁽¹⁴⁾ a piè di pagina. Ivi si verifica che la dimensione virtuale del sistema $|K + D|$ aggiunto ad una ipersuperficie D (supposta irriducibile e priva di punti multipli) è

$$\delta(K + D) = P_a(V_d) + P_a(D) - 1.$$

Cfr. anche HODGE [3], p. 293.

(41) Ad esempio, se $|D|$ è un sistema *ampio* si ha $s | K + D | = 0$ (Kodaira) ed inoltre $q_{d-1} = q_{d-1}(D)$. Anzi è addirittura $q_{d-i} = q_{d-i}(D^i)$ (si ricordi il n. 4 della Nota II), cioè *l'irregolarità $(d-i)$ -dimensionale di V_d coincide con l'analoga irregolarità della varietà D^i intersezione di i generiche ipersuperficie di un qualsiasi sistema ampio $|D|$.*

(42) Cfr. SEVERI [10], p. 189.

Pertanto

$$\dim |E| = \delta(E) + (-1)^{d+1} j |E| + \sum_{i=1}^{d-1} (-1)^{d+i+1} \operatorname{def} |K + (2i-1)E| \cdot (2E)^i.$$

(teorema di Riemann-Roch per i sistemi ampi).

Per $d = 2$ la (27) diventa

$$s |E| = \operatorname{def} |K + E| \cdot (2E).$$

Si ritrova così la seguente nota proprietà: sopra una superficie la sovrabbondanza di un sistema ampio $|E|$ è uguale alla deficienza della serie che il sistema aggiunto ad E taglia sopra una curva generica del sistema doppio $|2E|$.

8. La relazione (3₅) del n. 5 (Nota II)

$$(I_8) \quad (-1)^{d+1} \operatorname{def} |K| \cdot D + \operatorname{def} |D| \cdot D = (-1)^d q_d - s |D| + s ||D| \cdot D|$$

offre un legame tra la sovrabbondanza di un sistema lineare $|D|$, individuato da una ipersuperficie D (irriducibile e priva di punti multipli), e la sovrabbondanza del suo sistema caratteristico ⁽⁴³⁾.

Consideriamo ora una V_d , irriducibile e priva di punti multipli, la quale sia *intersezione completa di $r-d$ forme* dello spazio ambiente S_r aventi gli ordini n_1, n_2, \dots, n_{r-d} .

(43) La relazione si semplifica notevolmente quando l'irregolarità superficiale q_2 e l'ultima irregolarità q_d della varietà V_d sono entrambe nulle. Si ha allora

$$s ||D| \cdot D| = (-1)^{d+1} \operatorname{def} |K| \cdot D + s |D|,$$

e questo perché, essendo $\operatorname{def} |D| \cdot D \leq q_2$ (KODAIRA [4], p. 123), dall'ipotesi $q_2 = 0$ segue necessariamente $\operatorname{def} |D| \cdot D = 0$.

In tal caso per $d = 2$ ci si riduce addirittura alla

$$s |D| = \operatorname{def} |K| \cdot D$$

(la sovrabbondanza $s ||D| \cdot D|$ è nulla perché relativa ad una serie lineare sopra una curva D).

Si ritrova così che sopra una superficie *regolare* la sovrabbondanza del sistema lineare (virtualmente privo di punti base) individuato da una curva D (irriducibile e priva di punti multipli) uguaglia la deficienza della serie staccata su D dal sistema canonico della superficie.

Notiamo tra l'altro che per $d > 2$, qualora si supponga che $|D|$ sia sufficientemente ampio rispetto al sistema canonico $|K|$ di V_d , la (18) può servire a ritrovare la relazione

$$s ||D| \cdot D| = q_2 + (-1)^{d+1} q_d$$

che compare al termine del n. 4 (Nota II).

Infatti, poiché $|D|$ e $|D - K|$ sono ampi, dev'essere: $\operatorname{def} |D| \cdot D = q_2$ (KODAIRA [4] p. 123); $s |D| = 0$; $\operatorname{def} |K| \cdot D = 0$. (Queste due ultime uguaglianze seguono rispettivamente dai teoremi II e III di Kodaira ricordati nel n. 1 della Nota I).

In generale si ha:

$$s ||D| \cdot D| \leq q_2 + (-1)^{d+1} q_d + (-1)^{d+1} \operatorname{def} |K| \cdot D + s |D|.$$

Per $d = 3$, essendo $s ||D| \cdot D| \geq 0$ (perché si tratta della sovrabbondanza di un sistema lineare sopra una superficie D), si ritrova un risultato di B. Segre ([6], n. 55):

$$s |D| \geq -q_2 - q_3 - \operatorname{def} |K| \cdot D.$$

Per mezzo della (18) verificheremo che:

I) *Le forme di S_r aventi un ordine qualsiasi l tagliano sopra una tale V_d ($d \geq 2$) un sistema lineare (completo) di sovrabbondanza nulla (estendendo una nomenclatura introdotta per le superficie ⁽⁴⁴⁾, esprimeremo questo fatto dicendo che V_d è aritmeticamente regolare).*

II) *Le varie irregolarità q_2, q_3, \dots, q_d di V_d risultano di conseguenza tutte nulle (cioè V_d è totalmente regolare).*

A tale scopo ricordiamo innanzitutto che:

a) le forme d'ordine

$$\rho = n_1 + n_2 + \dots + n_{r-d} - r - 1$$

tagliano su V_d varietà del sistema canonico ⁽⁴⁵⁾;

b) la curva V_1 sezione di V_d con un generico spazio S_{r-d+1} , essendo intersezione completa di $r-d$ forme di S_{r-d+1} , risulta *aritmeticamente normale*, cioè le forme di un ordine qualsiasi l tagliano su di essa un sistema lineare completo ⁽⁴⁶⁾;

c) pertanto anche le varietà V_2, V_3, \dots, V_{d-1} , sezioni di V_d con generici spazi $S_{r-d+2}, S_{r-d+3}, \dots, S_{r-1}$, e la stessa V_d sono aritmeticamente normali ⁽⁴⁷⁾.

Ciò posto, consideriamo un'ipersuperficie D di V_d tagliata da una forma d'ordine l arbitrario.

Poiché D è intersezione completa di $r-d+1$ forme, essa risulta aritmeticamente normale.

Di qui segue che il sistema caratteristico $|D| \cdot D$ è completo (in quanto tagliato su D dalle forme d'ordine l), cioè

$$\text{def } |D| \cdot D = 0;$$

inoltre, poiché il sistema canonico $|K|$ è tagliato su V_d dalle forme d'ordine ρ , e queste a loro volta tagliano su D un sistema completo, si ha anche

$$\text{def } |K| \cdot D = 0.$$

La (18) si riduce così alla relazione

$$(28) \quad s |D| = (-1)^d q_d + s ||D| \cdot D|.$$

(44) Cfr. E. MARCHIONNA, *Sulle superficie aritmeticamente regolari ed aritmeticamente normali*, « Rend. Acc. Lincei », questo volume, p. 24. La proprietà in esame si trova ivi dimostrata per $d = 2$.

(45) Cfr. F. SEVERI, *Su alcune questioni di postulazione*, « Rend. Circolo Matematico di Palermo », t. XVII, nn. 10, 12 (1903).

La proprietà è ivi dimostrata soltanto per le curve e per le superficie, ma si estende con facile induzione alle V_d di dimensione qualsiasi applicando ad una sezione iperpiana D di V_d una proprietà fondamentale dell'aggiunzione ($|K(D)| = ||K + D| \cdot D|$).

(46) Cfr. SEVERI, loc. cit. in ⁽⁴⁵⁾, n. 10.

(47) Basta ricordare che se una sezione iperpiana di V_d è aritmeticamente normale, lo è anche V_d . Cfr. ad esempio F. GAETA, *Sulle curve sghembe algebriche di residuale finito*, « Annali di Matematica », ser. IV, t. XXVII, p. 193 (1948).

Dimostriamo ora che $q_d = 0$, e che $s | D | = 0$ qualunque sia l'ordine l delle forme che tagliano $| D |$.

Queste due proprietà sono vere per le curve (indipendentemente dall'ipotesi che si tratti di intersezioni complete); ammesso quindi che esse sussistano per la dimensione $d-1$, le dimostreremo per la dimensione d .

Poiché D è una varietà intersezione completa a $d-1$ dimensioni, sarà $s | D | \cdot D = 0$ qualunque sia l'ordine l delle forme che tagliano su D il sistema caratteristico $| D | \cdot D$.

La (2₈) diventa così

$$s | D | = (-1)^d q_d.$$

Orbene per l alto si ha $s | D | = 0$, perché le forme d'ordine l sufficientemente elevato tagliano sopra una V_d non singolare un sistema $| D |$ completo regolare (48). Si deduce che $q_d = 0$, e che $s | D | = 0$ qualunque sia l .

Ovviamente risultano nulle anche le irregolarità q_2, q_3, \dots, q_{d-1} di V_d , perché per definizione esse sono le irregolarità (delle dimensioni $2, 3, \dots, d-1$) delle varietà sezioni di V_d con spazi $S_{r-d+2}, S_{r-d+3}, \dots, S_{r-1}$; e queste varietà sono nel nostro caso anch'esse intersezioni complete di forme.

9. Per rendere più chiare le considerazioni successive torneremo ad indicare con $| K(V_d) |$ il sistema canonico $| K |$ e con $q_h(V_d)$ l'irregolarità h -dimensionale q_h di una V_d qualsiasi.

Se $| D |$ è un sistema lineare completo tracciato sopra V_d si ha

$$\text{def } | D | \cdot D \leq q_2(V_d)$$

(Kodaira [4]); pertanto dalla (1₈) si deduce:

$$(1_9) \quad s | D | \geq (-1)^d \{ q_d(V_d) + \text{def } | K(V_d) | \cdot D \} - q_2(V_d) + s | | D | \cdot D |.$$

Sia $| E |$ un sistema lineare tale che una sua generica ipersuperficie E ed una sua generica varietà caratteristica E^h a $d-h$ dimensioni (con $h < d$) siano irriducibili e prive di punti multipli.

Sopra la varietà E^h ($E^1 = E$) consideriamo il sistema lineare $| D | = | | E | \cdot E^h |$; tale sistema è individuato da una varietà $D = E^{h+1}$ ed il suo sistema caratteristico $| D | \cdot D$, reso eventualmente completo, coincide con il sistema $| | E | \cdot E^{h+1} |$.

Applicando la (1₉) alla varietà E^h ed al suindicato sistema $| D |$ si ottiene:

$$(2_9) \quad s | | E | \cdot E^h | \geq (-1)^{d-h} \{ q_{d-h}(E^h) + \text{def } | K(E^h) | \cdot E^{h+1} \} - q_2(E^h) + s | | E | \cdot E^{h+1} |.$$

Per comodità di nomenclatura porremo $V_d = E^0$, dimodoché la (1₉) per $D = E$ assume la forma

$$(3_9) \quad s | E | \geq (-1)^d \{ q_d(E^0) + \text{def } | K(E^0) | \cdot E \} - q_2(E^0) + s | | E | \cdot E |.$$

(48) Cfr. SEVERI [9], n. 21.

Ciò posto, si considerino insieme alla (3₉) le $d-2$ relazioni che si ottengono dalla (2₉) per $h = 1, 2, \dots, d-2$, e si ricordi che la sovrabbondanza $s || E \cdot E^{d-1}$ relativa alla curva E^{d-1} è uguale a zero; supponendo ogni E^{i+1} contenuta in E^i , si vede allora facilmente che

$$(4_9) \quad s | E | \geq \sum_{i=0}^{d-2} (-1)^{d-i} \{ q_{d-i}(E^i) + \text{def} | K(E^i) | \cdot E^{i+1} \} - \sum_{i=0}^{d-2} q_2(E^i).$$

Quando E coincide col sistema delle sezioni iperpiane di V_d si ha (per $r \leq d-s$) $q_r(E^s) = q_r(V_d) = q_r$; e di conseguenza

$$(5_9) \quad s | E | \geq (1-d) q_2 + \sum_{i=0}^{d-2} (-1)^{d-i} \{ q_{d-i} + \text{def} | K(E^i) | \cdot E^{i+1} \}.$$

Quest'ultima relazione è valida ovviamente per un qualsiasi sistema *ampio* $|E|$, data l'invarianza delle irregolarità rispetto alle trasformazioni birazionali di V_d .

Le disuguaglianze (4₉) e (5₉) hanno il pregio di limitare inferiormente la sovrabbondanza di $|E|$ in funzione di significativi caratteri numerici della varietà V_d e del sistema stesso (e porgono sostanzialmente nuove forme del teorema di Riemann-Roch, quantunque menò efficaci delle precedenti).

10. Sia $|C|$ un sistema lineare tracciato su V_d , B un'ipersuperficie irriducibile (e priva di punti multipli), $|A|$ il sistema differenza $|C-B|$.

Nel n. 2 (Nota I) abbiamo visto che sussiste la relazione (dimostratasi molto utile)

$$(-1)^{d+1} (j|C| - j|A| + j||C| \cdot B) = s|A| - s|C| + s||C| \cdot B - \text{def} |C| \cdot B.$$

Orbene, introducendo il sistema canonico $|K|$ di V_d , si può scrivere questa relazione nella forma più semplice:

$$(-1)^{d+1} \text{def} |K-A| \cdot B = s|A| - s|C| + s||C| \cdot B - \text{def} |C| \cdot B.$$

Infatti

$$j|C| = \dim |K-C| + 1 \quad ; \quad j|A| = \dim |K-A| + 1,$$

e poiché il sistema canonico impuro di B è il sistema $||K+B| \cdot B|$ (4₉), si ha

$$\begin{aligned} j||C| \cdot B| &= \dim ||K+B-C| \cdot B| + 1 = \dim ||K-A| \cdot B| + 1 = \\ &= \dim |K-A| \cdot B + \text{def} |K-A| \cdot B + 1. \end{aligned}$$

D'altra parte, essendo $(K-A) = (K-C) + B$, si ha

$$\dim |K-C| = \dim |K-A| - \dim |K-A| \cdot B - 1,$$

per cui

$$j|C| - j|A| + j||C| \cdot B| = \text{def} |K-A| \cdot B;$$

il che prova l'asserto.

(4₉) Il che accade notoriamente anche quando le varietà del sistema $|K+B| \cdot B$ siano virtuali.

È questa una classica proprietà dell'aggiunzione che (insieme ad altre) è stata recentemente estesa da B. SEGRE, in *Nuovi metodi e risultati nella Geometria sulle varietà algebriche* « Annali di Matematica », serie IV, t. XXXV, n. 70 (1953).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, Zanichelli, Bologna, 1948.
- [2] F. HIRZEBRUCH, *Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, «Ergebnisse der Mathematik», Neue Folge, 9 (1956).
- [3] W. V. D. HODGE, *A note on the Riemann-Roch theorem*, «Journ. London Math. Soc.», 30 (1955).
- [4] K. KODAIRA, *Some results in the transcendental theory of algebraic varieties*, «Ann. of Mathem.», 59 (1954).
- [5] K. KODAIRA e D. C. SPENCER, *On arithmetic genera of algebraic varieties*, «Proc. Nat. Acad. U.S.A.», 39 (1953).
- [6] B. SEGRE, *Quelques résultats nouveaux dans la géométrie sur une V_3 algébrique*, «Mem. Acad. Roy. Belgique» (2), 14 (1936).
- [7] J. P. SERRE, *Un théorème de dualité*, «Comm. Math. Helvet.», 29 (1955).
- [8] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche*, «Rend. Circ. Matem. Palermo», 28 (1909).
- [9] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (2^a memoria) «Annali di Matem.», (4), 32 (1951).
- [10] F. SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (3^a memoria) «Annali di Matem.», (4), 41 (1956).
- [11] D. C. SPENCER, *Cohomologie and the Riemann-Roch theorem*, «Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.», 39 (1953).
- [12] O. ZARISKI, *Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi*, «Ann. of Math.», 55 (1952).

Idrodinamica. — *Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche.* Nota I di GIUSEPPE EVANGELISTI, presentata (*) dal Corrisp. G. SUPINO.

1. Il servosistema di regolazione di un gruppo turbina idraulica-generatore elettrico funziona secondo il ciclo chiuso (o anello di regolazione) rappresentato dallo schema a blocchi della fig. 1. Prendono parte al processo, nell'ordine, le seguenti variabili (tutte espresse adimensionalmente, come rapporto rispetto ad un opportuno valore di riferimento): velocità prescritta \bar{n} del gruppo; posizione σ del cassetto di comando del servomotore di manovra; posizione ψ del distributore della turbina (supposto rigidamente collegato col servomotore, come succede di regola); potenza p comunicata dal complesso adduttore alla turbina; velocità effettiva n del gruppo. Ciascuno dei blocchi interposti fra due grandezze successive rappresenta un organo di collegamento e si traduce in un particolare operatore matematico (normalmente di tipo integrodifferenziale).

Nella stessa fig. 1 sono segnate le due entrate che eccitano il servosistema. Nel nodo iniziale entra la velocità prescritta \bar{n} ; in corrispondenza della potenza p entra il disturbo \bar{p} generato dalle variazioni di prelievo della

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

rete utilizzatrice. L'anello si chiude al nodo d'ingresso della \bar{n} ; qui viene riportata in retroazione (di regola diretta) la velocità effettiva n , così che l'eccitazione è dovuta alla deviazione (o « errore ») $\bar{n} - n$. È compito del servosistema realizzare il meglio possibile la prescrizione imposta da \bar{n} ed attenuare al massimo - cioè, riprodurre il peggio possibile - l'influenza del disturbo \bar{p} .

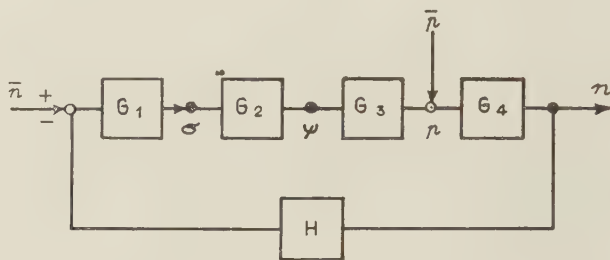


Fig. 1.

Le due entrate, riferimento \bar{n} e disturbo \bar{p} (a parte il carattere aleatorio di quest'ultimo), vanno riguardate come funzioni note del tempo; tutte le altre grandezze sono incognite, e restano definite dagli operatori caratteristici di ciascun blocco. Se il sistema ha una costituzione invariabile nel tempo ed è lineare - o viene linearizzato, considerandolo solo nell'ambito dei piccoli scostamenti - gli operatori differenziali sono lineari a coefficienti costanti.

Una volta adottato, come di consueto, il procedimento della trasformazione di Laplace, che trasferisce l'indagine dal dominio dei tempi t a quello delle frequenze complesse s , e dalle funzioni oggetto $f(t)$ alle loro immagini $F(s)$, gli operatori differenziali rispetto a t si trasformano in relazioni finite nella s (o « funzioni di trasferimento »); nel caso della fig. 1 sono presenti le quattro funzioni di azione $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$ e l'eventuale funzione di retroazione $H(s)$.

Le funzioni di trasferimento considerate a sé - cioè indipendentemente dall'operazione, spesso fuori dalle possibilità pratiche, di risalire alle funzioni oggetto - sono adatte a fornire informazioni intorno al comportamento sia di ciascun blocco, sia del servosistema nel suo complesso. A parte la deduzione dell'equazione caratteristica, che riporta ai mezzi classici, soccorre quel mezzo semplice e potente che è l'analisi frequenziale: l'indagine, cioè, della selettività di risposta in regime oscillatorio forzato, che si esegue facendo percorrere alla s il semiasse immaginario positivo. Questo particolare metodo di attacco, che prescinde dalla determinazione degli esponenti caratteristici, affronta non soltanto il problema della stabilità, ma anche quelli, non meno importanti, di determinare l'ordine di grandezza degli smorzamenti e di individuare i mezzi di correzione nei casi instabili o insufficientemente stabili.

L'indagine della presente Nota si informa a questo punto di vista. Essa si propone di determinare la funzione di trasferimento $G_3(s)$, in cui si con-

centra l'influenza dell'adduzione idraulica, per uno schema adduttore molto generale; viene con ciò costituita la base delle indagini specifiche, le quali formeranno oggetto di una Nota successiva.

2. Lo schema d'impianto idroelettrico su cui si fissa l'attenzione è riprodotto nella fig. 2. Da un serbatoio a livello invariabile esce un primo elemento in pressione (chiamato, per brevità, galleria) che sbocca in una vasca a pelo libero (pozzo piezometrico); dal pozzo parte un secondo elemento in pressione (la condotta) che alimenta il distributore della turbina; tale distributore è indicato nella fig. 2 col classico dispositivo ad ago di una ruota ad azione.

Nella fig. 2 lo schema è rappresentato in *a*) nel moto stazionario su cui si fissa l'attenzione, e in *b*) una generica situazione del moto vario; la stessa fig. 2 contiene l'indicazione dei parametri fondamentali che intervengono nella ricerca.

Se il complesso adduttore è privo di fenomeni reattivi e dissipativi la potenza consegnata alla turbina riesce proporzionale all'apertura del distributore; risulta quindi, identicamente, $p = \psi$ e la funzione di trasferimento G_3 si riduce all'unità. Questo caso si verifica, molto prossimamente, nelle motrici termiche. Nei generatori idroelettrici, invece, l'adduzione introduce un complesso di effetti che rendono il problema della stabilità di marcia più complicato, e di soluzione più difficile. Le equazioni determinatrici della relativa funzione G_3 sono scritte qui sotto, nell'ordine in cui s'incontrano risalendo da valle verso monte.

All'ovvia equazione della potenza uscente dal sistema idraulico

$$(1) \quad P = \gamma Q Y$$

(γ peso specifico dell'acqua) segue l'equazione dell'efflusso attraverso il distributore

$$(2) \quad Q = \Psi \sqrt{2 g Y}$$

(g , al solito, accelerazione di gravità).

L'equazione del moto nella condotta forzata si presenta assai complessa se la condotta viene considerata nel suo carattere di sistema continuo. Le complicazioni si riducono al minimo considerando la condotta uniforme e senza resistenze, e concentrando la perdita di carico nella sezione di sbocco. L'ipotesi è adottata assai spesso, appunto allo scopo di semplificare, e nel caso specifico appare accettabile, perché le resistenze contano poco, e possono venir messe in conto anche in modo grossolano.

Accettata questa ipotesi, le equazioni della condotta si riducono a quelle delle corde vibranti. Indicati con V_c la celerità della propagazione ondosa, con x l'ascissa generica (contata, lungo la condotta, a partire dalla sezione di sbocco), con $Y_c(x, t)$, $Q_c(x, t)$ i corrispondenti valori del carico

piezometrico e della portata, il moto vario in condotta è governato dal sistema

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} Y_c(x, t) = \frac{1}{g} \frac{1}{F_c} \frac{\partial}{\partial t} Q_c(x, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} Y_c(x, t) = \frac{V_c^2}{g} \frac{1}{F_c} \frac{\partial}{\partial x} Q_c(x, t) \end{cases}$$

il quale va integrato sotto le due condizioni di estremità

$$(4) \quad Q_c(0, t) = Q \quad Y_c(L_c, t) = Y_v.$$

A questo si aggiunge la relazione finita

$$(5) \quad Y = Y_c(0, t) - K_c Q^2$$

che mette in conto, secondo l'ipotesi indicata più sopra, l'intervento delle resistenze passive.

L'equazione del pozzo piezometrico è data dall'ovvia relazione di continuità

$$(6) \quad F_v \frac{dY_v}{dt} = Q_g - Q_c(L_c, t)$$

mentre l'ultimo elemento a monte, la galleria, può essere considerato come discreto, in quanto i suoi movimenti consistono, essenzialmente, in lente oscillazioni d'insieme. L'equazione del moto in galleria vale perciò

$$(7) \quad \frac{1}{g} \frac{L_g}{F_g} \frac{dQ_g}{dt} + (Y_v - \bar{Y}_s) + K_g Q_g^2 = 0.$$

Si passi ora alle grandezze adimensionali indicate nella fig. 2, e se ne considerino piccoli spostamenti dal valore di regime: si considerino, cioè, le variabili:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\psi = \frac{\Psi - \bar{\Psi}}{\bar{\Psi}} & \Delta p = \frac{P - \bar{P}}{\bar{P}} \\ \Delta y = \frac{Y - \bar{Y}}{\bar{Y}} & \Delta q = \frac{Q - \bar{Q}}{\bar{Q}} \\ \Delta q_c = \frac{Q_c - \bar{Q}}{\bar{Q}} & \Delta y_c = \frac{Y_c - \bar{Y}}{\bar{Y}} \\ \Delta y_v = \frac{Y_v - \bar{Y}_v}{\bar{Y}} & \Delta q_g = \frac{Q_g - \bar{Q}}{\bar{Q}} \end{array} \right.$$

e si indichino con le stesse notazioni, munite di asterisco, le loro trasformate di Laplace. Con ciò, le equazioni del fenomeno diventano:

Equazioni (1) della potenza:

$$\Delta p^* = \Delta q^* + \Delta y^*.$$

Equazione (2) dell'efflusso:

$$\Delta q^* = \Delta\psi^* + \frac{1}{2} \Delta y^*.$$

Equazione (3) della condotta:

$$\Delta y_c^*(0, s) = \frac{1}{\cosh \frac{1}{2} T_e s} \Delta y_v^* - 2 \rho_c \operatorname{tgh} \frac{1}{2} T_e s \cdot \Delta q^*$$

$$\Delta q_c^*(L_c, s) = \frac{1}{2 \rho_c} \operatorname{tgh} \frac{1}{2} T_e s \cdot \Delta y_v^* + \frac{1}{\cosh \frac{1}{2} T_e s} \Delta q^*.$$

Equazione (5) della caduta utile:

$$\Delta y^* = \Delta y_c^*(0, s) - 2 h_c \Delta q^*.$$

Equazione (6) del pozzo piezometrico

$$T_v s \cdot \Delta y_v^* = \Delta q_g^* - \Delta q_c^*(L_c, s).$$

Equazione (7) della galleria:

$$(T_g s + 2 h_g) \Delta q_g^* + \Delta y_v^* = 0.$$

Queste equazioni, i cui parametri sono forniti dalle

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{ll} T_c = \frac{1}{g} \frac{L_c}{F_c} \frac{\bar{Q}}{\bar{Y}} & h_c = \frac{\bar{H}_c}{\bar{Y}} \\ T_e = \frac{2 L_c}{V_c} & \rho_c = \frac{1}{2 g} \frac{V_c}{F_c} \frac{Q}{\bar{Y}} = \frac{T_c}{T_e} \\ T_v = F_v \frac{\bar{Y}}{\bar{Q}} \\ T_g = \frac{1}{g} \frac{L_g}{F_g} \frac{\bar{Q}}{\bar{Y}} & h_g = \frac{\bar{H}_g}{\bar{Y}} \end{array} \right.$$

si ricavano senza difficoltà considerando i diversi scostamenti come quantità piccole del primo ordine rispetto ai rispettivi valori di regime. Le equazioni della condotta risolvono il sistema differenziale ordinario

$$\frac{d}{dx} \Delta y_c^*(x, s) = \frac{1}{g} \frac{Q}{F_c \bar{Y}} s \Delta q_c^*(x, s)$$

$$\frac{d}{dx} \Delta q_c^*(x, s) = \frac{g}{V_c^2} \frac{F_c \bar{Y}}{\bar{Q}} s \Delta y_c^*(x, s)$$

che trasferisce il sistema (3) nel dominio delle s : sistema che s'integra, con mezzi elementari, sotto le condizioni di estremità:

$$\Delta q_c(0, s) = \Delta q^* \quad \Delta q_c(L_c, s) = \Delta y_v^*$$

imposte dalle (4).

Il sistema così dedotto fornisce, con procedimento algebrico più che ovvio, la ricercata funzione di trasferimento $G_3(s) = \frac{\Delta p^*}{\Delta \psi^*}$. Si ottiene

$$-\frac{G_3(s)}{2} \left\{ 2 \rho_c \sinh \frac{1}{2} T_e s + 2(1 + h_c) \cosh \frac{1}{2} T_e s \right\} \left\{ \left(T_v s + \frac{1}{2 \rho_c} \operatorname{tgh} \frac{1}{2} T_e s \right) (T_g s + 2 h_g) + 1 \right\} =$$

$$\left\{ 2 \rho_c \sinh \frac{1}{2} T_e s - (1 - 2 h_c) \cosh \frac{1}{2} T_e s \right\} \left\{ \left(T_v s + \frac{1}{2 \rho_c} \operatorname{tgh} \frac{1}{2} T_e s \right) (T_g s + 2 h_g) + 1 \right\} + \frac{T_g s + 2 h_g}{\cosh \frac{1}{2} T_e s}.$$

4. La forma della funzione di trasferimento $G_3(s)$ dimostra che le azioni perturbatrici dell'adduzione sono oltremodo complicate, così da lasciare poche speranze di risultati concreti ai tentativi d'indagine generale.

È tuttavia possibile desumere le informazioni di fondo sull'influenza di ciascun fattore procedendo per separazione di effetti: il quale argomento troverà sviluppo nella Nota successiva.

Meccanica. — *Sforzi plastici in una membrana piana di spessore variabile.* Nota di EDOARDO STORCHI, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

Il fluire dei continui plastici è governato da un certo gruppo di equazioni indefinite, dalle condizioni iniziali e dalle condizioni al contorno. Se, di fronte alle altre sollecitazioni, si trascurano la forza esterna di campo e le forze di inerzia (il che è sovente lecito in plasticità tenuto conto della circostanza che le accelerazioni sono molto piccole), le equazioni indefinite nello schema di Mises si scrivono, in coordinate cartesiane ortogonali, nel modo seguente:

$$\left. \begin{array}{ll} (1) & \sigma_x - \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ (2) & \sigma_y - \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ (3) & \sigma_z - \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{ll} (4) & \tau_{xy} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ (5) & \tau_{xz} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ (6) & \tau_{yz} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \end{array}$$

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} (7) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ (8) \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ (9) \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$(10) \quad 3(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2) - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 = 6H^2.$$

(*) Nella seduta del 10 giugno 1958.

Nel sistema (*) $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ sono le sei componenti distinte del tensore doppio simmetrico degli sforzi, v_x, v_y e v_z rappresentano le componenti cartesiane della velocità, μ è uno scalare sempre positivo, funzione a priori incognita del posto e del tempo. Le prime sei equazioni legano gli sforzi alle velocità di deformazione, le (7), (8), (9) (che formalmente, per l'ipotesi fatta sulle forze di massa, coincidono con le equazioni indefinite di equilibrio dei continui) traducono il teorema della quantità di moto, la (10) infine (nella quale H denota la costante di plasticità), esprime la condizione di plasticità.

Nelle 10 equazioni ora scritte figurano esattamente 10 incognite: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, v_x, v_y, v_z, \mu$. Tali incognite, nello schema adottato possono ritenersi, in un intervallo di tempo abbastanza piccolo, funzioni soltanto del posto e non del tempo. Il sistema è allora genericamente determinato e, sotto opportune condizioni al contorno, esso dovrebbe consentire di risolvere il problema plastico completo, vale a dire sia il problema della determinazione dello stato di sforzo che il problema della determinazione dell'atto di moto.

Oggetto della presente Nota non è però lo studio del problema plastico generale, bensì l'impostazione rigorosa di un classico problema particolare, il problema degli sforzi piani.

IL PROBLEMA DEGLI SFORZI PIANI IN PLASTICITÀ. - Non esiste un perfetto accordo da parte di tutti gli Autori sulla definizione di distribuzione piana di sforzi. Alcuni intendono che lo stato di sforzo sia piano se in tutti i punti del continuo plastico risulta:

$$(11) \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0 \quad \sigma_z = 0$$

senza però che necessariamente le altre componenti del tensore degli sforzi siano indipendenti da z . Altri invece pongono l'ulteriore condizione:

$$(12) \quad \sigma_x = \sigma_x(x, y) \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y) \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y).$$

Appartengono alla seconda categoria la maggioranza degli Autori, per esempio H. Geiringer⁽¹⁾, W. Prager⁽²⁾, G. Hodge⁽³⁾, alla prima invece, l'Hill⁽⁴⁾. Questi punti di vista rispecchiano del resto uno stato di cose che si verifica anche in elasticità.

Un caso classico e molto notevole in cui la (11) è verificata, è quello di una lamina piana sottile la quale sia sottoposta all'azione di forze applicate al contorno e distribuite uniformemente lungo lo spessore. In questo caso le componenti $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ sono effettivamente nulle su ambedue le facce

(1) H. GEIRINGER, *Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes*, « Memorial des Sciences Mathématiques », Paris, 1937, p. 26.

(2) W. PRAGER and P. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, 1951, p. 164.

(3) P. G. HODGE, *Yield conditions in plane plastic stress*, « Journal of Mathematics and Physics », 29, 38 (1950).

(4) R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, 1956, p. 300.

della lamina. Se allora lo spessore della lamina è molto piccolo in confronto alle altre dimensioni, senza sostanziale errore si può ritenere che queste componenti siano ovunque nulle, siano cioè nulle anche nella regione tridimensionale racchiusa fra le due facce non sollecitate. Questo schema approssima molto da vicino la realtà fisica se, di fronte alle forze che si esplicano al contorno, è lecito trascurare le forze di inerzia che si destano durante il fluire plastico nonché la forza esterna di campo; forze che, a pieno rigore, sarebbero in grado di creare fra strato e strato della lamina sottile uno stato di pressione o di tensione non piano.

In questo schema si presentano due alternative:

1° Ritenere del tutto trascurabile la variazione di spessore che subisce la lamina per effetto delle forze applicate al contorno. Con questa ammissione lo schema diventa quello della membrana di *spessore costante* e la terza dimensione diventa trascurabile: in questo schema bidimensionale la v_z risulta identicamente nulla e si ammette perciò sostanzialmente che anche la deformazione risulti piana. La divergenza della velocità si riduce a $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$ ed è nulla su ogni strato, perché non vi è apporto o sottrazione di massa da parte degli strati contigui.

Si vede però subito che un siffatto schema, se è accettabile in via approssimata in elasticità, ove le deformazioni sono temporanee e infinitesime, non lo è più in plasticità, ove le deformazioni sono finite e permanenti, specialmente, per ovvie ragioni, nelle regioni prossime al contorno ove le forze esterne sono applicate.

Tuttavia proprio questo schema della membrana di spessore invariabile, alquanto infelice dal punto di vista fisico, è stato adottato da pressoché tutti gli Autori che si sono occupati del problema degli sforzi piani in plasticità.

2° Tener conto della variazione di spessore della lamina e quindi del fatto che la deformazione non è piana, ma ammettere che la deformazione nel senso dell'asse z normale alla lamina avvenga per il solo effetto delle forze applicate al contorno e uniformemente distribuite lungo lo spessore. Questo punto di vista è molto più aderente alla realtà fisica, perché in effetti, se vengono trascurate le forze di inerzia e la forza esterna di campo (nei casi più comuni il peso), fra strato e strato non si esercitano mutue azioni e quindi lo stato di sforzo risulta rigorosamente piano non solo sulle due non sollecitate della lamina, ma anche in tutti i punti interni. Adottando questo schema, avviene che mentre sono nulli τ_{xz} , τ_{yz} , σ_z , non è nulla la componente q_{33} del deviatore, legata alla velocità di deformazione dalla relazione $q_{33} = \mu \eta_{33} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$. Infine il teorema di conservazione della massa assume

la forma $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ che rende ragione degli apporti o delle sottrazioni di massa da parte di ogni strato a vantaggio o a scapito degli strati contigui; apporto o sottrazione che effettivamente si realizza a causa della variazione di estensione di ogni singolo strato.

SCHEMA DELLA MEMBRANA DI SPESSORE INVARIABILE. - Accettando la prima alternativa si ottiene quello che costituisce lo schema classico del problema degli sforzi piani in plasticità.

Si può assumere come piano (x, y) uno qualsiasi dei piani paralleli alle due facce non sollecitate perché in ognuno di tali piani lo stato di sforzo e di deformazione è sempre il medesimo. La componente v_z della velocità risulta identicamente nulla, mentre v_x e v_y dipendono da x ed y ma non da z . In questo schema bidimensionale, le equazioni che governano il problema plastico sono le seguenti ⁽⁵⁾:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} (1') \quad \sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ (2') \quad \sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{array} \right. \quad (4') \quad \tau = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\
 & (**) \quad \left\{ \begin{array}{l} (7') \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \\ (10') \quad \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2 = 3H^2 \end{array} \right. \quad (8') \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

Il sistema $(**)$ è un sistema formato da 6 equazioni nelle 6 funzioni incognite $\sigma_x, \tau, \sigma_y, v_x, v_y, \mu$, tutte dipendenti da x ed y ma non da z . Il sistema è quindi genericamente determinato e, tenuto conto delle condizioni al contorno, esso consente di individuare lo stato di sforzo e l'atto di moto.

Il problema degli sforzi piani ora presentato come problema di membrane di spessore invariabile è inoltre un problema ristretto (almeno in sede indefinita), in quanto il problema della determinazione degli sforzi non è concatenato col problema della determinazione delle velocità. Le tre equazioni $(7')$, $(8')$, $(10')$, tenuto conto delle condizioni al contorno, consentono infatti di determinare gli sforzi σ_x, τ, σ_y . Mediante le due equazioni:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}}{\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}}$$

(conseguenza delle $(1')$, $(2')$, $(4')$), si possono poi *a posteriori* determinare le componenti della velocità. Il problema risulta poi completamente ristretto se nelle condizioni al contorno vengono coinvolte soltanto le forze e non le velocità: tipicamente quindi nel caso in cui al contorno sia assegnata la forza esterna per unità di lunghezza ⁽⁶⁾.

(5) Non essendovi possibilità di equivoco indicheremo qui e nel seguito semplicemente con τ il taglio τ_{xy} .

(6) Il problema ora prospettato è stato discusso da diversi Autori (cfr. la bibliografia in G. HODGE, loco citato). Integrando le $(7')$ ed $(8')$ mediante la funzione di Airy, il problema plastico ristretto degli sforzi piani, nello schema della membrana di spessore invariabile, risulta retto dalla seguente equazione del secondo ordine non lineare:

$$\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + 3 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right)^2 = 3H^2.$$

SCHEMA DELLA MEMBRANA DI SPESSORE VARIABILE. — Prima di prendere in esame la seconda alternativa, osserviamo che, se si vuole inquadrare il problema degli sforzi piani nell'ambito della meccanica dei *corpi* plastici, nascono forzatamente delle profonde incompatibilità che non è peraltro possibile eliminare se non in casi fortunati e comunque eccezionali.

Se infatti, rimanendo nello schema tridimensionale, si impongono le tre condizioni (11), soltanto l'equazione (9) si riduce ad una identità. Il sistema (*) diviene allora un sistema di 9 equazioni nelle 7 incognite $\sigma_x, \tau, \sigma_y, v_x, v_y, v_z, \mu$ e risulta perciò in generale impossibile.

Prendiamo ora in esame il secondo schema più raffinato nel quale si tiene conto della variazione di spessore della membrana. Assumiamo come piano (x, y) la sezione media della lamina sottile. In tal caso appare ben manifesto che, per effetto delle forze applicate al contorno, che sono uniformemente distribuite lungo lo spessore, la lamina subisce una contrazione od un aumento di spessore a seconda che si tratti di tensioni o di pressioni. Durante il processo di deformazione appare intuitivo, per ragioni di simmetria, che i punti situati sul piano (x, y) non subiscono spostamenti nel senso dell'asse z ; spostamenti di questo tipo subiranno invece gli altri punti della lamina, i quali si avvicineranno tutti simultaneamente e simmetricamente al piano (x, y) o si allontaneranno a seconda che al contorno siano applicate tensioni o pressioni. In base a questa osservazione intanto è chiaro che non si può parlare di indipendenza da z delle componenti v_x, v_y e v_z della velocità, perché è ben manifesto ad esempio che la componente v_z della velocità, nulla nel punto $P(x, y)$ del piano (x, y) , non è nulla al contrario negli altri punti della perpendicolare al piano (x, y) passante per P ; la funzione $v_z = v_z(x, y, z)$ gode anzi della seguente emisimmetria:

$$(13) \quad v_z(x, y, -z) = -v_z(x, y, z)$$

che implica appunto:

$$(14) \quad v_z(x, y, 0) = 0.$$

Per quel che riguarda gli sforzi σ_x, τ, σ_y , non è evidente la loro indipendenza dalla z e quindi, almeno a priori, non appare lecito in questo schema accogliere, accanto alle condizioni (11), anche le (12).

Un'ulteriore ammissione invece si può fare nello schema della membrana *sottile* di spessore variabile. Essendo lo spessore h molto piccolo di fronte alle altre due dimensioni, è lecito confondere il diagramma della funzione $v_z(x, y, z)$, per x ed y fissati, con quello della sua tangente; con questa ammissione, la $\eta_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$ risulta funzione di x ed y ma non di z : $\eta_{33} = f(x, y)$. La condizione ora introdotta (che l'intuizione fisica accoglie ben volentieri, tenuto conto anche dell'uniforme distribuzione di forze lungo lo spessore della membrana) esprime il fatto che la velocità di deformazione η_{33} con cui si realizzano gli allungamenti e le contrazioni nel senso dell'asse z , ha lo stesso valore su tutti i punti di una medesima parallela all'asse z .

Tenuto conto di tutte le condizioni sopra precisate, si conclude che il problema degli sforzi piani, inquadrato nello schema della membrana di spessore variabile, è governato in sede indefinita dal seguente sistema di equazioni:

$$(7'') \quad \frac{\partial (h\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h\tau)}{\partial y} = 0 \qquad (8'') \quad \frac{\partial (h\tau)}{\partial x} + \frac{\partial (h\sigma_y)}{\partial y} = 0$$

$$(10') \quad \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau^2 = 3 H^2$$

$$(1'') \quad \sigma_x - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \qquad (2'') \quad \sigma_y - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) = \mu \frac{\partial v_y}{\partial y}$$

$$(3') \quad -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y) = \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (4') \quad \tau = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

$$(15) \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \qquad (16) \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = 0$$

$$(17) \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = f(x, y) \qquad (14) \quad v_z(x, y, 0) = 0.$$

Dalla (17) e dalla (14) si deduce:

$$(18) \quad v_z = zf(x, y).$$

Dalla (15) e (16) si trae allora subito:

$$(19) \quad v_x = -\frac{1}{2} z^2 \frac{\partial f}{\partial x} + u(x, y)$$

$$(20) \quad v_y = -\frac{1}{2} z^2 \frac{\partial f}{\partial y} + v(x, y)$$

e si conclude così che, se in una membrana di spessore variabile lo stato di sforzo è piano, le componenti della velocità devono avere una ben particolare natura: la v_z deve essere localmente proporzionale alla quota z mentre v_x e v_y devono essere funzioni quadratiche di z .

Tenuto conto delle (18), (19), (20), le (14), (15), (16), (17) diventano 4 identità e le equazioni del problema si riducono alle (7''), (8''), (10') ed alle seguenti:

$$(1''') \quad 2\sigma_x - \sigma_y = 3\mu \left[-\frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right] \qquad (2''') \quad 2\sigma_y - \sigma_x = 3\mu \left[\frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$(3'') \quad -(\sigma_x + \sigma_y) = 3\mu f \qquad (4'') \quad \tau = \frac{\mu}{2} \left[-z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right].$$

In queste 7 equazioni compaiono 8 incognite: σ_x , τ , σ_y , h , μ , u , v , f . Essendo lo spessore h funzione soltanto di x ed y , dalle (7''), (8''), (10') segue però che anche gli sforzi σ_x , τ , σ_y nello schema della membrana di spessore variabile sono funzioni soltanto di x ed y . Dalla (3'') si desume allora che anche μ è indipendente da z . Tenuta presente quest'ultima circostanza, dalle (1'''), (2'''), (4''), si trae infine:

$$(21) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Nello schema della membrana di spessore variabile, la funzione $\eta_{33} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = f(x, y)$ non è dunque una funzione incognita del posto; essa è necessariamente *funzione lineare di x ed y* :

$$(22) \quad f(x, y) = ax + by + c \quad (a, b, c \text{ costanti})$$

e le componenti di velocità presentano la forma:

$$(23) \quad v_x = -\frac{1}{2}az^2 + u(x, y) \quad v_y = -\frac{1}{2}bz^2 + v(x, y) \quad v_z = zf(x, y).$$

Tenuto conto delle (3'') e (22), dalle (1'''), (2'''), (4'') segue poi:

$$\sigma_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} - f \right) \quad \sigma_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} - f \right) \quad 2\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

e si conclude quindi in definitiva che il problema degli sforzi piani è governato in sede indefinita dal sistema seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (7'') & \frac{\partial (h\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial (h\tau)}{\partial y} = 0 \\ (8'') & \frac{\partial (h\tau)}{\partial x} + \frac{\partial (h\sigma_y)}{\partial y} = 0 \\ (10') & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2 = 3H^2 \\ (3'') & \sigma_x + \sigma_y = -3\mu f \\ (24) & \frac{\sigma_x}{\mu} = \frac{\partial u}{\partial x} - f \\ (25) & \frac{\sigma_y}{\mu} = \frac{\partial v}{\partial y} - f \\ (26) & \frac{2\tau}{\mu} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right.$$

Essendo f funzione nota di x ed y , nel sistema ora scritto formato da 7 equazioni, figurano esattamente 7 incognite, funzioni di x ed y : $\sigma_x, \tau, \sigma_y, \mu, h, u, v$. Esso è dunque genericamente determinato e, date opportune condizioni al contorno, consente la determinazione dello stato di sforzo e dell'atto di moto.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PROBLEMA. — Introdotta la funzione degli sforzi $\chi = \chi(x, y)$, si soddisfa nel modo più generale alle (7''), (8'') assumendo:

$$(27) \quad h\sigma_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \quad h\tau = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \quad h\sigma_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}.$$

La sostituzione delle (27) nella condizione di plasticità (10') conduce poi all'equazione:

$$(28) \quad 3H^2 h^2(x, y) = \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right)^2 - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + 3 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \right)^2$$

che consente di individuare lo spessore $h = h(x, y)$ quando sia nota la χ . Tenuto conto della (28), si traggono allora dalle (27) gli sforzi mediante le derivate seconde della χ . Infine, derivando le (24), (25), (26) e tenuto conto della (22) e della (3''), si ottiene l'equazione seguente:

$$(29) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x + \sigma_y} f \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_x + \sigma_y} f \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{2\tau}{\sigma_x + \sigma_y} f \right) = 0$$

che, unita alle (7''), (8''), (10'), consente genericamente di determinare lo stato di sforzo e lo spessore h indipendentemente dalle velocità.

Per le (27) la (29) diviene:

$$(\cdot) \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(f \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}}{\Delta \chi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}}{\Delta \chi} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(2f \frac{\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}}{\Delta \chi} \right) = 0$$

e ci si avvede così che essa (risultando f nota attraverso alla (22)), costituisce l'unica equazione dalla quale può farsi dipendere la risoluzione del problema plastico degli sforzi piani nello schema della membrana di spessore variabile. Individuata la χ attraverso la (\cdot) tenendo conto delle condizioni al contorno, le (27) e (28) ci consentono tosto, come si è detto, di individuare lo spessore della membrana e lo stato di sforzo. In quanto alle componenti di velocità, esse si possono determinare attraverso il seguente sistema ottenuto eliminando μ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + f = 0 \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}$$

È importante osservare che l'equazione che in definitiva governa da sola il problema degli sforzi piani, nello schema della membrana di spessore variabile, è *indipendente dalla condizione di plasticità*. Questa osservazione consente di chiarire uno dei punti oscuri della teoria della plasticità. Come già P. G. Hodge aveva osservato fin dal 1950 ⁽⁷⁾ e come in forma più generale appare attraverso alla teoria della linearizzazione dei problemi ristretti della plasticità ⁽⁸⁾, anche una lievissima modifica apportata alla condizione di plasticità, può influenzare in modo decisivo la natura analitica delle equazioni che governano il problema degli sforzi piani. Questo sostanzialmente perché, nello schema della membrana di spessore invariabile, è la condizione di plasticità ed essa sola, che determina l'equazione del problema, la quale risulta del 2° ordine. Ed avviene così che problemi ben posti di sforzi piani, che ammettono soluzione accogliendo la legge di Mises, non hanno al contrario soluzione quando si accolga quale condizione di plasticità la condizione di Tresca.

Questo inconveniente trova la sua vera giustificazione nella circostanza che lo schema della membrana di spessore invariabile è uno schema inadeguato dal punto di vista fisico. Tenendo conto invece della variazione di spessore, ci si avvede, come si è detto, che l'equazione che governa il problema plastico è indipendente dalla condizione di plasticità, ma consente maggior arbitrarietà, perché del 4° ordine anziché del 2° e contenente in più i tre coefficienti a , b , c che compaiono nell'espressione (22) della f .

(7) P. G. HODGE, loc cit.

(8) E. STORCHI, *Linearizzazione delle equazioni della plasticità ristretta*. Questi « Rendiconti », vol. XXIII, pp. 45-51 (1957).

Meccanica. — *Sulla tenacia dei sistemi meccanici in movimento.*

Nota di GUIDO GOTUSSO, presentata (*) dal Corrisp. B. FINZI.

Si dimostra che il noto fenomeno della tenacia dell'asse di un giroscopio in rapida rotazione e la conseguente teoria dell'effetto giroscopico sono aspetti particolari di una proprietà posseduta da ogni sistema meccanico, ogni volta che l'espressione della sua energia cinetica presenta una sufficiente generalità.

La questione riguarda la Meccanica analitica, che è argomento ampiamente studiato da lungo tempo e per il quale la bibliografia è copiosissima. Nei trattati comuni non ho però trovato esposta la semplice tesi che forma oggetto di questa Nota. Perciò mi sono deciso a pubblicarla, seguendo anche il consiglio di alcuni insigni meccanici.

Consideriamo dapprima un sistema olonomo a vincoli fissi, con n gradi di libertà, riferito a n coordinate lagrangiane q^k ($k = 1, 2, \dots, n$). Attribuiremo a queste coordinate la forma controvariante e useremo sistematicamente la notazione tensoriale seguendo Ricci-Curbastro. Questo calcolo assume come invariante fondamentale di riferimento l'energia cinetica. In questo ordine di idee ci riserviamo di passare, ove lo riteniamo opportuno, dalla rappresentazione controvariante a quella covariante per le componenti di enti caratterizzate da indici variabili da 1 a n , indici che sistematicamente scriveremo in caratteri latini. Sottintenderemo poi, secondo le convenzioni consuete, i segni di sommatoria.

In conformità a questo ordine di idee, se il sistema è costituito da N punti P_i ($i = 1, 2, \dots, N$) di rispettive masse m_i , introdurremo il sistema doppio simmetrico covariante:

$$(I) \quad a_{hk} = \sum_i^N m_i \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \times \frac{\partial P_i}{\partial q^k}$$

al quale attribuiremo l'ufficio di tensore fondamentale. Di questo sistema useremo, ove occorra, anche la forma controvariante a^{hk} o mista a_h^k , ottenute secondo le consuete regole del calcolo tensoriale.

L'espressione dell'energia cinetica T del sistema potrà allora assumere la forma seguente:

$$(2) \quad T = \frac{1}{2} a_{hk} \dot{q}^h \dot{q}^k.$$

Le equazioni che reggono il movimento del sistema sono le equazioni di Lagrange:

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial T}{\partial q^k} = Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

(*) Nella seduta del 10 giugno 1958.

e i secondi membri delle (3) sono le componenti della sollecitazione attiva, che risultano espresse in forma covariante.

Se nella (3) sostituiamo la (2), con ben note trasformazioni perveniamo alla seguente forma per le equazioni di movimento:

$$(4) \quad a_{hk} \ddot{q}^h + [hl, k] \dot{q}^l \dot{q}^h = Q_k$$

avendo introdotto i simboli di Christoffel di prima specie così definiti:

$$(5) \quad [hl, k] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{hk}}{\partial q^l} + \frac{\partial a_{lk}}{\partial q^h} - \frac{\partial a_{hl}}{\partial q^k} \right)$$

mentre, ove si introducano i simboli di Christoffel di seconda specie definiti così:

$$(6) \quad \left[\begin{smallmatrix} k \\ hl \end{smallmatrix} \right] = a^{kr} [hl, r]$$

alle (4) può anche darsi la forma, più semplice, seguente:

$$(7) \quad \ddot{q}^k + \left[\begin{smallmatrix} k \\ hl \end{smallmatrix} \right] \dot{q}^h \dot{q}^l = Q^k.$$

Nella (4), come nella (7), le \dot{q}^k possono riguardarsi come caratteristiche cinetiche. Più generalmente potremo assumere come caratteristiche cinetiche del sistema certe variabili ω_i così definite:

$$(8) \quad \dot{q}^k = b^{ik} \omega_i$$

intendendo le b^{ik} come funzioni assegnate delle sole q^k , tali che risulti $\|b^{ik}\| \neq 0$, allo scopo evidente che le (8) definiscano una effettiva trasformazione biunivoca. Se $b^{ik} = a^{ik}$, le caratteristiche cinetiche sono le \dot{q}_i , cioè i momenti cinetici p_i .

Se utilizziamo la (8), la (7) può facilmente mettersi nella forma seguente:

$$(9) \quad b^{hk} \dot{\omega}_h + \left\{ \left[\begin{smallmatrix} k \\ hl \end{smallmatrix} \right] b^{ih} + \frac{\partial b^{ik}}{\partial q^l} \right\} b^{jl} \omega_i \omega_j = Q^k$$

o anche nella forma più semplice:

$$(10) \quad b^{hk} \dot{\omega}_h + C^{ijk} \omega_i \omega_j = Q^k$$

avendo posto per brevità:

$$(11) \quad \left\{ \left[\begin{smallmatrix} k \\ hl \end{smallmatrix} \right] b^{ih} + \frac{\partial b^{ik}}{\partial q^l} \right\} b^{jl} = C^{ijk}.$$

La forma (10), nella quale, in definitiva, possono mettersi le equazioni di movimento del nostro sistema, è quella che ci interessa. Possiamo tuttavia stabilire un risultato più generale, mostrando che tale forma si addice anche a un sistema anolonomo a vincoli fissi.

In questo caso, supposti scontati i vincoli di ologonomia, i vincoli anolonomi eventualmente presenti si esprimeranno con le seguenti equazioni, che

forniscono le \dot{q}^k come funzioni lineari di $v < n$ caratteristiche cinetiche ω_γ indipendenti:

$$(12) \quad \dot{q}^k = \eta^{\gamma k} \omega_\gamma \quad (\gamma = 1, 2, \dots, v)$$

essendo le $\eta^{\gamma k}$ funzioni assegnate delle sole q^k .

Seguendo una convenzione in uso in casi consimili, intenderemo implicitamente d'ora in avanti che le sommatorie riferite a indici latini siano estese da 1 a n , mentre quelle riferentisi a indici greci si estendano da 1 a v .

Posto poi:

$$(13) \quad \eta_k^\gamma Q^k = \Phi^\gamma$$

avremo, in luogo delle equazioni di Lagrange, le seguenti equazioni di Maggi:

$$(14) \quad \eta_k^\gamma \left\{ \ddot{q}^k + \left[\begin{smallmatrix} k \\ h l \end{smallmatrix} \right] \dot{q}^h \dot{q}^l \right\} = \Phi^\gamma$$

o anche, come facilmente si ottiene utilizzando la (12):

$$(15) \quad \eta_k^\gamma \left\{ \eta^{qk} \dot{\omega}_q + \left(\left[\begin{smallmatrix} k \\ h l \end{smallmatrix} \right] \eta^{qh} + \frac{\partial \eta^{qk}}{\partial q^l} \right) \eta^{\sigma l} \omega_q \omega_\sigma \right\} = \Phi^\gamma$$

e, posto:

$$(16) \quad \eta_k^\gamma \eta^{qk} = C^{\gamma q}$$

e:

$$(17) \quad \eta_k^\gamma \left(\left[\begin{smallmatrix} k \\ h l \end{smallmatrix} \right] \eta^{qh} + \frac{\partial \eta^{qk}}{\partial q^l} \right) \eta^{\sigma l} = D^{\gamma q \sigma}$$

avremo infine le equazioni di movimento nella forma seguente:

$$(18) \quad C^{\gamma q} \dot{\omega}_q + D^{\gamma q \sigma} \omega_q \omega_\sigma = \Phi^\gamma$$

che è, appunto, ancora la forma (10).

Le considerazioni che seguiranno verranno riferite, per maggiore generalità, alla (18), cioè al caso di un sistema anolonomo: esse, in particolare, saranno valide per un sistema olonomo riferito ad n generiche caratteristiche cinetiche, ed in particolare anche ad un sistema olonomo nel quale, come caratteristiche cinetiche, si considerino le \dot{q}^k .

Allo scopo, inoltre, di potere eseguire dei confronti di ordini di grandezza, supporremo di avere ridotto, mediante l'impiego di opportuni coefficienti dimensionali di ragguaglio, tutte le caratteristiche cinetiche alle stesse dimensioni, o, ove si preferisca, di avere dato alle equazioni di movimento forma addirittura adimensionale.

Consideriamo ora quel particolare movimento del sistema, definito dal seguente insieme delle caratteristiche cinetiche:

$$(M') \quad \omega_1 = K; \omega_2 = \omega_3 = \dots = \omega_v = 0$$

dove K è una assegnata funzione del tempo, che, per maggiore semplicità, considereremo nel seguito come costante.

Vale la pena di osservare che in questo caso le q sono definite in funzione del tempo, per via delle (12), dalle equazioni:

$$\dot{q}^h = \eta^{1h} K \quad (h = 1, 2, \dots, n)$$

costituenti un sistema differenziale del primo ordine in forma normale. Se le $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_v$ si identificano con le $\dot{q}_n, \dot{q}_{n-1}, \dots, \dot{q}_{n-v+1}$, questo caso equivale a porre $\dot{q}_{n-1} = \dot{q}_{n-2} = \dots = \dot{q}_{n-v+1} = 0$, cioè a considerare moti merostatici.

Un movimento siffatto lo indicheremo con M' e useremo l'apice ' per tutte le quantità meccaniche relative a questo moto.

Per mantenere nel sistema il movimento M' occorrerà una opportuna sollecitazione attiva, che ci è fornita immediatamente dalla (18) e che si scrive così:

$$(19) \quad \Phi^{v'} = D^{v1'} K K$$

dove la scrittura KK in luogo di K^2 ha lo scopo di evitare equivoci fra indici e esponenti.

Consideriamo inoltre un moto, che indicheremo con M'' (usando l'apice '' per tutte le quantità meccaniche che si riferiranno a tale moto), ottenuto da M' incrementando ogni caratteristica cinetica ω_v di una quantità finita ε_v , che considereremo funzione assegnata del tempo e dotata di derivata finita.

Il movimento M'' sarà dunque definito dal seguente insieme delle caratteristiche cinetiche:

$$(M'') \quad \omega_1 = K + \varepsilon_1; \omega_2 = \varepsilon_2; \omega_3 = \varepsilon_3; \dots; \omega_v = \varepsilon_v$$

e per mantenere nel sistema questo movimento M'' occorrerà una adeguata sollecitazione attiva, ancora calcolabile mediante la (18), che, questa volta, si presenterà così:

$$(20) \quad \Phi^{v''} = K K D^{v1''} + 2 K D^{v1\sigma''} \varepsilon_\sigma + C^{v\sigma''} \dot{\varepsilon}_\sigma + D^{vq\sigma''} \varepsilon_q \varepsilon_\sigma.$$

Per passare dal movimento M' al movimento M'' si deve dunque incrementare la sollecitazione attiva, ossia le $\Phi^{v'}$, delle quantità:

$$(21) \quad \Delta \Phi^v = \Phi^{v''} - \Phi^{v'}$$

ossia, per la (19) e la (20):

$$(22) \quad \Delta \Phi^v = K K (D^{v1''} - D^{v1'}) + 2 K D^{v1\sigma''} \varepsilon_\sigma + C^{v\sigma''} \dot{\varepsilon}_\sigma + D^{vq\sigma''} \varepsilon_q \varepsilon_\sigma.$$

Ora le quantità $C^{v\sigma}$ e $D^{vq\sigma}$ sono sempre finite, in generale non nulle e funzioni delle q^k . Se dunque noi supponiamo che l'ordine di grandezza di K sia molto maggiore di quello delle ε_v , e se inoltre supponiamo le $\dot{\varepsilon}_v$ tali che il penultimo termine della (22) risulti trascurabile di fronte agli altri (ad esempio, se supponiamo addirittura $\dot{\varepsilon}_v = 0$, oppure se più semplicemente diciamo:

ε e $\dot{\varepsilon}$ finite), la (22), in prima approssimazione, viene ad assumere l'aspetto seguente:

$$(23) \quad \Delta\Phi^{\gamma} \cong KK(D^{\gamma\pi''} - D^{\gamma\pi'}) + 2KD^{\gamma\pi''}\varepsilon_{\sigma}.$$

E se, in particolare, supponiamo, disponendo della larga arbitrarietà delle coordinate e delle caratteristiche cinetiche, di poter scegliere queste e quelle in modo che le $D^{\gamma\pi}$ siano costanti, come si verifica nella maggior parte dei sistemi che si considerano ordinariamente in Meccanica, allora la (23) si riduce addirittura alla seguente:

$$(24) \quad \Delta\Phi^{\gamma} \cong 2KD^{\gamma\pi''}\varepsilon_{\sigma}.$$

L'interpretazione della (23) e della (24) è, dal punto di vista fisico, molto semplice: se K è molto grande, nel senso precisato, il sistema presenta una grande tenacità di movimento, nel senso che per modificare in modo finito le sue caratteristiche cinetiche si debbono mettere in gioco grandi sollecitazioni attive, almeno in generale.

Nel caso che le $D^{\sigma\pi}$ siano costanti (o addirittura nulle), la « tenacità » risulta dell'ordine di K . Se la struttura del sistema, le coordinate e le caratteristiche cinetiche sono tali che alcune almeno delle $D^{\sigma\pi}$ siano effettive funzioni delle q^k , allora la « tenacità » risulta dell'ordine di K^2 . Se poi la struttura del sistema è tale che esistano coordinate e caratteristiche cinetiche per cui le $D^{\sigma\pi}$ risultino anch'esse tutte nulle, allora, sebbene K sia grande, non vi è alcun fenomeno di tenacia rispetto a quelle coordinate o a quelle caratteristiche cinetiche.

Il noto fenomeno della tenacia dell'asse di un giroscopio in rapida rotazione, e la teoria dell'effetto giroscopico che a quello fa capo, appare dunque come un caso particolare di una circostanza affatto generale che si presenta in ogni sistema meccanico, olonomo o anolonomo, in relazione alla sua struttura.

Vediamo, infine, come si deve utilizzare la (18) in due casi particolari.

Se il sistema è un generico sistema olonomo, dal confronto della (10) e della (11) con la (18) (osservando che ora non è più il caso di conservare la convenzione fatta sugli indici in carattere greco) si vede che basta prendere:

$$(25) \quad \begin{cases} C^{kh} = b^{kh} \\ D^{kij} = \left\{ \begin{bmatrix} k \\ h \ l \end{bmatrix} b^{ih} + \frac{\partial b^{ik}}{\partial q^l} \right\} b^{jl} \\ \Phi^k = Q^k. \end{cases}$$

Esplicitamente per un sistema olonomo, quando:

$$(26) \quad D^{k\pi} = \left\{ \begin{bmatrix} k \\ h \ l \end{bmatrix} b^{ih} + \frac{\partial b^{ik}}{\partial q^l} \right\} b^{il} = \text{costante}$$

risulta:

$$(27) \quad \Delta Q^k = 2 K \left\{ \left[\begin{smallmatrix} k \\ h l \end{smallmatrix} \right] b^{1h} + \frac{\partial b^{1k}}{\partial q^l} \right\} b^{jl} \varepsilon_j.$$

Se, inoltre, si prendono come caratteristiche cinetiche le $\omega_i = \dot{q}_i$ (cioè i momenti cinetici p_i), la (8) mostra che, nelle (25), bisogna porre:

$$(28) \quad b^{hk} = a^{hk}$$

e quindi, supposto:

$$(29) \quad \left[\begin{smallmatrix} k \\ r s \end{smallmatrix} \right] a^{1r} a^{1s} + \frac{\partial a^{1k}}{\partial q^l} a^{1l} = \text{costante}$$

risulta:

$$(30) \quad \Delta Q^k = 2 K \left\{ \left[\begin{smallmatrix} k \\ h l \end{smallmatrix} \right] a^{1h} + \frac{\partial a^{1k}}{\partial q^l} \right\} \varepsilon^l.$$

Possiamo seguire, a titolo di esempio su un caso particolarmente semplice, lo svolgimento dei calcoli su riportati.

Consideriamo un giroscopio avente per ellissoide di inerzia una sfera ($A = B = C$, prima semplificazione) e riferiamolo ai tre angoli di Eulero assumendo:

$$\varphi = q^1 \quad ; \quad \psi = q^2 \quad ; \quad \theta = q^3.$$

Per un sistema siffatto abbiamo:

$$T = \frac{1}{2} A \{ \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \cos \theta \dot{\phi} \dot{\psi} \}$$

dunque:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = A \quad ; \quad a_{12} = a_{21} = A \cos \theta \quad ; \quad a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0$$

$$a^{13} = a^{31} = a^{23} = a^{32} = 0$$

$$a^{11} = a^{22} = \frac{1}{A \sin^2 \theta} \quad ; \quad a^{12} = a^{21} = - \frac{\cos \theta}{A \sin^2 \theta} \quad ; \quad a^{33} = \frac{1}{A}.$$

Ciò premesso, ci chiediamo quale deve essere l'incremento di sollecitazione attiva per passare da un moto M' con asse fermo, rotazione rapida, ossia $\dot{\phi} = K$ costante, a un moto M'' con rotazione propria immutata, velocità angolare di precessione $\dot{\psi} = \varepsilon$ costante, velocità angolare di nutazione $\dot{\theta} = 0$. (Abbiamo qui la seconda semplificazione, consistente nel riferirci a caratteristiche cinetiche in forma controvariante).

Partendo direttamente dalla (7), che fa al caso nostro, si vede subito che, essendo $\left[\begin{smallmatrix} k \\ 1 1 \end{smallmatrix} \right] = 0$, si ha:

$$\Delta Q^k = 2 K \varepsilon \left[\begin{smallmatrix} k \\ 1 2 \end{smallmatrix} \right]'' + \left[\begin{smallmatrix} k \\ 2 2 \end{smallmatrix} \right] \varepsilon \varepsilon$$

e, se ε è trascurabile di fronte a K :

$$\Delta Q^k = 2 K \varepsilon \begin{bmatrix} k \\ 1 \ 2 \end{bmatrix}''.$$

Se si eseguiscano i calcoli, consistenti, in sostanza, nel procurarsi i simboli di Christoffel, si arriva alla seguente conclusione:

$$Q^1 = 0 \quad ; \quad Q^2 = 0 \quad ; \quad Q^3 = K \varepsilon \sin \theta$$

dove si scrisse Q in luogo di ΔQ in considerazione del fatto che M' è un moto per inerzia.

Poiché interessano le componenti covarianti, da:

$$Q_k = a_{ik} Q^i = a_{3k} Q^3$$

segue subito:

$$Q_1 = \Phi = 0 \quad ; \quad Q_2 = \Psi = 0 \quad ; \quad Q_3 = \Theta = K \varepsilon A \sin \theta$$

come vuole la teoria dell'effetto giroscopico. (Φ, Ψ, Θ sono le componenti della sollecitazione attiva secondo gli angoli di Eulero).

Prendiamo invece come caratteristiche cinetiche, secondo la consuetudine, p, q, r . Le (8) si presentano allora così:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = r - p \sin \varphi \operatorname{ctn} \theta - q \cos \varphi \operatorname{ctn} \theta \\ \dot{\psi} = p \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} + q \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \\ \dot{\theta} = p \cos \varphi - q \sin \theta \end{cases}$$

donde: (facendo $\omega_1 = r$, $\omega_2 = p$, $\omega_3 = q$):

$$b^{11} = 1 \quad ; \quad b^{12} = 0 \quad ; \quad b^{13} = 0$$

$$b^{21} = -\sin \varphi \operatorname{ctn} \theta \quad ; \quad b^{22} = \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \quad ; \quad b^{23} = \cos \varphi$$

$$b^{31} = -\cos \varphi \operatorname{ctn} \theta \quad ; \quad b^{32} = \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \quad ; \quad b^{33} = -\sin \varphi.$$

Consideriamo il moto M' caratterizzato da $r = r_0 = K$, $p = q = 0$. Si tratta di moto per inerzia. Per passare a un moto M'' caratterizzato da $r = r_0 = K$ ($\varepsilon_1 = 0$), $p = \varepsilon_2$, $q = 0$ ($\varepsilon_3 = 0$) la sollecitazione attiva è fornita dalla (27) che ora si esplicita così:

$$Q^1 = 2 r_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{bmatrix} b^{21} p = r_0 p \operatorname{ctn} \theta \cos \varphi$$

$$Q^2 = 2 r_0 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \ 1 \end{bmatrix} b^{21} p = -r_0 p \frac{\cos \varphi}{\sin \theta}$$

$$Q^3 = 2 r_0 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \ 1 \end{bmatrix} b^{21} p = r_0 p \sin \varphi$$

e in forma covariante:

$$Q_1 = 0 \quad ; \quad Q_2 = -Ar_0 p \sin \theta \cos \varphi \quad ; \quad Q_3 = Ar_0 p \sin \varphi.$$

Volendo dunque riferirsi alle componenti Φ^k della sollecitazione attiva (momenti) corrispondenti alle p, q, r , si ha (ed è notevole il gioco attraverso cui si eliminano gli angoli di Eulero):

$$\Phi^1 \equiv M^1 = b^{11} Q_1 + b^{12} Q_2 + b^{13} Q_3 = 0$$

$$\Phi^2 \equiv M^2 = b^{21} Q_1 + b^{22} Q_2 + b^{23} Q_3 = 0$$

$$\Phi^3 \equiv M^3 = b^{31} Q_1 + b^{32} Q_2 + b^{33} Q_3 = -Ar_0 p.$$

Astronomia. — *Determinazione delle densità delle componenti di un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse.* Nota II di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. In una Nota precedente, ho fatto rilevare come la densità ρ nei sistemi visuali di stelle doppie, sia un dato fisico conoscibile indipendentemente dalla parallasse; e ciò in analogia con i sistemi fotometrici, nei quali per il calcolo della densità basta avere la curva di luce. Nelle stelle binarie visuali, è necessario che sia determinato il periodo P e il semiasse maggiore a in secondi di arco dell'orbita relativa, le grandezze apparenti fotovisuali e i tipi spettrali che permettono di conoscere le temperature e le grandezze bolometriche.

In questa Nota applico ad alcuni esempi gli schemi di calcolo da me esposti precedentemente.

Per le stelle, che qui prendo in esame, i tipi spettrali Sp sono dati nel sistema di M. Wilson e le grandezze apparenti fotovisuali m_{pv} nel sistema fotometrico internazionale; ciò per seguire il Kuiper (1) che si basa appunto sui suddetti sistemi di tipi spettrali e grandezze fotovisuali per la determinazione delle correzioni bolometriche BC; di tali correzioni mi sono servita per ottenere ovviamente le grandezze bolometriche apparenti. Dai tipi spettrali ho dedotto anche le temperature effettive T , sempre secondo la scala delle temperature del Kuiper.

Ciò posto, passo ad applicare lo schema di calcolo da me proposto nella Nota I alle seguenti sei stelle binarie, misurando sempre i periodi in *anni*.

2. A.D.S. 520

Orbita Van den Boss (U.O.C. 98, p. 342); $P = 25^a, 00$; $a = 0'', 670$

$m_{pv} = 6,56$; $Sp = G 7$

6,70 ; $G 7$

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) Cfr. KUIPER, *The magnitude of the Sun, the stellar temperature scale and bolometric corrections*, in « *Astroph. Journ.* », Vol. LXXXVIII, p. 429.

ne deduciamo:

$$T = 5200^{\circ} \quad ; \quad BC = -0^m, 28$$

uguali per entrambe le componenti.

Applicando allora la (11) della mia Nota I e usando per la costante che ivi compare il valore di $4,87 \cdot 10^{-23}$ (in tal modo le densità vengono riferite alla densità media del Sole), si ha per la densità media del sistema $\bar{\rho} = 1,44$.

Determinato con la (16) il rapporto fra i rispettivi raggi, abbiamo per il rapporto fra i volumi $\alpha = 1,213$ e con la (23) — basata sulla relazione massa-luminosità — otteniamo per il rapporto fra le masse $\beta = 1,037$.

Infine per mezzo delle (25) e (26), ricaviamo per le densità medie delle singole componenti:

$$\rho_1 = 1,33 \quad ; \quad \rho_2 = 1,56.$$

3. A.D.S. 5423; *Sirio*.

Orbite: Aitken (« A.D.S. ») $P = 50^a, 04$; $a = 7'', 57$

Volet (« Bull. Astr. », VII, 1, p. 30) $P = 49^a, 94$; $a = 7'', 62$

$$m_{pv} = -1,52 \quad ; \quad Sp = AO$$

$$8,54 \quad ; \quad A 5$$

da cui ricavo:

$$T = 10700^{\circ} \quad ; \quad BC = -0^m, 72$$

$$8600^{\circ} \quad ; \quad -0^m, 32.$$

In base a questi dati si ha $\bar{\rho} = 0,57$ eseguendo i calcoli con la prima orbita, e $\bar{\rho} = 0,59$ con la seconda; onde per i calcoli seguenti ho usato il loro valore medio.

Il rapporto fra i volumi è $\alpha = 509.000$.

Per determinare il rapporto fra le masse, non si può usare in questo caso la relazione massa-luminosità, poiché il satellite di Sirio che è una nana bianca si discosta probabilmente dalla relazione suddetta. Ma dalle osservazioni meridiane dei moti propri, il Boss⁽²⁾ ha dedotto per il rapporto fra le masse il valore $\beta = (\mu_1/\mu_2) = 2,56$; mentre Van de Kamp con osservazioni fotografiche⁽³⁾ ha trovato $\mu_1/\mu_2 = 2,07$. Dando al valore del Boss un peso doppio di quello del Van de Kamp, poiché il primo è determinato su osservazioni estese su tutta l'orbita e il secondo su misure limitate ad un arco, ho adottato per μ_1/μ_2 il valore $\beta = 2,390$.

(2) Cfr. BOSS, *General Catalogue*, App. II.

(3) Cfr. « Astronom. Journ. », Vol. XXXXV, p. 124.

I valori dedotti per le singole densità sono dunque:

$$\rho_1 = 0,41 \quad ; \quad \rho_2 = 87.000$$

confermando così l'altissima densità del satellite di Sirio.

4. A.D.S. 8119; ξ *Ursae Maioris*.

Orbita Van den Bos («Mem. Acad. Roy. Sci. et Let.», Denmark 8, ser. XII, n. 2)

$$P = 59^a,86 \quad ; \quad a = 2'',535$$

$$m_{pv} = 4,33 \quad ; \quad Sp = GO$$

$$4,76 \quad ; \quad GO$$

perciò, per entrambe le componenti, abbiamo:

$$T = 6000^\circ \quad ; \quad BC = -0^m,06.$$

Di conseguenza si ha: $\bar{\rho} = 2,44$.

e per il rapporto fra i volumi $\alpha = 1,811$.

Il sistema ξ *Ursae Maioris* è in realtà formato da 4 stelle, ciascuna delle due componenti principali essendo una binaria spettroscopica; a sua volta anche la coppia delle stelle visibili al cannocchiale è una doppia spettroscopica. Dall'esame delle varie orbite L. Berman ⁽⁴⁾ dà per il rapporto fra le masse delle due componenti visuali

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1,44; \quad \text{oppure} \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = 1,17.$$

D'altro canto secondo le determinazioni meridiane dei moti propri del Boss il rapporto fra le masse è $\mu_1/\mu_2 = 1,30$ che è proprio la media dei due valori suddetti e che quindi ho usato.

In definitiva ho trovato applicando le mie formole per le densità:

$$\rho_1 = 2,14 \quad ; \quad \rho_2 = 2,98.$$

5. A.D.S. 10157; ζ *Herculis*.

Orbite: Comstock («A.J.», 30, p. 145) $P = 34^a,46$; $a = 1'',349$

Baize («J.O.», 32, p. 53) $P = 34^a,38$; $a = 1'',369$

$$m_{pv} = 3,01$$

$$5,81.$$

(4) Cfr. «Lick obs Bulletin», Vol. XV, p. 109.

Poiché mancano le determinazioni dello spettro della stella satellite, onde conoscere le temperature, ho usato le osservazioni colorimetriche dell'Hopmann ⁽⁵⁾ che danno $\frac{c}{T_1} = 2,26$; $\frac{c}{T_2} = 2,67$, in cui c è uguale a $1,432 \cdot 10^4$.

È da tener presente però che le temperature così ricavate sono di radiazione e quindi, per i nostri calcoli, è necessario passare a quelle effettive. Ho infine adottato i valori:

$$\begin{array}{rcl} T = 6100^\circ & ; & BC = -0^m,06 \\ 5100^\circ & & = -0^m,31 \end{array}$$

e ho avuto sia con gli elementi orbitali di Comstock che con quelli di Baize $\bar{\rho} = 0,29$.

Il rapporto dei volumi è $\alpha = 11,24$, mentre quello delle masse dedotto sia dalle osservazioni meridiane del Boss che da quelle fotografiche di Van de Kamp ⁽⁶⁾, è $\beta = 1,63$. (Il valore di β è stato opportunamente corretto per tener conto che le misure meridiane si riferivano al centro di luce del sistema e non alla componente principale).

Ho avuto infine $\rho_1 = 0,20$; $\rho_2 = 1,35$.

6. A.D.S. 14773; δ *Equulei*.

Orbite: Aitken («Lick Obs. Bull.», XII, p. 158) $P = 5^a,70$; $a = 0'',27$

Luyten e Ebbighausen (Pubbl. Minn. 2, p. 25) $P = 5^a,70$; $a = 0'',26$.

Le due stelle, di ugual tipo spettrale F₃ e ugual grandezza fotovisuale apparente 5,25, hanno entrambe ugual temperatura che può stimarsi di 6800° e ugual correzione bolometrica $-0^m,01$.

In base alla (16) della mia Nota I, si vede subito che i raggi e quindi i volumi sono uguali. Poiché la doppia in questione è anche spettroscopica dalle misure di velocità radiale si deduce secondo il Luyten $\mu_1/\mu_2 = 1,03$.

In base ai dati suscritti abbiamo dunque

$$\bar{\rho} = 1,92 \quad ; \quad \rho_1 = 1,94 \quad ; \quad \rho_2 = 1,88.$$

7. A.D.S. 15972; Krüger 60.

Orbite: Baize («Astr.», 58, p. 83) $P = 44^a,79$; $a = 2'',395$

Hall («A.J.», 57, p. 47) $P = 44^a,46$; $a = 2'',386$

Lippincott («A.J.», 58, p. 135) $P = 44^a,60$; $a = 2'',412$

$m_{pv} = 9,88$; $Sp = M 4$

11,38 ; $M 6$.

(5) Cfr. HOPMANN, *Mitt. Wiener Sternwarte*, Bd. 7, p. 187.

(6) Cfr. VAN DE KAMP, «Astr. Journ.», Vol. XXXIV, p. 83.

Le temperature effettive per stelle nane di tipi M4 ed M6 possono stimarsi rispettivamente di 3000° e 2800° ; più difficili a stabilirsi sono le correzioni bolometriche, ma possiamo ritenere che nel presente caso non si discostino molto dai valori $-2^m,7$ e $-3^m,3$. Abbiamo allora $\bar{p} = 3,44$ per le prime due orbite e $\bar{p} = 3,54$ per la terza.

Il rapporto fra i volumi è poi $\alpha = 2,29$ e quello fra le masse - ottenuto applicando la relazione massa-luminosità - è $\beta = 1,26$.

Le singole densità sono allora rispettivamente 2,75 e 5,00 se si eseguono i calcoli con gli elementi orbitali di Baize o di Hall e un poco maggiori se si usa l'orbita di Lippincott.

Cosmogonia. — *Limiti superiori della variazione dell'eccentricità nei sistemi binari di massa decrescente.* Nota di LUCIANO CHIARA, presentata (*) dal Socio C. MINEO.

1. Studiando il problema dei due corpi di masse decrescenti, si riesce a determinare, in alcuni casi notevoli, un limite superiore abbastanza espressivo della variazione dell'eccentricità nell'orbita osculatrice relativa.

Nella ricerca si assume come parametro fondamentale di confronto il rapporto $-\Delta m/m$ essendo m la massa del sistema e Δm la diminuzione subita dalla stessa in un periodo, e viene chiamato *caso astronomico* quello in cui il detto rapporto si mantenga molto piccolo rispetto all'unità. E ciò perché le conseguenze, tratte da ricerche teoriche al riguardo, presentano un certo interesse concreto (nei sistemi binari o comunque in altre questioni cosmogoniche collegate ad emissione luminosa o corpuscolare) *soltanto finché non siano in contrasto con una variazione di massa, in ogni periodo, molto piccola rispetto alla massa stessa.*

E tutto, s'intende, con riferimento ad orbite relative osculatrici inizialmente ellittiche e fino a quando l'eccentricità non sia troppo vicina ad 1.

2. Col solito significato dei simboli valgono le note relazioni:

$$(1) \quad r = a(1 - e \cos E) \quad , \quad a = p(1 - e^2)^{-1} \quad , \quad p = m^{-1} ,$$

$$(2) \quad \tau = 2\pi m^{-2} (1 - e^2)^{-3/2} \quad , \quad r^2 d\vartheta = dt ,$$

$$(3) \quad r^2 (\dot{v} + \dot{\omega}) = 1 \quad , \quad v + \omega = \vartheta ,$$

$$(4) \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \quad , \quad \sin v = \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E} ,$$

avendo scelto le unità di misura come segue:

$$p_0 = 1 \quad , \quad m_0 = 1 \quad , \quad (2\pi)^{-1} (1 - e^2)^{3/2} \tau_0 = 1 .$$

(*) Nella seduta del 10 giugno 1958.

Ci serviremo delle ormai classiche equazioni ⁽¹⁾ che legano le variazioni di e , em ed ω alla variazione dm della massa ed all'anomalia vera del *secondario* sull'orbita osculatrice:

$$(5) \quad de = -(e + \cos v) \frac{dm}{m},$$

$$(6) \quad dem = -\cos v dm,$$

$$(7) \quad emd\omega = -\sin v dm,$$

equazioni che riscriviamo introducendo l'anomalia eccentrica

$$(5') \quad de = -\frac{(1-e^2) \cos E}{1-e \cos E} \frac{dm}{m},$$

$$(6') \quad dem = \frac{e - \cos E}{1-e \cos E} dm,$$

$$(7') \quad emd\omega = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1-e \cos E} dm.$$

3. Tenuto conto delle (2), dalla (7') si ricava la relazione

$$(8) \quad \frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{\varepsilon}{2\pi e} \sin E (1 - e \cos E),$$

dove il parametro

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = -\frac{\dot{m}\tau}{m} = -\frac{\Delta m}{m}$$

rappresenta il valore istantaneo del rapporto $|\Delta m|/m$, essendo Δm la variazione della massa in un periodo.

Supponiamo che il moto sia regolato da una legge di emissione ⁽²⁾ che implichi

$$(9) \quad v = \vartheta - \omega = \text{costante},$$

epperò

$$(10) \quad \frac{d\omega}{d\vartheta} = 1.$$

Inoltre all'istante (iniziale) t_0 , siano

$$e > 0 \quad ; \quad e + \cos v > 0 \quad , \quad 0, \cos E > 0.$$

(1) G. ARMELLINI, *Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 11 (1926); E. L. MARTIN, *Sulle variazioni istantanee degli elementi osculatori nel problema dei due corpi di massa variabile*, « Pubbl. Staz. Astron. Carloforte », n. 25, Padova (1934).

(2) E. L. MARTIN, *Funzioni prive di estremanti in moti di sistemi binari di massa variabile*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 1 (1956); G. ARMELLINI, *Sopra l'incremento dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse decrescenti, con applicazioni alle orbite delle stelle binarie*, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 9 (1932).

Consegue dalle (5), (5'), che l'eccentricità andrà crescendo al diminuire della massa e si avrà sempre

$$e + \cos v > 0, \quad 0, \cos E > 0.$$

Dalle (8) e (10) si ha intanto

$$(11) \quad \frac{\varepsilon}{2\pi e} \sin E (1 - e \cos E) = 1,$$

e poiché ε ed e sono positivi, sarà

$$0 < \sin E (1 - e \cos E) < 1.$$

Si trae così dalla (11), nelle ipotesi fatte, l'ineguaglianza assai significativa

$$(I) \quad 2\pi e < \varepsilon.$$

Martin, nel lavoro citato dimostra, fra l'altro, che le condizioni

$$\vartheta - \omega = v = \text{costante}, \quad e_0 + \cos v_0 < 0$$

implicano una eccentricità crescente col tempo e non limitata superiormente per $t \rightarrow \infty$.

L'ineguaglianza (I) restringe l'importanza pratica di tale risultato, perché precisa che l'eccentricità raggiungerà ad esempio il valore 0,16 solo dopo che il rapporto $\varepsilon = |\Delta m|/m$ avrà superato (!) l'unità.

Sicché l'ipotesi $\vartheta - \omega = v = \text{costante}$, menzionata, può avere al più un qualche grado di attendibilità nei sistemi binari solo con riguardo ad orbite - che inizialmente siano e fino a che restino - pressoché circolari.

Possiamo esprimere ciò dicendo:

Nel caso ASTRONOMIC⁽³⁾ relativo ad una legge di emissione che implichi la (10), l'eccentricità rimarrà praticamente costante e quasi nulla.

4. Notiamo che la (5'), per la (3), può anche scriversi

$$(12) \quad de = - \frac{(1 - e^2) \cos E}{1 - e \cos E} r^2 \left(\frac{dv}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \right) \frac{dm}{m}.$$

Servendoci poi della (4) ricaviamo

$$dv = \frac{(1 - e^2)^{1/2} dE + (1 - e^2)^{-1/2} \sin E de}{1 - e \cos E};$$

tenuto conto di questa e della (7') si trae dalla (12) con facili riduzioni

$$(13) \quad \frac{2\pi - e \sin E \cos E}{1 - e^2} de = \varepsilon \cos E dE - \varepsilon \sin E \cos E \frac{dm}{em},$$

(3) Epperò entro tutto il lasso di tempo durante il quale il rapporto $|\Delta m|/m$ si mantenga molto piccolo rispetto all'unità.

da cui:

$$(14) \quad \int_{e_0}^e \frac{2\pi - e \sin E \cos E}{1 - e^2} de = \int_{E_0}^{2N\pi + E} \varepsilon \cos E dE + \int_{m_0}^m \varepsilon \sin E \cos E \frac{d(-m)}{em}.$$

Occorrendo, indicheremo questi integrali ordinatamente con i, j, k .

5. Supponiamo ora che la ε sia funzione monotona di t e si mantenga (in un certo lasso di tempo T finito o no) piccola rispetto ad 1. Per fissare le idee, la ε si mantenga ad esempio minore di $\varepsilon^* < 1/100$. In tali ipotesi la ε sarà ovviamente anche funzione monotona di E ; e viceversa. Penseremo inoltre $E_0 = -\pi/2$ ed e_0 tale che sia $0,01 < e_0 - \varepsilon^*$, $e_0 + \varepsilon^* < 0,99$. Ciò posto, dico che nelle ipotesi fatte la variazione totale dell'eccentricità, in qualsiasi intervallo $t - t_0 \leq T$, sarà (in valore assoluto) minore di ε^* .

Possa in effetti, per assurdo, in un intervallo $t_1 - t_0 \leq T$, la e subire una tale variazione e ciò avvenga quando sia $m = m_1$ ($m_1 \geq 0$). Dalla (14) si avrà subito

$$\varepsilon^* \frac{2\pi - \varepsilon^*/2}{1 - (e_0 - \varepsilon^*)^2} < |i|,$$

ed inoltre

$$|j| \leq \left| \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \Phi(E) \cos E dE \right|,$$

dove

$$\Phi(E) = \varepsilon(E) - \varepsilon(E + \pi) + \varepsilon(E + 2\pi) - \dots + \varepsilon(E + 2N\pi)$$

è la somma di $2N + 1$ termini a segni alternati crescenti (o decrescenti) in valore assoluto e con i termini estremi positivi; sicché

$$0 < \Phi < \varepsilon^*,$$

e quindi

$$|j| < 2\varepsilon^*.$$

Quanto a

$$(15) \quad |k| = \left| \int_{m_1}^{m_0} \frac{\varepsilon}{2} \frac{\sin 2E}{em} d(-m) \right|$$

si osservi che un suo limite superiore si otterrà supponendo una variazione della massa che, in ogni periodo, avvenga bruscamente e solo quando sia $E \equiv \pi/4$, o, fa lo stesso, per una legge di emissione che implichi $E = \text{cost.} = \pi/4$. Nell'uno o nell'altro caso, da

$$\frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} > \frac{\sqrt{2}/2 - (e_0 + \varepsilon^*)}{1 - (e_0 - \varepsilon^*) \sqrt{2}/2} \equiv \beta > -1,$$

si trae dalla (6')

$$\frac{1}{em} < \frac{1}{e_0 m_0 + \beta(m_0 - m)};$$

e però, tenuto conto di questa, si deduce dalla (15)

$$|k| < \frac{\varepsilon^*}{2\beta} \log \left(1 + \frac{\beta}{e_0} \right).$$

Per la (14) dovrebbe quindi essere

$$\frac{2\pi - \varepsilon^*/2}{1 - (e_0 - \varepsilon^*)^2} < 2 + \frac{1}{2\beta} \log \left(1 + \frac{\beta}{e_0} \right);$$

ma questa ineguaglianza, nelle nostre ipotesi, è assurda. Sicché può concludersi che fino a quando il rapporto $-\Delta m/m$ si manterrà minore di ε^* , la variazione totale $e - e_0 = \Delta e$ dell'eccentricità sarà (in valore assoluto) più piccola di ε^* :

$$(II) \quad |\Delta e| < \varepsilon^*.$$

6. Recentemente Armellini ha mostrato, fra l'altro, che se l'emissione (luminosa e corpuscolare) è regolata da una legge del tipo

$$(16) \quad -\frac{\dot{m}}{m} = \lambda = \text{costante}$$

con λ piccola quanto si voglia, allora l'orbita relativa osculatrice finirà col diventare iperbolica. E ritiene questo risultato di grande importanza nella cosmogonia dei sistemi binari, ove si accetti la teoria, di Fesenkov, Ambartsumian, Krat..., di una cospicua emissione corpuscolare che finisca col ridurre la massa del sistema ad una piccola parte (1/10) della massa primitiva.

Purtroppo la nostra analisi e la conseguente ineguaglianza (II) non confermano questa congettura.

Invero, valendo la (16), può scriversi $\varepsilon = \lambda\tau$ e siccome il periodo τ , per masse decrescenti, è, come si sa, crescente, la ε risulta funzione crescente di t . Scegliendo infine i dati numerici ben oltre il plausibile e tali da assicurare, con la legge (16) una emissione che in $5 \cdot 10^9$ anni riduca magari ad 1/1000 la massa del sistema, si ottiene $\varepsilon^* < 10^{-6}$. Varrà quindi la (II) e sarà

$$|\Delta e| < 10^{-6}.$$

Si può dunque concludere che, durante l'intera vita ⁽⁴⁾ del sistema l'eccentricità subirà variazioni del tutto inapprezzabili.

Possiamo anche esprimere ciò dicendo:

Nel caso ASTRONOMICO relativo alla legge di emissione (16), l'eccentricità rimarrà praticamente costante.

(4) Cioè entro il lasso di tempo, dell'ordine di $5 \cdot 10^9$ anni, nel quale la massa del sistema diminuendo con la legge (16), finisca col ridursi ad 1/1000 di quella iniziale.

Fisica. — *Spettrofotometro a filtri interferenziali*^(*). Nota di MARIA ARTOM e CLAUDIA GENTILE, presentata^(**) dal Corrisp. R. DEAGLIO.

1. La misura della distribuzione spettrale relativa di una sorgente luminosa si eseguisce, con metodo classico, facendo uso di un monocromatore munito di ricevitore integrale (pila termoelettrica, bolometro, ecc.) o selettivo (cellula a strato di sbarramento, cellula fotoelettrica, fotomoltiplicatore, ecc.)⁽¹⁾. I ricevitori selettivi vengono impiegati di preferenza per la loro maggiore sensibilità.

In un monocromatore, per una buona precisione di misura, è indispensabile un elevato illuminamento sulla fenditura; il flusso luminoso che entra nello strumento spettroscopico è limitato essenzialmente dalla luminanza della sorgente e dall'ampiezza della fenditura e ridotto ancora dalle perdite per riflessione e diffusione. In genere in uno spettrofotometro a prisma la trasmissione non è mai maggiore del 30 %. (negli spettrofotometri a reticolo le perdite sono ancora superiori).

Nel caso di sorgenti a bassa luminanza (schermi fluorescenti, sostanze fosforescenti, ecc.) è indispensabile allargare la fenditura di ingresso, e talvolta le misure possono diventare alquanto incerte.

È risultato conveniente per questi casi studiare dispositivi sperimentali in cui il complesso fenditura — sistema disperdente è sostituito da filtri a banda passante abbastanza stretta.

2. I filtri interferenziali⁽²⁾ si prestano egregiamente alla realizzazione di tali dispositivi. Il guadagno in luminosità è notevole soprattutto se la sorgente è estesa, perché si può sfruttare un fascio luminoso di sezione grande quanto l'area utile del filtro.

La trasmissione spettrale di un filtro interferenziale, che ha l'andamento rappresentato in fig. 1 *b* è funzione di varie grandezze relative alle proprietà ottiche degli strati metallici e dielettrici che costituiscono il filtro, ed in particolare del fattore di riflessione delle superfici metalliche. Con l'aumentare del fattore di riflessione, le proprietà monocromatiche del filtro interferenziale migliorano, anche se a scapito del fattore di trasmissione massimo.

(*) Lavoro eseguito presso il Laboratorio di Fotometria dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale G. Ferraris, Torino.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) W. E. FORSYTHE (Ed.), *Measurement of Radiant Energy*, New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1937.

(2) L. N. HADLEY e D. M. DENNISON, « Journ. Opt. Soc. Am. », 37, 451 (1947); L. N. HADLEY e D. M. DENNISON, « Journ. Opt. Soc. Am. », 38, 483 (1948); J. A. SANDERSON e R. L. UEBERALL, Report H-2731, Navy Department, Office of Research and Inventions, N.R.L.

Attualmente si costruiscono filtri interferenziali per tutto l'intervallo da 380 μm a 780 μm , che interessa la fotometria, con un'ampiezza di banda di 6-10 μm e fattore di trasmissione massimo di circa 20-30%.

Per fare un confronto riferiamoci ad esempio allo spettrofotometro di Beckman con prisma di quarzo: una ampiezza di banda di 8 μm si realizza con fenditure di 0,75 mm nel violetto (400 μm), di 0,1 mm nel rosso (750 μm).

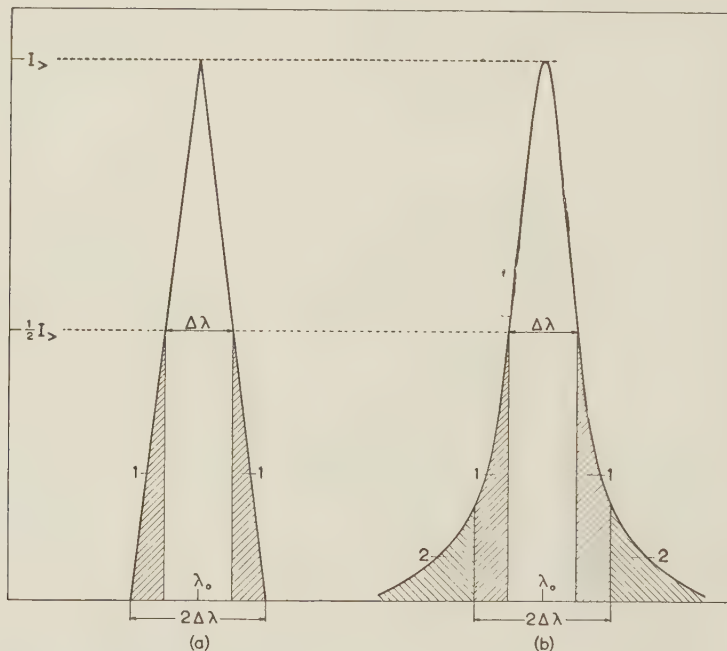


Fig. 1. - Intensità spettrale relativa all'uscita di: a) spettrofotometro a prisma; b) filtro interferenziale.

Per lo spettrofotometro a prisma, ammesso che nell'intorno della lunghezza d'onda λ_0 la dispersione del prisma sia uniforme e l'intensità dello spettro da misurare costante, l'energia che incide sul ricevitore ha l'andamento spettrale rappresentato nella fig. 1 a, quando le fenditure di entrata e di uscita sono uguali; per il filtro l'andamento è quello rappresentato nella fig. 1 b. Nel caso di fig. 1 a il 75 % dell'energia appartiene alla banda nominale $\Delta\lambda = (\lambda_0 + 0,5 \Delta\lambda) - (\lambda_0 - 0,5 \Delta\lambda)$; il rimanente 25 % è distribuito nelle zone laterali 1 della banda $2 \Delta\lambda$. Nel caso di fig. 1 b soltanto il 60 % dell'energia appartiene alla banda nominale, il 23 % è distribuito nelle zone 1, ed il 17 % è distribuito nelle zone 2 che si trovano al di fuori della banda $2 \Delta\lambda$.

Pertanto si deve concludere che, per quanto riguarda la purezza spettrale, lo spettrofotometro a prisma è superiore a quello a filtri. Malgrado ciò il dispositivo a filtri interferenziali offre tali vantaggi di luminosità e di

semplicità che è sembrato utile studiarne il comportamento, in un primo tempo con metodi di calcolo ⁽³⁾, in seguito sperimentalmente.

3. Nella realizzazione sperimentale si sono usati 20 filtri regolarmente intervallati nel visibile da 380 a 780 m μ m, con ampiezza di banda media di 7 m μ m; due fotomoltiplicatori, uno per l'intervallo 380-600 m μ m, l'altro

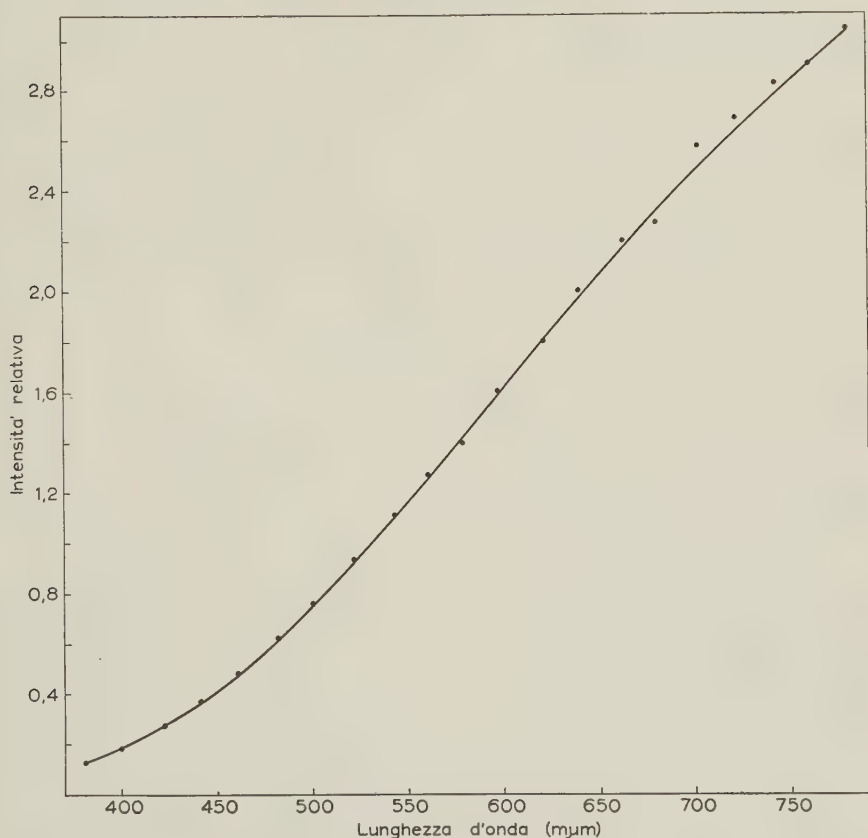


Fig. 2. - Intensità spettrale relativa dell'illuminante A e punti sperimentali ottenuti con lo spettrofotometro a filtri interferenziali.

per l'intervallo 600-780 m μ m ed un sistema di lenti per rendere parallelo il fascio luminoso incidente sui filtri interferenziali.

La sensibilità spettrale del sistema è stata determinata con distribuzioni note, scegliendo per ogni intervallo spettrale quella che meglio approssimava la distribuzione di uguale energia.

A titolo di esempio si riportano i risultati ottenuti con il dispositivo così tarato: in fig. 2 è rappresentata la curva di distribuzione spettrale di una sorgente ad incandescenza di temperatura dal colore 2854 °K, illuminante A ⁽⁴⁾;

(3) M. ARTOM e C. GENTILE, «L'Elettrotecnica», 44, 20 (1957).

(4) «Compte Rendu des Séances», Commission Internationale de l'Eclairage, 1931, p. 19.

i punti corrispondono alle misure eseguite con lo spettrofotometro a filtri; analogamente per le distribuzioni di fig. 3, ottenute antepo-
nendo all'illuminante A filtri colorati di trasmissione spettrale nota.

Le misure sono state eseguite sia con illuminamenti dell'ordine di qualche centinaio di lux sul piano del diaframma di ingresso dello strumento, sia con illuminamenti inferiori ad un lux, variando corrispondentemente la tensione di alimentazione dei fotomoltiplicatori, per mantenere le correnti anodiche nei limiti di linearità.

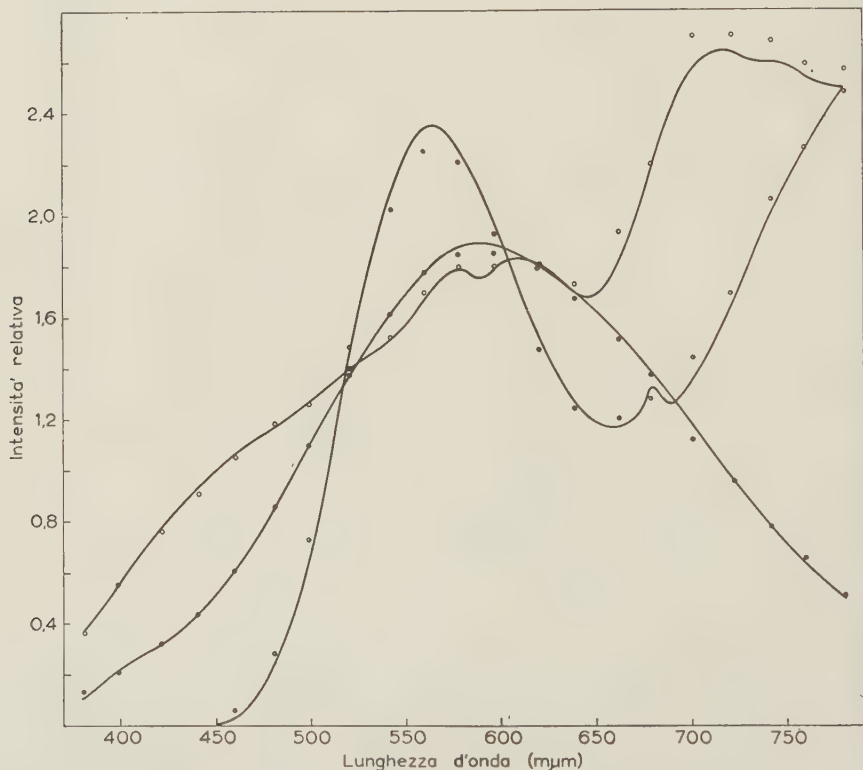


Fig. 3. - Intensità spettrale relativa e punti sperimentali ottenuti con lo spettrofotometro a filtri interferenziali di:

- illuminante A e filtro Schott BG 10; ● illuminante A e filtro Schott VG 4;
- illuminante A e filtro Chance OB 9.

La buona concordanza che si riscontra dall'esame dei grafici di fig. 2 e di fig. 3, e la grande semplicità di misura, possono giustificare l'adozione di un tale strumento in tutti i casi di distribuzioni continue in cui l'intensità spettrale relativa non varia troppo rapidamente con la lunghezza d'onda.

D'altra parte l'errore introdotto dalla particolare forma di banda dello spettrofotometro a filtri si può ridurre riferendo ogni volta le misure a quelle che si ottengono con una distribuzione spettrale nota, molto simile a quella in esame.

Ringraziamo vivamente il prof. R. Deaglio che ha proposto questo metodo di misura.

Chimica fisica. — *Ricerche sulla struttura elettronica dei derivati clorurati della naftalina.* — Parte II: *Costanti di dissociazione delle cloronaftilammine* ^(*). Nota di SERGIO CARRÀ e MASSIMO SIMONETTA, presentata ^(**) dal Socio L. CAMBI.

Nella prima parte di questo lavoro ⁽¹⁾ abbiamo riferito le costanti di velocità per la reazione di benzoilazione in benzolo di alcune cloronaftilammine.

Il valore della costante ρ di Hammet per questa reazione è noto ⁽²⁾ ed è stato pertanto possibile calcolare i corrispondenti valori delle costanti σ che, poiché nella Nota precedente è stato usato un valore di ρ incorretto, riportiamo in Tabella I, unitamente ai valori della concentrazione di elettroni π nelle varie posizioni del nucleo, ricavate mediante la nota relazione di Jaffè ⁽³⁾.

TABELLA I.

Composti	σ	q
1 ammino-4-cloronaftalina	0,316	0,9796
2 ammino-4-cloronaftalina	0,520	0,9665
2 ammino-6-cloronaftalina	0,346	0,9777
amino-5-cloronaftalina	0,342	0,9779
1 ammino-8-cloronaftalina	0,372	0,9760
1 ammino-3-cloronaftalina	0,536	0,9654

I valori di q così calcolati non sono risultati in accordo con quelli ottenuti teoricamente da Ketelaar e Van Oosterhout ⁽⁴⁾, e abbiamo ritenuto utile raccogliere qualche nuova informazione sperimentale sui composti in questione. È stata scelta la costante di dissociazione acida. I valori ottenuti per i composti da noi presi in esame sono riportati in Tabella II.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la laurea in chimica industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

(1) M. SIMONETTA e S. CARRÀ, « Rend. Acc. Lincei », VII, 22, 176 (1957).

(2) H. H. JAFFÈ, « Chem. Rev. », 191 (1953).

(3) H. H. JAFFÈ, « J. Chem. Phys. », 20, 279 (1952).

(4) J. A. A. KETELAAR e G. W. VAN OOSTERHOUT, « Rec. Trav. Chim. », 448 (1946).

TABELLA II.

Composto	K (moli/litro)
1 ammino naftalina	$1,90 \cdot 10^{-4}$
1 ammino-2-cloronaftalina	$1,79 \cdot 10^{-3}$
1 ammino-3-cloronaftalina	$3,60 \cdot 10^{-4}$
1 ammino-4-cloronaftalina	$9,13 \cdot 10^{-4}$
1 ammino-5-cloronaftalina	$7,05 \cdot 10^{-4}$
1 ammino-8-cloronaftalina	$2,80 \cdot 10^{-4}$
2 ammino naftalina	$1,30 \cdot 10^{-4}$
2 ammino-1-cloronaftalina	$4,58 \cdot 10^{-4}$
2 ammino-6-cloronaftalina	$1,18 \cdot 10^{-3}$

Si vede che sia nei derivati della 1 ammino naftalina che in quelli della 2 ammino naftalina l'introduzione dell'atomo di alogeno in una qualsiasi delle posizioni da noi sperimentate porta ad un aumento della costante di dissociazione acida, cioè ad una diminuzione della basicità dell'ammina. Questo corrisponde ad una minore utilizzazione del doppietto elettronico dell'azoto che potrebbe essere giustificata dalla presenza di una carica positiva sull'atomo di carbonio al quale è attaccato il gruppo NH_2 : si vede pertanto che i risultati dalla misure di velocità di benzoilazione sono confermati almeno qualitativamente dai valori trovati per le costanti di dissociazione. Un confronto quantitativo non è possibile in quanto le misure sono state effettuate in solventi diversi.

PARTE SPERIMENTALE.

Le sostanze esaminate sono: 1 ammino naftalina, 1 ammino-2-cloronaftalina, 1 ammino-3-cloronaftalina, 1 ammino-4-cloronaftalina, 1 ammino-5-cloronaftalina, 1 ammino-8-cloronaftalina, 2 ammino naftalina, 2 ammino-1-cloronaftalina, 2 ammino-6-cloronaftalina.

Le preparazioni dei prodotti e le loro caratteristiche sono state descritte nella Nota precedente ⁽¹⁾.

Per la determinazione delle costanti di dissociazione abbiamo dovuto scartare il metodo della misura di conducibilità a diluizione infinita a causa della scarsissima conducibilità dei nostri prodotti. Abbiamo invece appli-

cato un procedimento spettrofotometrico già usato con buoni risultati da A. V. Willi sulle nicotinammidi⁽⁵⁾.

Come è noto la costante di dissociazione K di una base organica può essere espressa dalla relazione:

$$\frac{[B] \cdot [H^+]}{[BH^+]} = K$$

dove $[B]$ rappresenta la concentrazione della base indissociata $[H^+]$ la concentrazione di idrogeno ioni, ed infine $[BH^+]$ la concentrazione della base dissociata.

Se si fa lo spettro ultravioletto delle cloronaftilammine si può notare che dette sostanze in generale presentano un massimo di assorbimento in corrispondenza di circa 240 millimicron di lunghezza d'onda. Nello spettro effettuato sulla base in presenza di eccesso di acido cloridrico (quindi nel caso in cui per l'elevata diluizione la base è presente come ione BH^+) il massimo compare con minore assorbimento sino a sparire completamente in alcuni casi. Lo spettro della base in presenza di una concentrazione intermedia di acido cloridrico presenta un assorbimento intermedio agli estremi precedenti.

La situazione è illustrata graficamente in figura 1. La curva continua è quella relativa alla base indissociata, quella a linea e punto è relativa alla base dissociata e quella tratteggiata è relativa allo stato intermedio. Se si suppone che l'assorbimento relativo della curva intermedia sia proporzionale alla concentrazione della base indissociata, il rapporto dei segmenti $AB/CD = g$ è uguale al rapporto fra la concentrazione di base indissociata e la concentrazione totale di base (dissociata e indissociata) introdotta nella soluzione. Ovvero:

$$g = \frac{[B]}{[B] + [BH^+]}$$

D'altra parte se indichiamo con $\bar{\epsilon}$ l'ordinata del massimo della curva intermedia e con $\bar{\epsilon}$ ed $\bar{\epsilon}_{BH^+}$ quelle delle curve estreme avremo:

$$g = \frac{\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_{BH^+}}{\bar{\epsilon}_B - \bar{\epsilon}_{BH^+}}$$

Determinato quindi graficamente il valore di g si potrà avere immediatamente la $[B]$ moltiplicando per la concentrazione di base totale presente nella

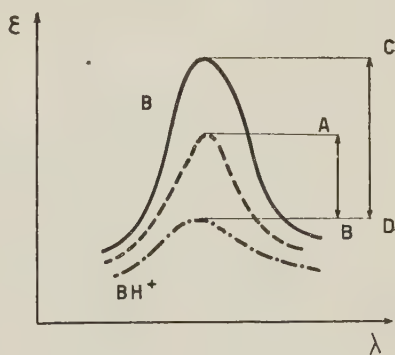


Fig. 1.

(5) A. V. WILLI, «*Helv. Chim. Acta*», 37, 602 (1954).

soluzione, corrispondente a quella introdotta. La $[BH^+]$ si potrà ottenere come differenza della B dalla base totale. Infine la concentrazione di $[H^+]$ si

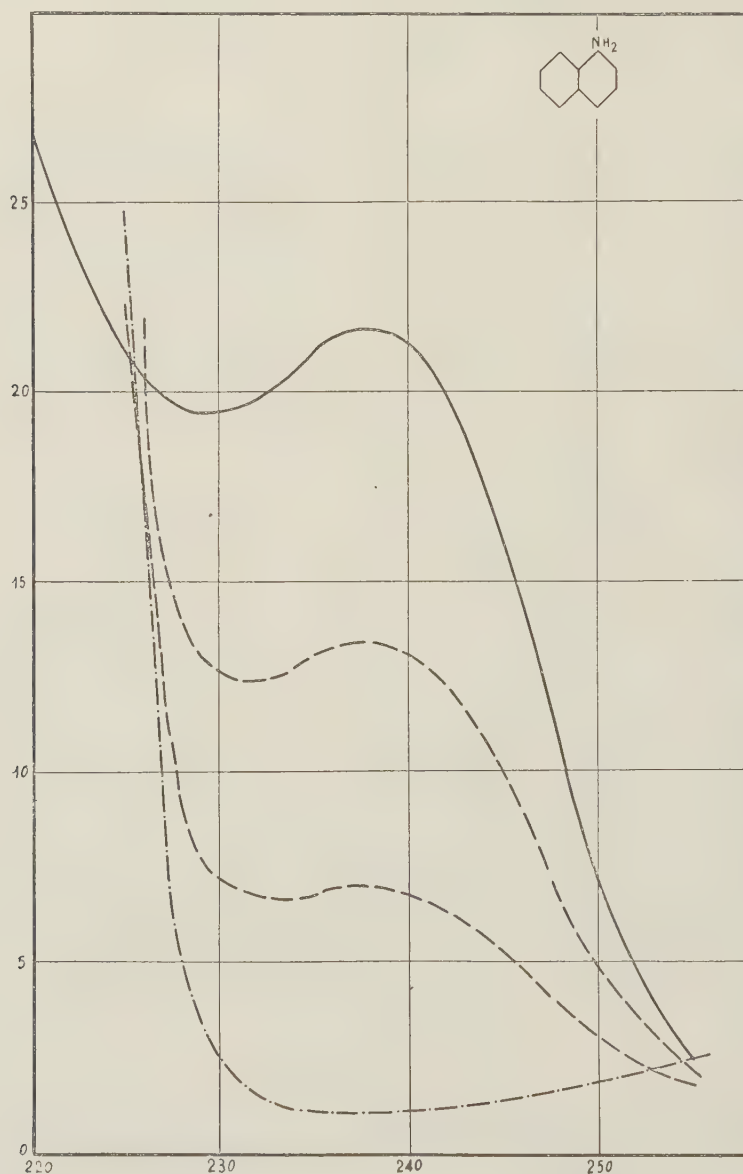


Fig. 2.

calcolerà facendo la differenza fra la concentrazione di acido introdotto nella soluzione e quello consumato per salificare la base.

Come solvente si è usata una miscela al 50 % in volume acqua-alcool metilico (alcool metilico « Spectra Grade » dell'Eastman Kodak).

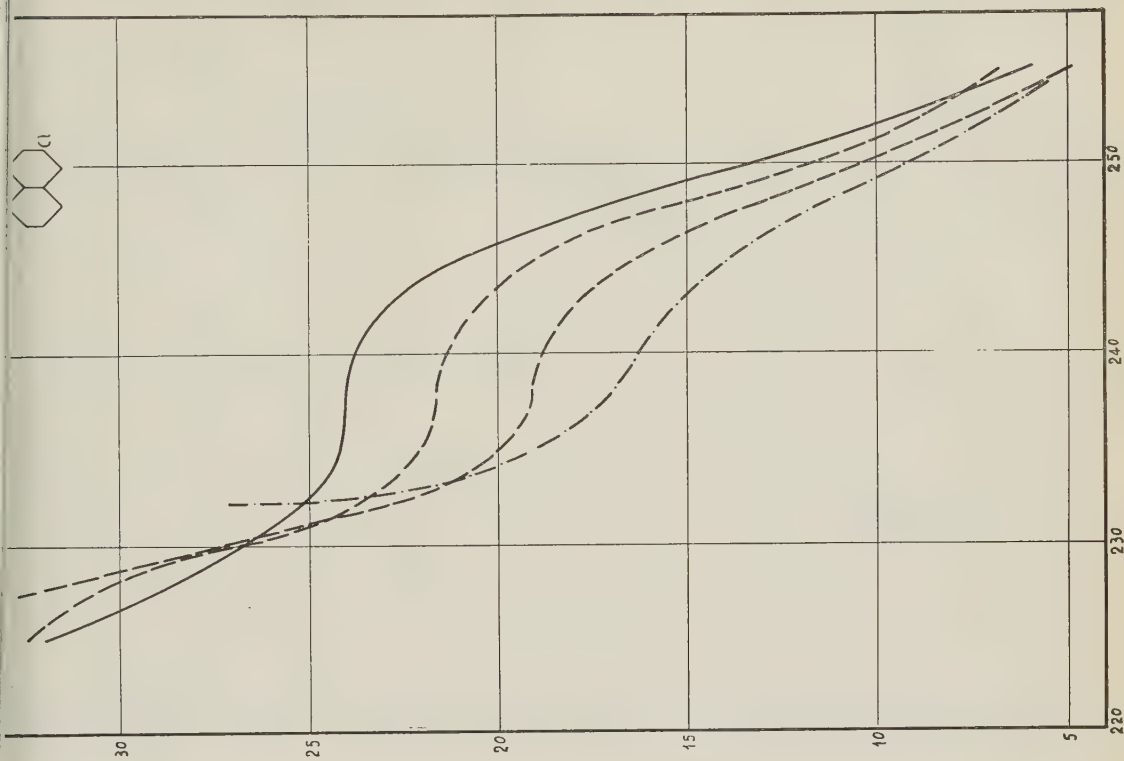


Fig. 4.

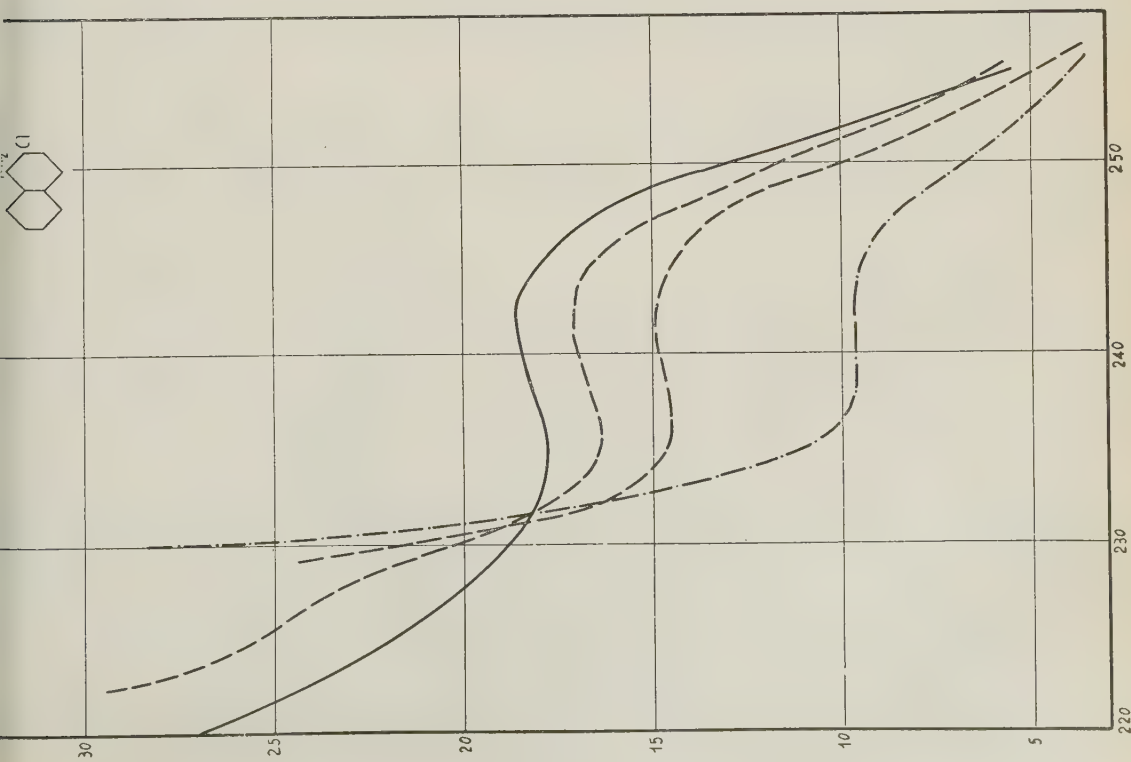
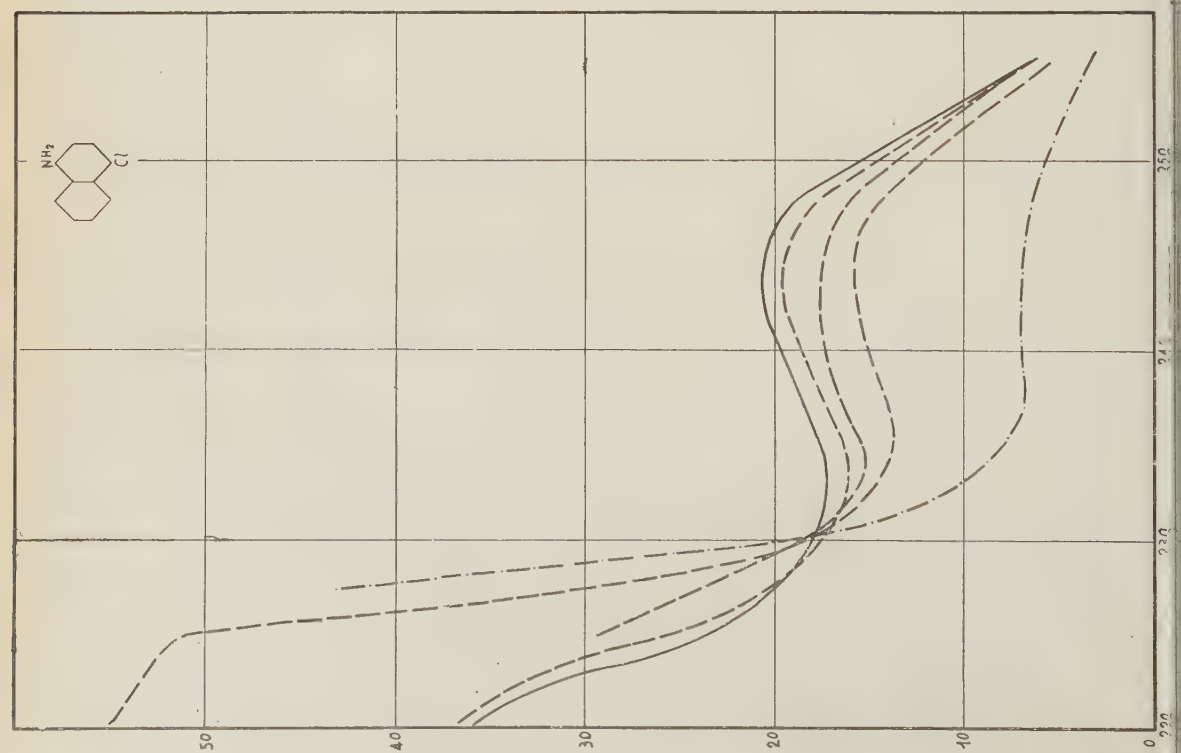
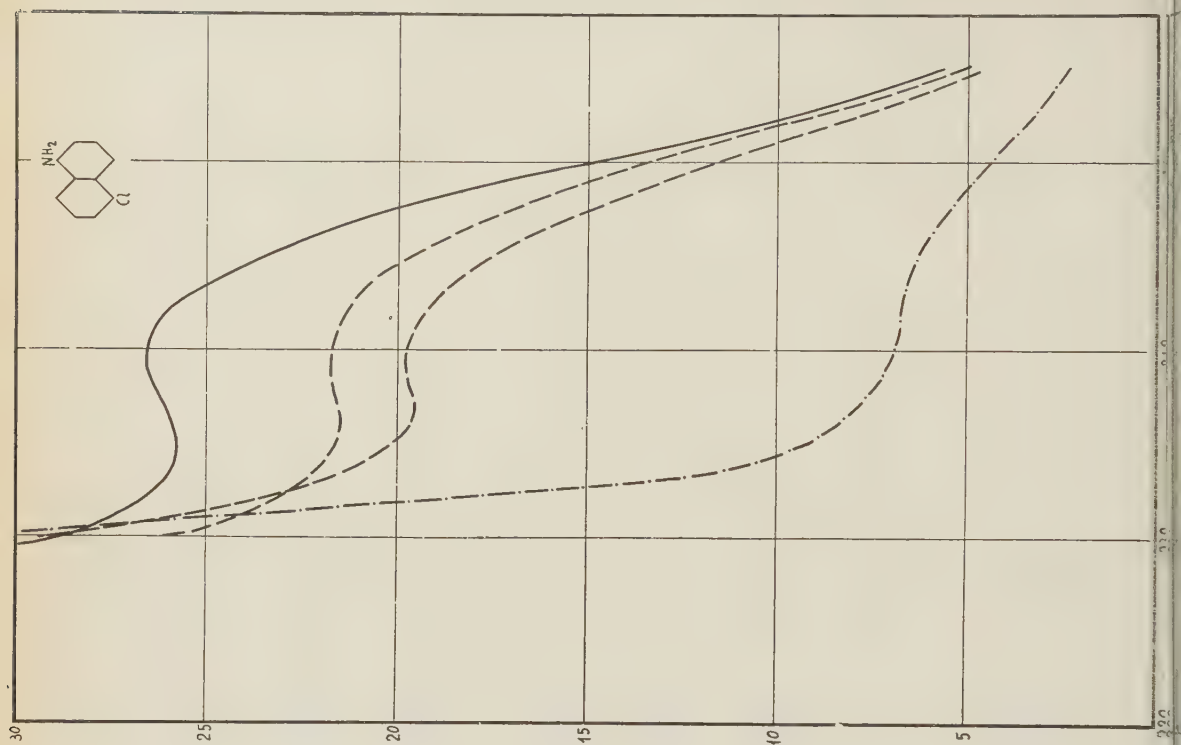


Fig. 3.



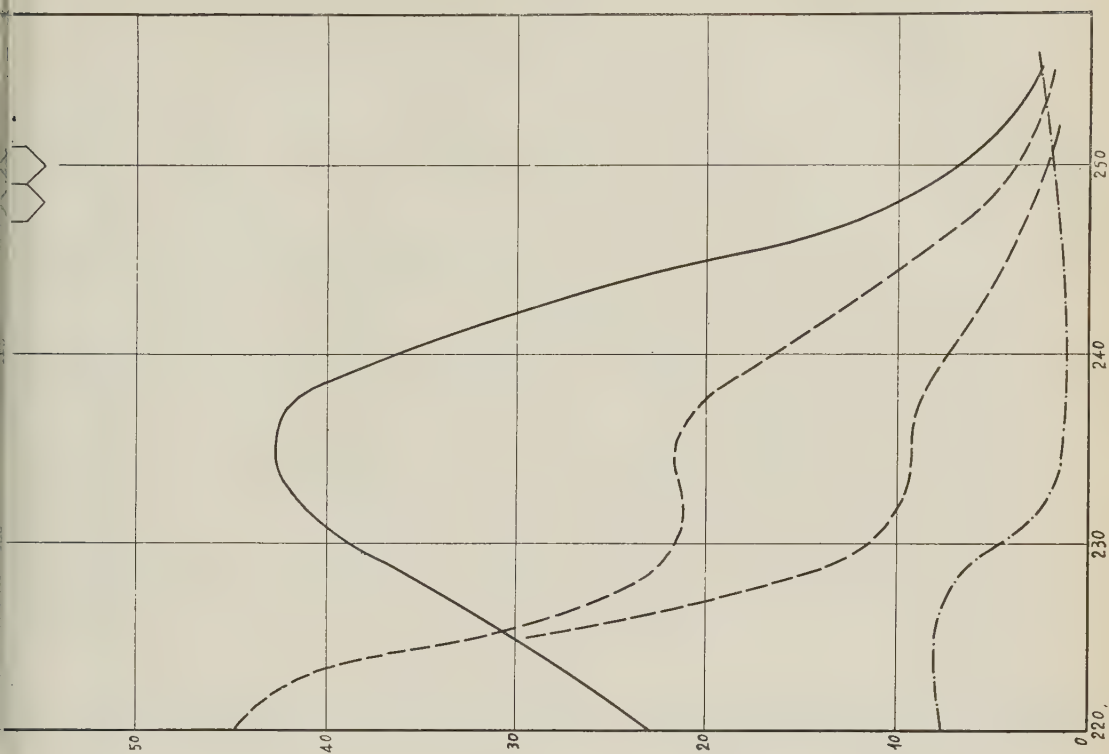


Fig. 8.

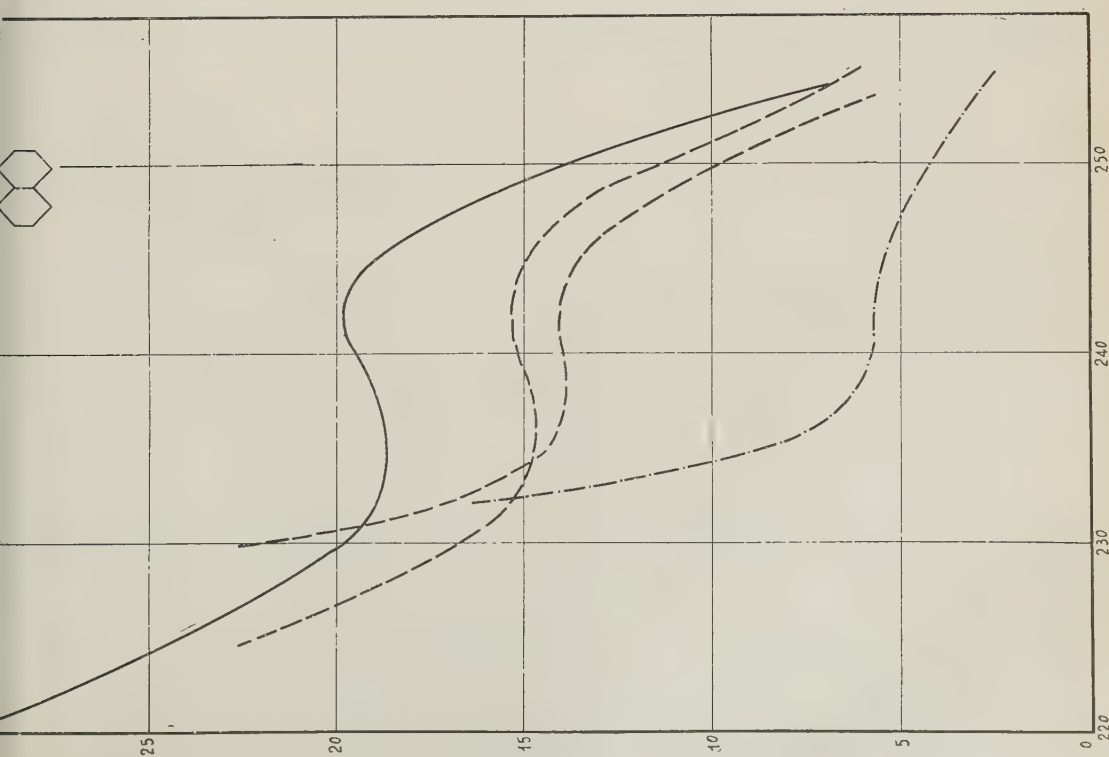
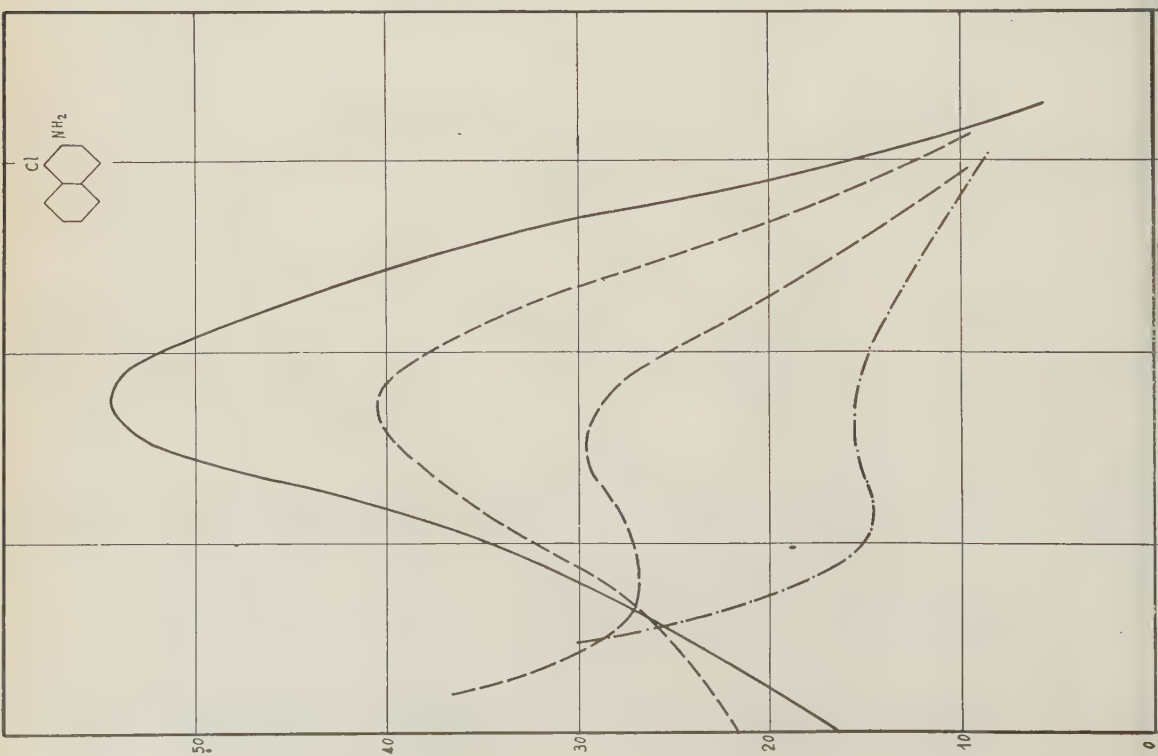
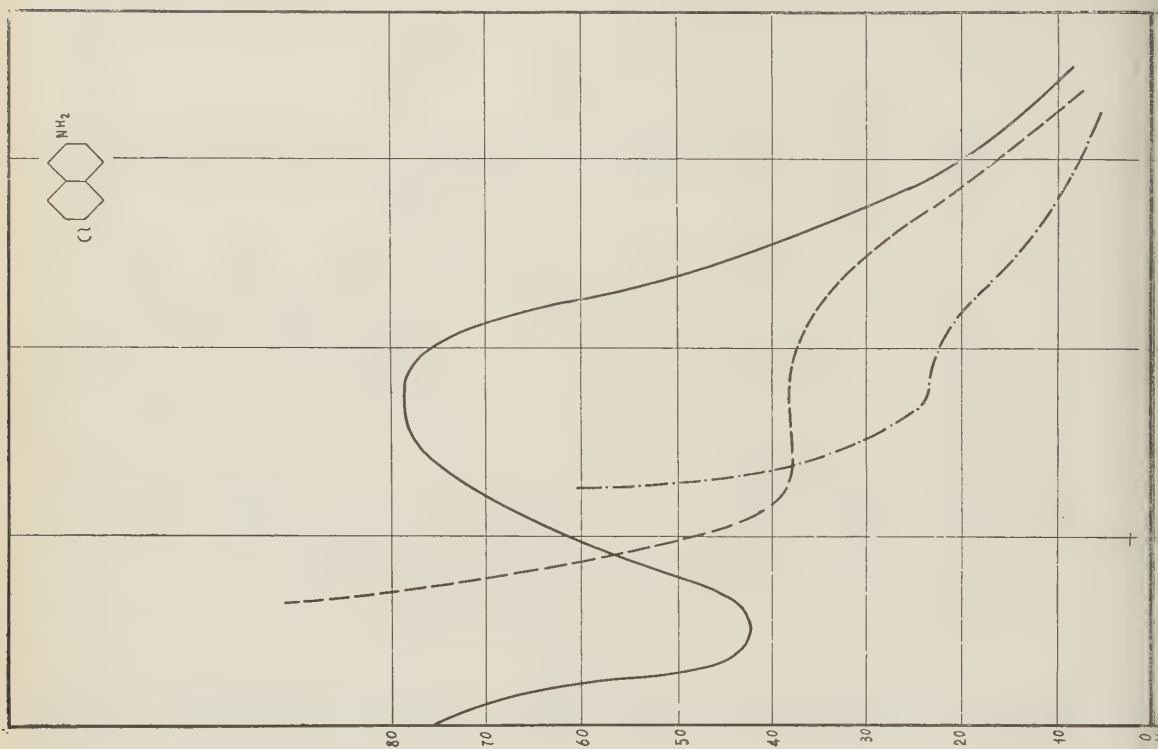


Fig. 7.



Le misure sono state effettuate con uno spettrofotometro di quarzo Beckman modello D.U. impiegando una lampada ad idrogeno. Le vaschette dello spessore di 1 cm. erano di quarzo. Per una maggiore sensibilità dell'apparecchio le soluzioni venivano preparate in concentrazione tale da avere nella lettura una densità ottica compresa fra 0,100 e 1,000.

Per la maggior parte delle sostanze considerate una soluzione a concentrazione dell'ordine di 10^{-4} moli/litro si prestava per l'esame dell'assorbimento nell'ultravioletto tra 2200 e 2550 Å circa. Sono stati così costruiti i grafici di figg. 2-10, nei quali sulle ordinate sono riportati i valori del coefficiente di estinzione e in ascisse le lunghezze d'onda in millimicroni. In ciascun grafico la curva continua si riferisce alla base pura indissociata, quella a linea e punto alla base completamente dissociata e la curva tratteggiata alla base parzialmente dissociata (a due diversi gradi di dissociazione). Sono stati quindi calcolati due valori per la costante di dissociazione di ciascun composto, valori che sono sempre risultati in ottimo accordo tra loro. I valori riportati in Tabella I rappresentano la media tra i due.

Come esempio riportiamo per esteso i calcoli per l'1-ammino-3-cloro-naftalina (le concentrazioni sono espresse in moli/litro).

$$\text{conc. base} = 1,312 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{conc. HCl} = 1,956 \cdot 10^{-4}$$

$$\bar{\epsilon} = 21,7 \cdot 10^3 \quad \epsilon_{\text{BH}^+} = 17,3 \cdot 10^3 \quad \epsilon_{\text{B}} = 24 \cdot 10^3$$

$$g = \frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_{\text{BH}^+}}{\epsilon_{\text{B}} - \epsilon_{\text{BH}^+}} = 0,656$$

$$[\text{B}] = 8,61 \cdot 10^{-6}$$

$$[\text{BH}^+] = 0,451 \cdot 10^{-5}$$

$$[\text{H}^+] = 1,9109 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{K} = 3,645 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{conc. HCl} = 9,81 \cdot 10^{-4}$$

$$\bar{\epsilon} = 19,1 \cdot 10^3$$

$$g = 0,2686$$

$$[\text{B}] = 0,3522 \cdot 10^{-5}$$

$$[\text{BH}^+] = 0,9598 \cdot 10^{-5}$$

$$[\text{H}^+] = 9,7140 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{K} = 3,565 \cdot 10^{-4}$$

Chimica fisica. — *Transizioni elettroniche $\pi-\pi$ (singoletti) delle azine* (*). Nota di SERGIO CARRÀ, ERMANNO GIANINETTI e MASSIMO SIMONETTA, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

In due nostri recenti lavori ^(1,2) è stata studiata con il metodo L.C.A.O. S.C.F. nell'approssimazione di Pople la struttura elettronica dello stato fondamentale della piridina, delle diazine della serie benzenica e della s-triazina.

I risultati ottenuti si possono ritenere soddisfacenti per quanto riguarda i valori delle densità elettroniche, come rivela il buono accordo fra i valori calcolati e sperimentali dei momenti di dipolo, e delle distanze di legame.

Un calcolo analogo è stato condotto da McWeeny ⁽³⁾ introducendo un parametro semiempirico che gli permette di riprodurre buoni valori dei potenziali di ionizzazione.

Meno soddisfacenti risultano i valori delle transizioni elettroniche $\pi-\pi$ ottenuti come differenza fra le energie delle molecole nei vari stati eccitati e quella delle molecole nello stato fondamentale.

A tale proposito si deve però ricordare che il metodo S.C.F. non si può ritenere adeguato per lo studio degli stati eccitati delle molecole. Un notevole progresso in tale senso può essere realizzato introducendo l'interazione di configurazione (C.I.) ovvero rappresentando gli stati del sistema come combinazioni fra lo stato fondamentale e i più stabili stati eccitati con contributi tali da attribuire al sistema la massima stabilità.

Allo scopo di indagare il comportamento delle nostre molecole con l'introduzione della C.I. abbiamo condotto i calcoli facendo uso della tecnica introdotta da Pariser ⁽⁴⁾ e dei parametri già da noi usati nei due lavori citati.

Come orbitali molecolari monoelettronici abbiamo usato quelli riportati in ⁽²⁾ per i tre livelli più bassi, calcolando quelli relativi al quarto e quinto livello. Abbiamo preso in considerazione le configurazioni che differiscono dallo stato fondamentale (6 elettroni a 2 a 2 nei tre orbitali più stabili) per il salto di un elettrone dagli ultimi due livelli occupati (secondo e terzo) ai due eccitati più stabili (quarto e quinto). Se indichiamo con V_0 il prodotto antisimmetrizzato delle autofunzioni occupate nello stato fondamentale e con $V_{i \rightarrow j}$ quelle relative allo stato ottenuto da quello fondamentale mediante un salto elettronico $i \rightarrow j$, gli stati da noi presi in considerazione risultano i seguenti:

$$V_0, V_{2 \rightarrow 4}, V_{2 \rightarrow 5}, V_{3 \rightarrow 4}, V_{3 \rightarrow 5}.$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto per la laurea in Chimica Industriale dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

(1) G. FAVINI e S. CARRÀ, « Gazz. Chim. It. », 87, 1367 (1957).

(2) S. CARRÀ, S. POLEZZO, M. SIMONETTA, « Rend. Acc. Lincei », XXIII, 429 (1957).

(3) R. MCWEENY e T. E. PEACOCK, « Proc. Phys. Soc. », A 70, 41 (1956).

(4) R. PARISER, « Journ. Chem. Phys. », 24, 250 (1956).

Le energie del sistema sono state ottenute risolvendo un determinante secolare del tipo:

$$|H_{mn} - \delta_{mn} W| = 0$$

dove δ_{mn} è il simbolo di Kronecker, W l'energia e

$$({}^{\circ}) \quad H_{mn} = \int V_m H V_n dv$$

con H hamiltoniana degli elettroni π riferita al cuore dei nuclei $({}^{\circ})$. Gli elementi diagonali della matrice secolare, ovvero quelli per cui $m = n$, rappresentano le energie degli stati imperturbati presi in esame.

Nel nostro caso, poiché tutte le molecole presentano almeno un asse di simmetria, si annullano gli integrali $({}^{\circ})$ aventi V_m e V_n con simmetria diversa rispetto a tale asse.

Pertanto i determinanti secolari in ogni caso si fattorizzano in due determinanti rispettivamente di secondo e terzo ordine. Per la pirazina, aven-

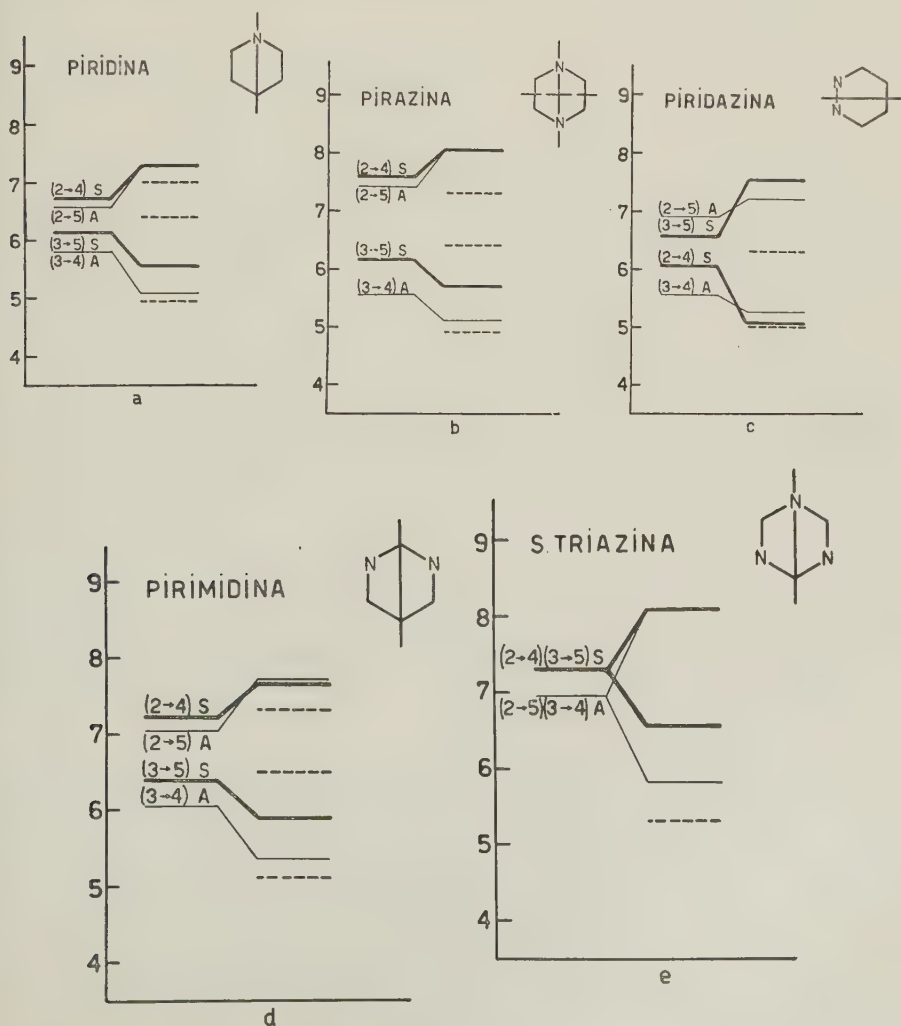


Fig. 1.

dosi una doppia simmetria assiale, tale fattorizzazione risulta più spinta: un determinante di primo ordine (relativo allo stato fondamentale) e due di secondo ordine. Per la *s*-triazina infine le configurazioni imperturbate presentano una doppia degenerazione:

$$V_{3 \rightarrow 4} = V_{2 \rightarrow 5} \quad V_{3 \rightarrow 5} = V_{2 \rightarrow 4}.$$

Tale degenerazione viene poi rimossa dalla interazione di configurazione.

I risultati da noi ottenuti sono riportati in fig. 1 (*a, b, c, d, e*). In tale figura compaiono per ogni molecola i valori (riferiti alle energie degli stati fondamentali) delle energie degli stati imperturbati e i corrispondenti spostamenti dopo aver introdotto la C.I. Sono inoltre indicati i valori sperimentali⁽⁵⁾ delle energie dei salti elettronici, e le simmetrie degli stati rispetto agli assi geometrici.

Nella Tabella seguente sono riportati i valori calcolati delle energie degli stati elettronici riferiti allo stato fondamentale imperturbato; la simmetria dei vari stati risulta dalla fig. 1.

TABELLA.

Energia degli stati dopo l'interazione (in eV).

Piridina	Pirazina	Piridazina	Pirimidina	<i>s</i> -Triazina
— 0,00013	0	— 0,00154	— 0,00140	— 0,00015
5,08669	5,11917	5,09167	5,35129	5,82583
5,58257	5,70426	5,28920	5,93851	6,53215
7,30280	8,01696	7,20444	7,69808	8,07131
7,30798	8,01967	7,55123	7,76085	8,07171

Dai risultati da noi ottenuti si possono desumere le seguenti considerazioni:

1° La combinazione dello stato fondamentale con gli stati eccitati è estremamente piccola. Poiché un elevato accoppiamento comporterebbe una sensibile alterazione di tale stato con modifica delle sue proprietà (momento dipolare, potenziale di ionizzazione, ecc.), possiamo concludere che esso è ben descritto dal metodo S.C.F.

2° Un evidente vantaggio appare nella determinazione del primo salto elettronico singoletto $\pi-\pi$ risultando i nostri valori calcolati in buon accordo con quelli sperimentali. Si noti che i valori calcolati risultano in ogni caso superiori a quelli sperimentali. Probabilmente una migliore scelta dei parametri β da noi usati^{(1) (2)} potrebbe portare a un migliore accordo.

(5) H. B. KLEVENS e J. R. PLATT, «Technical Report» (Pt. I), Laboratory of Molecular Structure and spectra, Chicago, U.S.A. (1953-54).

Chimica inorganica. — *Azione dell'acido cianidrico sui sali di Co^{II}: nitrito-Co^{III}-cianuri* (*). Nota di ERNESTINA PAGLIA, presentata (**) dal Socio L. CAMBI.

Ringrazio anzitutto il prof. L. Cambi che mi ha consigliato questa ricerca.

1. La Nota presente fa parte delle comunicazioni di questo Centro, riguardanti le cianurazioni dei sali di Co^{II} mediante HCN. L'argomento si collega in particolare alle esperienze di L. Cambi e E. Paglia sulla cianurazione dei solfiti di Co^{II} (1).

I nitroso-cianuri cobaltici sono stati considerati da antica data e rimando ai maggiori trattati di chimica inorganica che li riportano al capitolo solitamente detto dei nitrito-pentacianuri.

Vennero in generale ottenuti facendo agire l'acido nitroso sul cobalto-cianuro di potassio. Si descrisse (2) un sale rosso-scuro corrispondente a circa



che si decomponeva liberando NO; dal sale stesso, con nitrato d'argento, precipitava un prodotto a composizione incerta Ag₅ [(CN)₁₀Co₂NO₂].

Risultava una relativa notevole instabilità del sale alcalino e che in effetto i sali cui accenno erano impuri e mal definiti.

2. Con la cianurazione diretta ho ottenuto prodotti più facilmente purificabili e quindi sali definiti. Ho fatto agire in atmosfera inerte, a 0°, HCN su soluzioni acquose contenenti KNO₂ e acetato di Co^{II}; oppure ho introdotto l'acetato di Co^{II} stesso in soluzioni di nitrito sature di HCN, sempre in assenza di aria. Dalle soluzioni di colore rosso-vinoso intenso per aggiunta di alcool, si ottiene un sale micro-cristallino roseo ed una massa oleosa da cui, per successive dissoluzioni in acqua e precipitazioni con alcool si isolano ulteriori frazioni del sale roseo cristallino.

Questo sale, perfettamente purificabile, corrisponde ai rapporti: 1 Co : 5 CN : 0,5 NO₂ : 2 K. Ho dedotto la struttura binucleare molto probabile:



Il sale, diamagnetico, solubilissimo, è relativamente stabile in soluzione acquosa, alla quale impartisce colore viola chiaro. Il complesso riduce il

(*) Lavoro eseguito presso il Centro di Chimica Metallurgica del C.N.R. dell'Università di Milano, Istituto per la laurea in Chimica Industriale.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

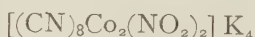
(1) Questi « Rend. » (8a), XXIV fasc. 4, pp. 378-380 (1958).

(2) ABEGG, « Handbuch Anorg. Chem. », IV/3 Tl. 3° (1935).

permanganato acidulato con H_2SO_4 ; la titolazione ossidimetrica ha attestato che per ogni NO_2^- si impiegano 2 equivalenti di ossigeno, corrispondenti al passaggio dell'anione nitroso a quello nitrico. Inoltre nella decomposizione a caldo con cloruro ferroso ed acido cloridrico si ha la formazione di NO, nel rapporto 1 Co : 0,5 NO.

Tutto ciò conferma la struttura da me considerata.

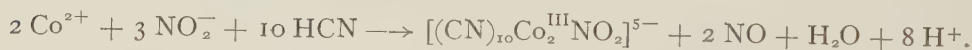
3. Ho esteso l'indagine ai sali poli-nitriti che si formano nel processo di cianurazione, e che sono probabili prodotti intermedi primari. Ho isolato il sale che corrisponde a



infatti nella decomposizione con i sali ferrosi in mezzo acido sviluppa, per 1 Co, 1 NO, mentre corrisponde a 4 equivalenti ossidimetrici sempre per 2 Co.

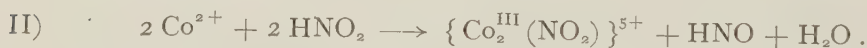
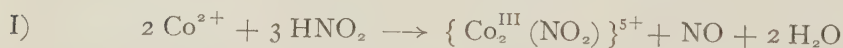
I polinitriti, diamagnetici, pure di colore roseo, sono meno stabili del mono-nitrito-decacianuro. In essi dovrebbe ammettersi, per la coordinazione 6, la struttura binucleare con il doppio ponte $(\text{NO}_2^-)_2$ analogamente a quanto dedusse A. Werner per le dicobalti-ol-dinitro ammine.

È ovvio che possono esistere diversi complessi poli-nitriti più ricchi in NO_2^- , i quali per azione dell'acido cianidrico, per gradi successivi, giungono al nitrito-decacianuro illustrato. Lo schema di sintesi bruto complessivo del decacianuro può riassumersi:



Si possono considerare due schemi per l'ossidazione di Co^{II} :

I) riduzione dell'azoto nitroso a NO; II) riduzione dell'azoto stesso, a N_2O :

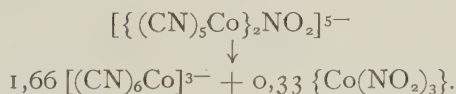


Dai saggi compiuti non si può escludere il processo II): con probabilità l'andamento della riduzione dell' HNO_2 dipende dal pH del mezzo.

4. I nitrito-cianuri di cui sopra, in soluzione tendono a scindersi generando l'anione $[\text{Co}(\text{CN})_6]^{3-}$.

Per azione del nitrato d'argento in soluzione debolmente nitrica, dai nitrito- Co^{III} -cianuri da me considerati, si ottiene cobalticianuro d'argento, con rese elevate rispetto ai CN^- presenti. Queste reazioni, sfuggite ai vecchi Autori, spiegano le discrepanze fra le composizioni dei sali alcalini di partenza da essi impiegati e i sali d'Ag da questi prodotti. Si tratta di processi di smistamento dei radicali CN^- analoghi a quelli che già vennero individuati presso questo Centro per altre serie di complessi, come ad esempio per i solfossilato- Co^{III} -decacianuri.

Nel processo intervengono certamente reazioni intermedie successive, che si possono riassumere con lo schema bruto seguente:



Il nitrito cobaltico è indicato in via affatto formale: nella soluzione finale si riscontra in effetti nitrato di Co^{II}.

5. I risultati che precedono interessano per l'aspetto generale della frequenza con cui si verifica la formazione dei complessi binucleari nella cianurazione diretta dei sali di Co^{II}. Il decacianuro mononitrito richiama nella sua probabile struttura, il decacianuro solfossilato recentemente descritto da L. Cambi e E. Paglia.

Le ricerche proseguono.

6. PREPARAZIONI E ANALISI.

a) $\text{K}_5 [\{ (\text{CN})_5\text{Co} \}_2 \text{NO}_2] \cdot 2\text{H}_2\text{O}$. — La soluzione acquosa di acetato di cobalto e nitrito di potassio nel rapporto $1 \div 2$ mol/l Co, contenente acetato di potassio, ($6 \div 8$ mol/l Co) viene saturata a 0° con HCN, dopo aver eliminato l'aria con azoto. Il colore viola iniziale della soluzione diventa sempre più cupo con il progredire della cianurazione; questa viene sospesa dopo circa 3 ore. Per aggiunta di alcool, sempre a freddo, si separa dapprima un olio rosso vinoso, poi un sale rosa scuro, che nelle successive purificazioni per dissoluzione in acqua e riprecipitazione con alcool assume colore rosa chiarissimo. Dall'olio rosso iniziale con un trattamento analogo si riesce a separare ulteriori quantità di sale roseo.

Il complesso roseo, molto igroscopico, è diamagnetico; le analisi sotto riportate si riferiscono al sale essiccato su acido solforico e potassa: I) riporta quelle relative alla preparazione con rapporto iniziale $1 \text{ KNO}_2 / 1 \text{ Co}$; II) quelle con rapporto $2 \text{ KNO}_2 / 1 \text{ Co}$.

La percentuale di NO si riferisce alla decomposizione con cloruro ferroso in soluzione cloridrica.

trov. %	I)	Co 17,91;	K 30,03;	C 18,86;	N 24,26;	NO 4,49;	H 0,98
	II)	18,01	30,20	18,52	23,93	4,71	0,93

per $\text{K}_5 [\{ (\text{CN})_5\text{Co} \}_2 \text{NO}_2] \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	calc. %	Co 18,01	K 29,77	C 18,32	N 23,52	NO 4,58	H 0,61
---	---------	----------	---------	---------	---------	---------	--------

$$\chi_{\text{Co}} \cdot 10^6 = -6.$$

Il saggio ossidimetrico venne eseguito facendo agire una soluzione contenente circa 5 millimol/litro di complesso su quella di KMnO_4 11/100, a circa 70°,

acidulata con ac. solforico. I risultati ottenuti corrispondono a $1,98 \div 2$ equiv. di ossigeno per 2 Co.

b) $K_4[(CN)_8Co_2(NO_2)_2] \cdot 2 H_2O$. - La soluzione acquosa di nitrito potassico, 4 mol/l Co, contenente acetato di potassio 4 mol/l Co, viene saturata a 0° con HCN, dopo avere eliminato l'aria con azoto. Dopo circa 2 ore si aggiunge a gocce una soluzione acquosa concentrata di acetato di cobalto, sempre sotto agitazione e corrente di HCN. Dalla soluzione di colore rosso vinoso intenso, l'alcool precipita il sale rosa che viene ulteriormente purificato da acqua e alcool. Il complesso, diamagnetico, essiccato su acido solforico e potassa, ha dato alle analisi e alle misure magnetiche i valori qui sotto riportati:

trov. %	Co 18,96;	K 24,95;	C 16,25;	N 22,76;	NO 9,07;	H 0,85
per $K_4[(CN)_4Co_2(NO_2)_2] \cdot 2 H_2O$ calc. %	Co 19,34	K 25,54	C 15,75	N 22,94	No 9,84	H 0,66

$\chi_{Co} \cdot 10^6 = -27$.

I risultati ossidimetrici ottenuti corrispondono a 3,8 equiv. di ossigeno per 2 Co.

Fisiologia. — *Sulla relazione tra frequenza di stimolo e fatica nella placca neuromotrice* (*). Nota di LOUIS L. BOYARSKY (**), presentata (***) dal Socio R. MARGARIA.

La teoria della trasmissione chimica dell'impulso nervoso nella placca neuromuscolare è ormai confermata da numerose prove sperimentali⁽¹⁾. Sebbene molto sia noto sulla reazione della sostanza chimica che viene liberata a livello della placca neuromuscolare (*trasmettitore*), è ancora poco chiaro il meccanismo di sintesi e liberazione del trasmettitore chimico. Una teoria su questo argomento suffragata da qualche prova sperimentale viene presentata in questo articolo.

Supponiamo a) che il trasmettitore sia sintetizzato da una sostanza chimica preesistente nelle terminazioni nervose (*precursore*) la cui concentrazione sia X: la velocità di sintesi del trasmettitore sarà allora kX , dove k è una costante di velocità.

b) Questa sostanza diffonderà attraverso la membrana della terminazione nervosa, l'interstizio neuromuscolare e la membrana cellulare muscolare, verso il muscolo.

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia Umana dell'Università di Milano.

(**) Fulbright Research Scholar alla Università di Milano.

(***) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) J. C. ECCLES, *The Neurophysiological Basis of Mind*, Oxford, 1953.

c) Ad ogni impulso nervoso, la quantità di trasmettitore che arriva al muscolo sia Q : essendo f la frequenza degli stimoli per sec, la quantità totale diffusa per sec sarà fQ .

d) La concentrazione del trasmettitore a livello della membrana Y , dipenderà da un equilibrio tra la quantità di trasmettitore che giunge dalla terminazione nervosa e la quantità che esce verso il muscolo, e cioè:

$$(1) \quad \frac{dY}{dt} = kX - fQ.$$

Partendo dal presupposto che la concentrazione del precursore sia costante, che sia costante anche la quantità di trasmettitore liberata per impulso Q a una determinata frequenza che viene mantenuta costante, l'integrazione della (1) conduce alla

$$(2) \quad Y = Y^0 + (kX - fQ)t$$

dove Y^0 è l'ammontare del trasmettitore residuo all'inizio dello stimolo.

Supponiamo che quando la concentrazione di Y diminuisce fino a raggiungere un valore critico Y' insufficiente a provocare la contrazione, l'altezza della contrazione del muscolo «in toto» diminuirà in misura corrispondente al numero delle fibre nelle quali Y è sceso al valore Y' : sia t_f il tempo impiegato per ridurre alla metà il numero delle fibre attive, che è presumibilmente proporzionale all'ampiezza del potenziale d'azione: t_f è quindi il tempo impiegato dal muscolo che si contrae ad una frequenza stabilita per ridurre alla metà del valore iniziale il potenziale di azione. Al tempo t_f allora la relazione (2) può essere scritta:

$$(3) \quad t_f = \frac{Y' - Y^0}{kX} + \frac{Q}{kX} f t_f.$$

Il rapporto tra $f t_f$ (numero di impulsi necessari per produrre la fatica nel tempo t_f) e il tempo di fatica t_f è cioè espresso da una relazione lineare; l'inclinazione della retta, data da Q/kX esprime la frequenza limite al di sotto della quale non interviene fatica, perché liberazione e sintesi del trasmettitore avvengono con eguale velocità. Questo d'altra parte può essere dedotto dalla formula (1) poiché in tali condizioni limite nelle quali tutto il trasmettitore formato passa al muscolo, la sua concentrazione a livello della membrana non varia e cioè $(dY/dt) = 0$: in tali condizioni è effettivamente

$$f = \frac{kX}{Q}.$$

La validità di questa ipotesi è stata sottoposta a vaglio sperimentale sull'animale. Rane e conigli vennero anestetizzati con etere e decerebrati: il nervo sciatico fu poi isolato. I potenziali di azione dal gastrocnemio furono registrati con un amplificatore in corrente continua e il nervo sciatico era stimolato con uno stimolatore con uscita in radio-frequenza, usando un impulso della durata di 250 microsecondi. Il tempo di fatica considerato (t_f) è uguale al tempo necessario ai potenziali d'azione per ridursi alla metà della loro ampiezza iniziale.

Nella fig. 1 sono rappresentati i risultati corrispondenti a due esperimenti sul coniglio. La relazione tra t_f e $f t_f$ risulta lineare su una vasta zona di frequenze, da 15 a 50 per sec. A frequenze di stimolazione al di sopra di 50/sec, corrispondenti a valori di ascissa di 900, la curva non è più lineare. L'inclinazione della parte rettilinea della curva corrisponde ad una frequenza di stimolazione di 10/sec, e questa è ovviamente la frequenza massima alla quale il muscolo può essere stimolato senza che intervenga la fatica.

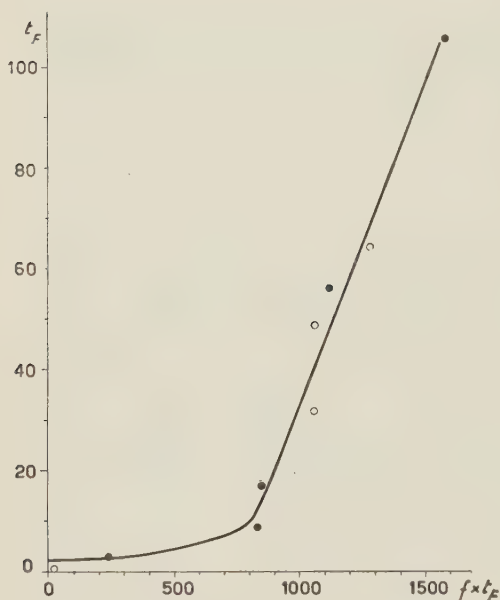


Fig. 1. - Relazione tra frequenza di stimoli ($f t_f$) necessari a produrre fatica nella placca neuromuscolare del coniglio nel tempo t_f .

I cerchi vuoti e i cerchi pieni rappresentano 2 differenti animali.
Tempo t_f in secondi.

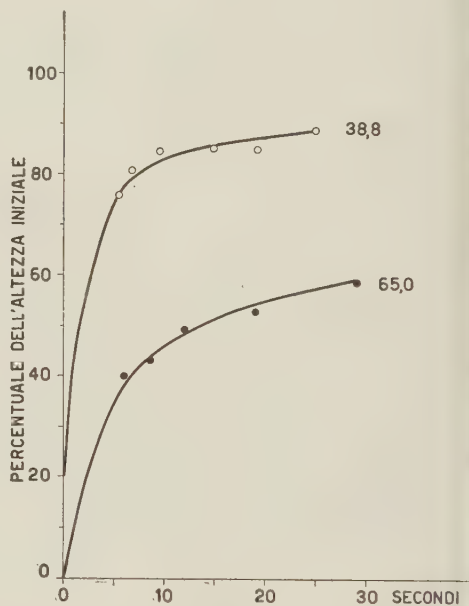


Fig. 2. - Curva di recupero del gastrocnemio del coniglio in seguito a due differenti periodi di stimolazione di 38,8 e 65 secondi entrambi a 40/sec.

Lo stimolo è dato da una scossa semplice.

Sono stati ottenuti risultati qualitativamente simili per il gastrocnemio della rana, ma il valore di frequenza minima alla quale la curva cessa di avere un andamento lineare è di 20/sec, anziché 50/sec; anche la pendenza della curva corrisponde ad una frequenza limite di soli 3/sec, anziché 10/sec. La placca motrice della rana cioè si stanca più rapidamente alla stessa frequenza; questo è dimostrato anche dal fatto che ad una frequenza di stimolazione di 20/sec, il muscolo di rana giunge alla condizione di fatica, quale è stata definita precedentemente in 5 sec, quello di coniglio in 50.

Col cessare dell'attività del muscolo, inizia il ristoro che ha luogo secondo un andamento caratteristico che varia a seconda dell'entità della fatica.

La figura 2 illustra il tipo di curva di recupero ottenuta nel coniglio in seguito a due differenti periodi di stimolazione, di 38,8 secondi e di 65 secondi: più lunga è la durata della stimolazione, più lungo appare essere

il tempo necessario per il recupero. In entrambi gli esperimenti della fig. 2, il periodo di stimolazione era stato protratto fino a riduzione quasi a zero delle risposte. Il più lento ristoro del muscolo stimolato per 65 sec può essere interpretato supponendo che la placca motrice liberasse ugualmente il trasmettitore come effetto della stimolazione, ma in quantità inefficace, poiché nessuna fibra si contraeva più.

La flessione della curva della fig. 1 a frequenze superiori a 50/sec per i conigli e a 20/sec per le rane può essere considerata come un cambiamento di una o più delle componenti del fattore Q/kX . È improbabile che vari la concentrazione del precursore X o della velocità della liberazione di esso: è piuttosto più verosimile che a più alte frequenze di stimolazione diminuisca il trasmettitore liberato Q che raggiunge il muscolo.

Recentemente sono state trovate frequenze critiche simili di 10 per lo stato di equilibrio e 50 per secondo per la frequenza massima, nella preparazione del diaframma di topo ⁽²⁾.

Questi risultati sperimentali sono stati interpretati alla luce della teoria chimica. Le frequenze di stato trovate in questi esperimenti, sebbene basse, non sono inaspettate. Vi sono molto indizi in base ai quali 10/sec è una frequenza fondamentale nel sistema nervoso dei mammiferi ⁽³⁾. Questi esperimenti suggeriscono che la limitazione fondamentale nello schema regolatorio totale è metabolico, e che l'organismo è limitato dalla sua capacità di sintetizzare il trasmettitore a velocità superiori a 10/sec.

Fisiologia. — *L'esistenza di un limite di frequenza nel passaggio di impulsi attraverso le sinapsi* ^(*). Nota di LOUIS L. BOYARSKY ^(**) e LILA H. BOYARSKY, presentata ^(***) dal Socio R. MARGARIA.

L'attività afferente nel sistema nervoso centrale è costituita da impulsi la cui stazione di origine sono i recettori periferici che scaricano con un ritmo relativamente elevato, di 20-500 per sec in rapporto alla natura e all'intensità dello stimolo ⁽¹⁾. È ben noto fin dalle classiche ricerche di Sherrington sui riflessi spinali ⁽²⁾ che il sistema nervoso centrale manifesta fenomeni di fatica a livello delle sinapsi spinali, e che l'attività riflessa centrale, originata da stimoli di natura fisiologica cioè asincroni, non è di lunga durata.

(2) K. KRNEVIC and R. MILEDI, « J. Physiology », 140, 440-461 (1958).

(3) T. GUALTIEROTTI and E. MILLA, « Pflüger Archiv. », 245, 424-436 (1942).

(4) R. MARGARIA, « Arch. Neerl. Physiol. », XXVIII, 399-407 (1946).

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(**) Fulbright Fellow.

(***) Nella seduta del 10 giugno 1958.

(1) E. D. ADRIAN, *The mechanism of nervous action*, Philadelphia, 1932.

(2) C. S. SHERRINGTON, *The integrative action of the nervous system*, Cambridge, 1947.

Recentemente si è osservata depressione dei riflessi monosinaptici con frequenze di stimolazione non superiori a 3 per minuto ⁽³⁾.

Poiché le informazioni sensoriali che raggiungono i centri con un'alta frequenza, quali ad esempio quelle acustiche, possono essere percepite per lunghi periodi, è possibile che nel sistema nervoso centrale esista qualche meccanismo che impedisca la fatica. A questo proposito occorre osservare che, a quanto ci risulta, non è ancora stata studiata sistematicamente la fatica sinaptica al di sopra del livello spinale. In base alla teoria chimica della funzione sinaptica è presumibile che esistano frequenze limite al di sopra delle quali la fatica si manifesta.

Questo problema è stato affrontato studiando l'influenza della frequenza dello stimolo sulla entità della risposta, in tre differenti preparazioni che implicavano un circuito nervoso centrale: *a*) la risposta riflessa nel coniglio, un riflesso polisinaptico a sede spinale; *b*) la risposta primaria della corteccia sensitiva del gatto alla stimolazione del nervo radiale; e *c*) la risposta primaria della corteccia acustica del gatto a una serie di brevi stimoli sonori.

Per ottenere il riflesso spinale nel coniglio si è tagliato trasversalmente il midollo spinale all'altezza T 1-2, e venne esposto e stimolato il nervo della sura; dal quadricipite femorale venivano registrati i potenziali d'azione muscolari. La risposta primaria della corteccia per le stimolazioni in *b*) e *c*) era registrata dall'area sensitiva o rispettivamente acustica (area 2) della corteccia nel gatto profondamente narcotizzato con Nembutal (50 mg per Kg). Gli stimoli sonori brevi (*clicks*) erano convogliati all'orecchio controlaterale per mezzo di un tubo di politene da una cuffia radiofonica, per impedire vibrazioni sovrapposte. I potenziali muscolari e corticali venivano registrati per mezzo di un amplificatore in collegamento diretto e tubo a raggi catodici. La stimolazione elettrica consisteva in un impulso singolo della durata di 250 microsec applicato al nervo attraverso un'uscita in radio-frequenza.

RIFLESSO SPINALE.

Un singolo impulso elettrico applicato al capo centrale del nervo surale produce in un primo tempo una scarica sincrona (primaria) corrispondente alla contrazione rapida del muscolo, seguita da una scarica postuma prolungata. La fig. 1 *A* mostra i potenziali d'azione ottenuti con stimolazione a bassa frequenza (1 al secondo). La latenza centrale risulta essere 4 msec. La scarica postuma può durare per 2-3 decimi di secondo. A frequenza inferiore a 5-6 per secondo sia la risposta primaria che la scarica postuma seguente il secondo o terzo impulso di una serie continua appaiono di ampiezza aumentata.

Se si aumenta la frequenza della stimolazione da 4 a 10 al secondo si osserva rapidamente fatica sia nella risposta primaria che secondaria. La

(3) D. P. C. LLOYD, « J. gen. Physiol. », 40, 435 (1951).

risposta primaria però appare più resistente alla fatica mantenendo la propria ampiezza invariata per un periodo più lungo. Ciò è evidente dalla fig. 1 *A* dove la stimolazione a 10 per secondo fu continuata per 41 secondi iniziando dal tempo zero.

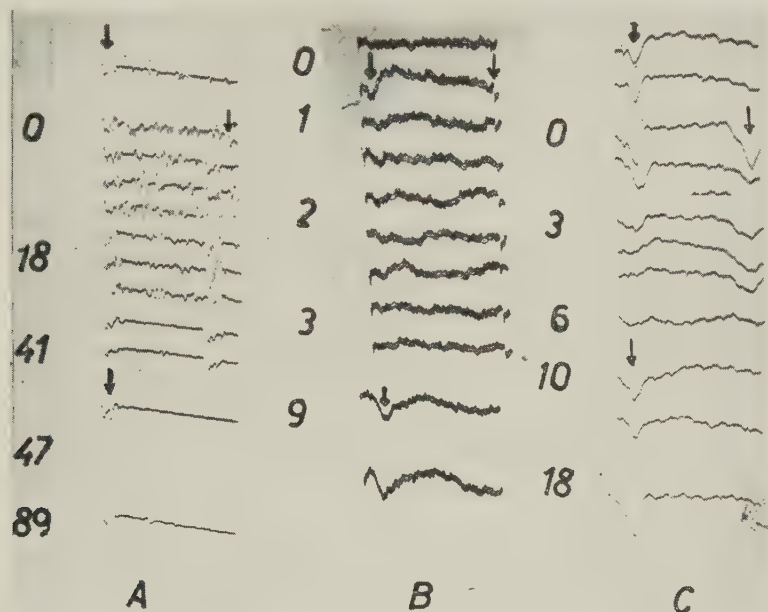


Fig. 1.

A - Gatto spinale (taglio subito sopra l'intumescenza lombare). Risposta elettrica riflessa del muscolo quadricipite del femore alla stimolazione elettrica del nervo della sura.

Il primo tracciato in alto corrisponde alla risposta ad una stimolazione alla frequenza di 1/sec. Da 0 a 41 sec la frequenza dello stimolo elettrico è portata a 10 al sec.

Da 41 sec in poi la stimolazione è di nuovo 1/sec: la prima risposta primaria ha luogo a 47 sec. L'inizio del ripristino della scarica secondaria ha luogo a 89 sec.

B - Gatto in profonda narcosi da nembutal. Risposta dell'area sensitiva della corteccia ad una stimolazione del capo centrale del nervo radiale, frequenza 10/sec. La stimolazione inizia al tempo 0 e continua per 7 secondi. A 9 secondi si riprende la stimolazione con frequenza 1/sec. Il ripristino della risposta è immediato.

C - Risposte elettriche dell'area acustica a *clicks* sonori, nel gatto narcotizzato come in *B*. Primo tracciato in alto: frequenza della stimolazione 1/sec. Dal tempo 0 a 6 sec dopo la frequenza è portata a 13/sec. A 6 sec vi è completa fatica. A 10 sec dal tempo 0 si riprende la stimolazione con frequenza 1/sec. Il ripristino della risposta è immediato.

Le risposte primarie sono indicate da frecce in tutti i tracciati. I numeri a sinistra corrispondono al tempo in sec dal tempo 0. Asse dei tempi = 150 msec.

Per studiare il decorso del ristoro venivano applicati singoli stimoli che si succedevano a intervalli vari di 1-4 sec. Nella fig. 1 *A* si osserva che un completo ristoro della risposta primaria si ottiene dopo circa 89 sec; il ripristino completo della risposta secondaria richiede alcuni minuti.

Con una frequenza di stimolazione di meno di 4 al secondo, non si osserva fatica, ma sempre si registra una risposta primaria di grande ampiezza. In generale la curva della fatica e la cinetica del ristoro nella fatica sinaptica

rilevata studiando la contrazione rapida riflessa sono simili a quelle caratteristiche della fatica nella placca neuromuscolare; se ne differenziano sostanzialmente perché nel caso del riflesso spinale la fatica ha luogo a una frequenza generalmente inferiore (meno di 10 per sec anziché 10-15).

La fatica sinaptica non è dovuta alla presenza del periodo refrattario assoluto che è stato determinato essere in questo sistema dell'ordine di 30 msec, corrispondente ad una frequenza di 33 per sec. È più probabile che la fatica, che interviene a così bassa frequenza di passaggio di impulsi, sia invece da imputare all'esaurimento della sostanza chimica trasmittente alle terminazioni nervose.

RISPOSTE ALLA STIMOLAZIONE SENSITIVA.

La fig. 1 *B* è il grafico della risposta della corteccia sensitiva: tale risposta è superficie-positiva con una latenza di 10 msec. Stimolando con frequenze basse, fino anche a 1 per sec, la risposta corticale si abbassa dapprima per mantenersi in seguito a un livello costante: questo abbassamento iniziale non è da noi considerato come fatica, ma come un fenomeno di adattamento. Con una frequenza di stimolazione di 10 per secondo si ottiene una assai rapida scomparsa della risposta corticale. La differenza fondamentale dalla fatica nella contrazione riflessa spinale è il rapidissimo ristoro, che ha luogo dopo un periodo di soli 1-2 secondi. La soppressione della risposta in questo sistema sensitivo ha luogo di norma a frequenze anche inferiori a 10 per sec, fino a 5-6 per sec. Se si usa una frequenza di 20-30 per secondo si ottengono soltanto 1-2 risposte corticali seguite da completo silenzio elettrico per l'intera durata del periodo di stimolazione. Alla fine della stimolazione però il ripristino della risposta è praticamente immediato. Tale soppressione di risposta ad alta frequenza assomiglia all'inibizione di Wedensky della placca motrice neuromuscolare. Ciò contrasta con i risultati di altri Autori ⁽⁴⁾ che hanno visto risposte corticali seguire stimoli anche a frequenza molto alta.

La risposta della corteccia acustica ad una serie di stimoli sonori brevi è simile a quella registrata nella corteccia sensitiva per stimolazione del nervo radiale. Com'è noto, la risposta acustica è superficie-positiva con una certa latenza. Tali risposte sono state registrate dalla parte mediana della circonvoluzione ectosilviana dove esse sono particolarmente ampie. In questo sistema si ha fatica con una frequenza dei *clicks* corrispondente a circa 10-15 per sec. La fig. 1 *C* riproduce la risposta ottenuta ad una frequenza di stimolo di 13 per sec. La fatica, come nel sistema della corteccia sensitiva corrispondente alla stimolazione del nervo radiale, è rapida, e alla frequenza summenzionata ha luogo in 6 secondi. Quattro secondi dopo la completa soppressione della risposta, *clicks* isolati producono una risposta primaria della stessa ampiezza che si otteneva prima della fatica.

(4) R. S. MORISON e E. W. DEMPSEY, « Am. J. Physiol. », 135, 281 (1942).

Con basse frequenze di stimolazione acustica si osserva che l'ampiezza della risposta corticale non è rigorosamente costante, ma è soggetta a lente e ritmiche variazioni aventi un periodo di circa 10 secondi.

Considerando che la stricnina presenta l'effetto caratteristico di rimuovere l'inibizione a livello centrale, sono stati eseguiti alcuni esperimenti applicando localmente sulla corteccia questo farmaco (concentrazione 1%), e rilevando le risposte corticali sensitive e acustiche a varia frequenza di stimolazione. Dopo ogni stimolo si ottengono ampie onde stricniche, ma la fatica interviene alla stessa frequenza di stimolazione che nel normale, ed il ristoro è altrettanto rapido. L'applicazione di stricnina sulla corteccia inoltre non produce mai un allungamento della risposta sensitiva.

Tutti e tre i sistemi qui studiati indicano che i centri vanno soggetti ad esaurimento quando ad essi giungano impulsi a frequenze relativamente basse dell'ordine di circa 10/sec. È importante stabilire ancora che questi risultati sono in accordo con altri ottenuti in questo Laboratorio che dimostrano che le scariche dell'unità neuromotrice nell'attività muscolare volontaria avvengono a frequenze comprese tra 10 e 15 al secondo e che frequenze più alte si osservano solo per brevissimi periodi ⁽⁵⁾.

La risposta dei motoneuroni spinali alla stimolazione usata in questi esperimenti ha le caratteristiche di un riflesso multisinaptico. Il sistema qui studiato si comporta come se alle terminazioni nervose la liberazione della sostanza trasmittente si esaurisse a frequenze alte: perciò anche il ristoro risulta essere un processo piuttosto lungo. La relativa facilità di affaticamento delle scariche postume si può spiegare considerando la presenza di lunghi circuiti riverberanti implicanti molti interneuroni che hanno fattori di difesa più bassi dei motoneuroni spinali.

Il rapido ristoro riscontrato nei sistemi corticali suggerisce l'ipotesi che l'esaurimento manifestatosi in questi sistemi non è tanto il risultato di una diminuzione di una sostanza trasmittente nelle terminazioni presinaptiche, ma di qualche modificazione di tipo fisico alle terminazioni nervose che impedisce la liberazione di un agente chimico trasmittente. Questo effetto potrebbe essere legato a un prevalere dei fenomeni di inibizione attiva su quelli eccitatori a queste frequenze, oppure potrebbe essere il risultato di un'azione diretta di una stimolazione ritmica prolungata sulle terminazioni nervose.

Il comparire della fatica a frequenze assai inferiori di quelle secondo le quali scaricano i recettori periferici, fa nascere il problema se sia possibile studiare in dettaglio la trasmissione degli impulsi attraverso il sistema afferente per mezzo di stimolazioni sincrone di tutte le fibre afferenti quale è stato usato in questa ricerca.

La principale caratteristica della stimolazione fisiologica è che neppure due fibre afferenti sono sede di attività in fase. È possibile che il sistema

(5) T. GUALTIEROTTI, D. SPINELLI e A. FIORENTINI, questi « Rendiconti », questo numero.

nervoso centrale si sottragga al fenomeno della fatica mediante un sistema attraverso il quale determinati interneuroni sono eccitati soltanto quando siano raggiunti da due impulsi presinaptici in fase. Ciò significherebbe che se in una fibra avviene una scarica di impulsi alla frequenza di 100 per sec e in un'altra una di 110 per sec, gli impulsi nell'una e nell'altra sarebbero in fase 10 volte al secondo. Ed ecco quindi il meccanismo attraverso cui il sistema sensitivo può sfuggire alla fatica sinaptica nonostante l'alta frequenza delle scariche dei recettori periferici. Sono in corso esperimenti per studiare tale possibilità. Risultati preliminari sembrano appoggiare tale ipotesi, poiché è stato possibile abolire parzialmente il fenomeno della fatica stimolando simultaneamente fibre differenti con differenti frequenze capaci ciascuna di produrre fatica, sì che l'eccitazione di centri riflessi a cui tale attività afferente convergeva rispondevano soltanto quando gli stimoli erano in fase.

Fisiologia. — *Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano.* — III. *Movimenti passivi e peristalsi* (*). Nota di LUIGI TURANO, ALFREDO CURATOLO e ENZO SALOMONI, presentata (**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

In considerazione delle numerose controversie ancora esistenti al riguardo della motilità esofagea e con l'intento di contribuire a migliorarne la conoscenza, abbiamo realizzato una nuova tecnica di indagine già descritta con una precedente Nota ⁽¹⁾, alla quale rimandiamo per ogni dettaglio.

Seguendo la citata tecnica abbiamo studiato la motilità esofagea mediante la registrazione meccanografica derivata da tre diversi livelli esofagei simultaneamente, mentre alternativamente ciascuno dei tre livelli veniva osservato radiosopicamente e, quando richiesto dall'interesse degli eventi in corso, registrato mediante la roentgencinematografia opportunamente sincronizzata con la registrazione meccanografica.

La nostra indagine è stata condotta su 50 soggetti umani, comunque esenti da affezioni o sintomi a carico dell'apparato digerente.

Con il controllo radioscopico e soprattutto con la registrazione roentgencinematografica ogni evento dinamico graficamente rilevato era integrato dalla visualizzazione sempre riproducibile del corrispondente evento cinetico, con il vantaggio di una esattezza di valutazione e di interpretazione fino ad ora non consentita.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Radiologia dell'Università di Roma e presso l'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) L. TURANO, A. CURATOLO, E. SALOMONI, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 4, pp. 449-456 (1958).

In tali condizioni è stato agevole studiare la motilità attiva e passiva dell'esofago. E tenendo conto che come *peristalsi* si deve esplicitamente e soltanto intendere l'attività motoria fasica e coordinata di organi cavi a parete muscolare, in cui onde di contrazione circolare, precedute ciascuna da una onda di inibizione, si propagano polarmente col fine di assicurarne la progressione del contenuto in una determinata direzione, è apparso evidente che l'esofago possiede oltre alla *motilità peristaltica* una motilità attiva segmentale del tutto distinta dalla peristalsi. Cosicché tutti gli eventi motori esofagei incontrati ci sono apparsi classificabili secondo il seguente schema:

MOVIMENTI DELL'ESOFAGO.

I. Movimenti passivi:

- A) Movimenti trasmessi dall'app. cardiovascolare;
- B) Movimenti trasmessi dall'app. respiratorio;
- C) Movimenti trasmessi dal laringe (elevaz. deglutitoria).

II. Movimenti attivi:

- A) Movimenti peristaltici $\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Peristalsi primaria} \\ b) \text{ Peristalsi secondaria.} \end{array} \right.$
- B) Movimenti non peristaltici $\left\{ \begin{array}{l} a) \text{ Attività fasica} \\ b) \text{ Attività tonica} \\ c) \text{ Attività tonico-fasica.} \end{array} \right.$

Nella presente Nota, a parte una breve analisi dei movimenti passivi, riportiamo solo i risultati relativi allo studio della peristalsi, mentre rimandiamo ad una successiva Nota quelli relativi alla motilità non peristaltica dell'esofago.

I. *Movimenti passivi.*

Dei movimenti passivi, quelli trasmessi dall'apparato cardiovascolare sono di piccolissima entità. Sono più agevolmente riconoscibili all'ispezione radioscopica e mediante la roentgencinematografia specialmente dove l'esofago ha più intimi rapporti di vicinanza con il cuore e con i grossi vasi. Difficilmente si rilevano invece per mezzo della registrazione meccanografica, salvo casi di particolare concitazione cardiaca (fig. 1).

Anche i movimenti trasmessi dall'apparato respiratorio non sono di entità importante, almeno nella respirazione tranquilla. Il normale tono parietale dell'esofago attutisce notevolmente le ripercussioni intraesofagee nelle variazioni pressorie intratoraciche connesse con la respirazione. Tali variazioni sono appena risentite nel lume esofageo, salvo in vicinanza del diaframma dove risultano ovviamente evidenti, oppure durante la respi-

razione profonda e sotto i colpi di tosse. Ad ogni modo questi eventi passivi difficilmente possono mascherare l'attività propria dell'esofago, specialmente se contemporaneamente ai tracciati meccanografici dell'esofago si registra anche il tracciato pneumografico (fig. 2).

MOVIMENTI PASSIVI.

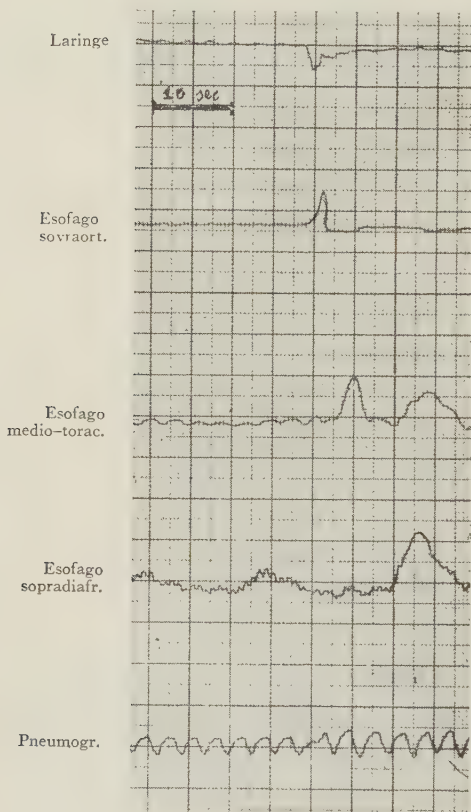


Fig. 1. - A livello dell'esploratore distale il tracciato registra piccole oscillazioni la cui frequenza ne rivela l'origine cardiovascolare.

Sono anche riconoscibili a livello degli esploratori medio e distale altre oscillazioni sincrone coi movimenti respiratori.

MOVIMENTI PASSIVI.

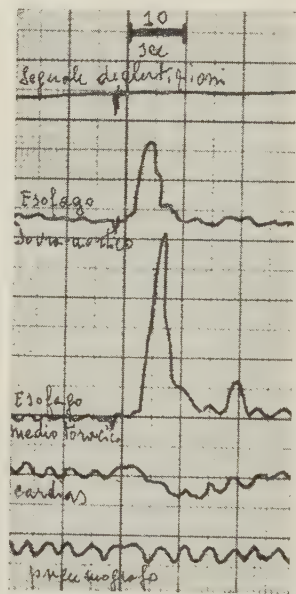


Fig. 2. - Oltre alle oscillazioni respiratorie evidenti a tutti i livelli esplorati, i tracciati relativi all'esofago sopraortico e medio toracico descrivono una piccola e rapida deflessione, sincrona con l'atto deglutitorio.

Tra i movimenti passivi dell'esofago meritano di essere considerati a parte quelli trasmessi dal laringe ad ogni atto deglutitorio. Anche l'esofago subisce allora una brusca trazione verso l'alto, che, per quanto incostantemente, può essere rilevata nel corso della registrazione meccanografica come una piccola e rapida deflessione negativa. Questa nel tracciato precede l'onda di contrazione peristaltica che segue alla deglutizione e la precede tanto più da vicino quanto più prossimale è il livello esofageo dal quale viene derivato il tracciato meccanografico (fig. 2). Infatti la trazione deglutitoria

investe l'esofago per tutta la sua estensione simultaneamente ed è sincrona con l'elevazione deglutitoria del laringe, mentre l'onda peristaltica che fa seguito alla deglutizione si propaga progressivamente ai sottostanti livelli dell'esofago percorrendolo per intero in una durata di 4-6 secondi o più, a seconda della densità del bolo e dei diversi soggetti in esame.

La trazione deglutitoria dell'esofago, che alla registrazione meccanografica si rileva non costantemente e quasi mai nell'esofago distale, risulta invece sempre e chiaramente apprezzabile sotto l'osservazione radioscopica e roentgencinematografica. Viene in tal modo chiarita definitivamente ed inconfutabilmente l'origine del corrispondente incidente grafico che può precedere il tracciato di un'onda peristaltica post-deglutitoria e che evidentemente segnala appunto il verificarsi di un atto deglutitorio.

La peristalsi esofagea. — Sia perché i grafici e le figure qui riportate illustrano già sufficientemente i risultati delle nostre ricerche, sia per amore di brevità, ci limitiamo nella presente esposizione a sottolineare i dati che si riferiscono a fenomeni ancora oscuri o controversi.

A seguito delle fondamentali ricerche di Meltzer ^(2,3) sembrava universalmente accertata la distinzione della peristalsi esofagea in due forme: la peristalsi primaria e quella secondaria. Queste differiscono tra loro soprattutto per il fatto che la primaria consegue sempre ad un atto di deglutizione che la scatena attraverso afferenze provenienti da ricettori oro-faringei, mentre la secondaria o extradeglutitoria, che insorge in assenza di atti deglutitori, si produce per afferenze provenienti da ricettori situati lungo le pareti stesse dell'esofago. Tuttavia recentemente, un autorevole studioso dell'argomento, Nemours-Auguste ⁽⁴⁾, riferisce di non essere mai riuscito a documentare l'esistenza della peristalsi secondaria affermando che ogni evento peristaltico esofageo fa seguito ad un atto di deglutizione.

A questo riguardo i risultati delle nostre osservazioni meccanografiche (eseguite con un poligrafo di cui una penna, destinata a segnalare ogni atto di deglutizione, era collegata con il laringe) non concordano con le affermazioni di Nemours-Auguste, mentre confermano irrefutabilmente la possibilità che insorgano, senza essere precedute da alcun atto deglutitorio e da qualsiasi livello esofageo, eventi peristaltici i quali si propagano lungo l'esofago verso il suo estremo distale.

Le figure 3 e 4 dimostrano chiaramente tali eventi peristaltici di tipo secondario ad insorgenza spontanea e capaci di propagazione coordinata sino all'estremo cardiaco. Sono onde peristaltiche talvolta isolate, talvolta anticipanti un evento peristaltico primario o post-deglutitorio (fig. 5).

(2) S. J. MELTZER, « Zbl. Physiol. », 19, 933 (1905).

(3) S. J. MELTZER, « Proc. Soc. Exper. Biol. e Med. », 4, 35 (1905 (A)).

(4) M. NEMOURS-AUGUSTE, « Journées des Gastroenterologies Franç. », Paris, 15, VI, 1951; suppl. « Arch. Mal. App. Digestif ».

L'origine da afferenze provenienti da ricettori intraesofagei è stata altresì confermata dal fatto che tali onde peristaltiche secondarie possono essere evocate in seguito a stimolazione locale. Infatti, quando il soggetto in esperimento è invitato a non compiere alcun atto di deglutizione, la brusca insufflazione di un palloncino nel lume esofageo determina l'insorgenza di peristalsi secondaria (fig. 5).



Fig. 3. - Registrazione grafica dell'attività esofagea con peristalsi primaria «post deglutitoria» e peristalsi secondaria (s).

Notare la detensione del cardia in rapporto con gli eventi peristaltici sia primari che secondari.

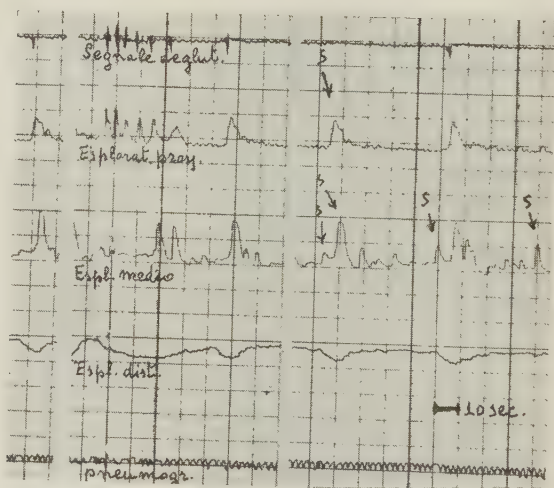


Fig. 4. - Inibizione dell'esofago a valle dell'evento peristaltico (ved. testo).

Notare altresì gli eventi peristaltici secondari (s) e la loro influenza sul comportamento del cardia.

A questo riguardo abbiamo potuto dimostrare altresì che in seguito alla stimolazione la peristalsi secondaria non insorge al livello stesso della stimolazione ma ad un livello situato sino a 10 cm. più a monte (fig. 6).

La roentgencinematografia conferma e chiarisce ulteriormente i dati rilevati mediante la registrazione meccanografica. La trazione deglutitoria che del resto accompagna sempre l'atto deglutitorio non è visibile quando la peristalsi insorge nell'esofago, in uno qualsiasi dei suoi livelli, quando cioè non segue ad un atto di deglutizione ed è pertanto classificabile come secondaria. Non solo, ma dimostra altresì che gli eventi peristaltici secondari propagandosi verso l'esofago distale dimostrano buona efficienza, sufficiente ad assicurare il progresso verso lo stomaco, attraverso il cardia, di eventuali residui sfuggiti ad una precedente peristalsi primaria o post-deglutitoria.

Fenomeni inibitori connessi con la peristalsi. — Al riguardo dei rapporti tra faringe ed esofago, i numerosi ricercatori che se ne sono occupati affermano concordemente che l'atto deglutitorio ripetuto a troppo breve intervallo da uno precedente inibisce la risposta peristaltica dell'esofago. Sicché, si afferma, verificandosi un treno di deglutizioni, soltanto l'ultimo atto deglutitorio ha la possibilità di iniziare l'evento peristaltico. L'esofago risulterebbe inibito dall'attività deglutitoria protratta del faringe e solo al cessare

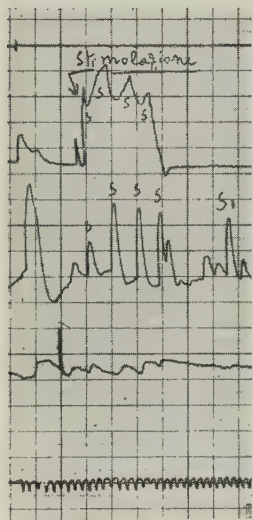


Fig. 5. — Peristalsi secondaria da stimolazione (s), e spontanea (s1).



Fig. 6. — Peristalsi secondaria da stimolazione, a livello medio.

Notare l'insorgenza a monte (10 cm. più in alto) delle contrazioni secondarie provocate (s).

di tale attività faringea avrebbe inizio l'attività peristaltica dell'esofago⁽⁵⁾ in altri termini esisterebbe un riflesso di inibizione faringo-esofageo.

Ma a questo riguardo le nostre esperienze ci hanno fatto pervenire a risultati del tutto diversi. A noi è risultato infatti che ogni atto deglutitorio, qualunque ne sia la frequenza, determina sempre l'entrata in attività peristaltica dell'esofago e dopo ogni deglutizione inizia nell'esofago un'onda peristaltica. Ciò che si verifica, in realtà, dopo un treno di atti deglutitori ravvicinati è che ciascuna onda peristaltica conseguente viene raggiunta lungo il suo decorso dall'effetto inibitore della successiva che la risolve in nulla.

L'esempio che la fig. 4 riproduce dimostra ciò molto chiaramente: a seguito di un atto deglutitorio isolato, sorge dall'esofago prossimale un'onda

(5) S. J. MELTZER, « *Exper. Med.* », 2, 453 (1897).

peristaltica che impiega 1-2 sec. per raggiungere il più prossimale dei tre palloncini esploratori e 5 sec. circa per raggiungere il successivo palloncino intra-esofageo; a seguito invece di un treno di deglutizioni ripetute ad intervalli di 4 sec. l'uno dall'altro, gli eventi peristaltici che conseguono a ciascun atto deglutitorio pervengono tutti al palloncino prossimale situato a 1-2 sec. di cammino, mentre al palloncino situato a 5 sec. di cammino non può che pervenire solo l'ultima onda della serie essendo stata ognuna delle precedenti già raggiunta dall'effetto inibitore risolutivo dell'onda successiva.

Appare così evidente che ciascuna di una serie ravvicinata di onde peristaltiche può avanzare verso l'esofago distale solo di tanto quanto lo consente la propria velocità di propagazione ed il tempo di insorgenza dell'onda successiva. Ed appare altresì evidente che non dal faringe, ma dall'esofago stesso si origina l'inibizione capace di interrompere un evento peristaltico in corso. Questi fatti inoltre parlano in favore della validità, anche per l'esofago, della legge di Bayliss-Starling dell'intestino.

Da quanto esposto emerge ancora la conclusione che *per tutta l'estensione dell'esofago non può verificarsi che un solo evento peristaltico alla volta in quanto l'insorgenza di ogni nuovo evento ne interrompe automaticamente ogni altro, eventualmente in corso nel rimanente esofago sottostante.*

All'inizio di ogni evento peristaltico, sia primario che secondario, anche il cardia si rilascia in modo caratteristico, come riportato in altra nostra Nota ⁽⁶⁾ dedicata allo studio dell'attività cardiaca. Tale rilasciamento cardiaco che può essere registrato meccanograficamente, si protrae per tutta la durata dell'onda stessa (figure 2, 3, 4).

A proposito dell'inibizione a valle di una contrazione peristaltica, la registrazione roentgencinematografica ha fornito elementi di altissimo valore dimostrativo e probatorio che la sola indagine meccanografica non avrebbe mai dato né potuto dare.

La figura 7 che riporta una sequenza roentgencinematografica ed il corrispondente tracciato meccanografico rilevato nel corso di un evento peristaltico a livello dell'esofago medio-toracico, costituisce un chiaro esempio. In corrispondenza dell'evento peristaltico il tracciato meccanografico descrive delle variazioni pressorie decorrenti in modo piuttosto semplice: dalla linea isobarica che denota lo stato di riposo dell'esofago descrive al passaggio dell'onda di contrazione una ascesa regolare fino ad un acme dal quale ridiscende alla linea isobarica denotando il ritorno del corrispondente segmento esofageo allo stato di riposo. Tutto in modo assai semplice senza alcun segno che lasci trapelare la reale complessità dell'evento peristaltico, come invece rivela l'esame della registrazione roentgencinematografica corrispondente allo stesso evento. Benché la serie fotografica dia solo una sommaria idea, essendo realizzata utilizzando 1 fotogramma ogni 9 della serie originale del film che era girato alla velocità di 18 fotogrammi al sec., tuttavia permette

(6) L. TURANO, A. CURATOLO, E. SALOMONI, questi « Rendiconti », vol. XXIV, fasc. 5, pp. 573-576 (1958).

di apprezzare importanti modificazioni del profilo esofageo rivelandone eventi dinamici e cinetici piuttosto complessi sui quali il corrispondente tracciato meccanografico è del tutto silente. Ancora prima che l'onda di contrazione pervenga nel tratto di esofago roentgencinematografato, vi si vedono comparire interessanti fenomeni: il viscere allenta il suo tono parie-

SEQUENZA ROENTGENCINEMATOGRAFICA (1 FOTOGRAMMA OGNI 9 DELL'ORIGINALE)
E CORRISPONDENTE MECCANOGRAMMA RELATIVO AD UN EVENTO PERISTALTICO

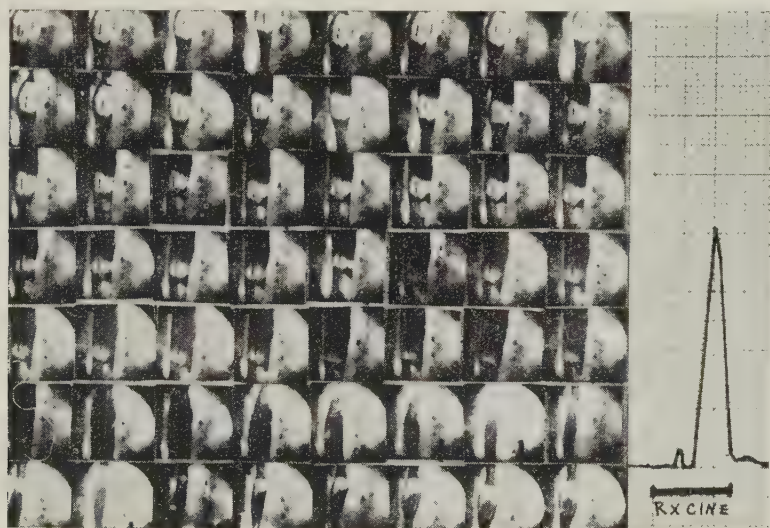


Fig. 7. - La serie dei fotogrammi è da leggersi da sinistra a destra e dall'alto in basso.

Le variazioni del profilo esofageo in rapporto all'attività dell'organo dimostrano l'evidente cedimento del tono parietale, senza osservabili modificazioni pressorie, immediatamente a valle dell'onda di contrazione.

tale ed ancor prima che vi giunga il materiale sospinto dalla contrazione a monte se ne vede aumentare il diametro (vedi anche al di sotto del palloncino esploratore) che con il sopraggiungere del bolo appare fino a 4-5 volte maggiore di quello iniziale. E tutto ciò senza che nel lume si verificino apprezzabili modificazioni pressorie, come rivela sia il tracciato meccanografico e sia il manometro a mercurio connesso col palloncino esploratore entrambi visibili nel campo roentgencinematografico.

L'indagine roentgencinematografica rivela chiaramente non solo l'inibizione della muscolatura parietale a valle della contrazione peristaltica, ma anche un ben graduato e progressivo rilasciamento delle pareti tale che nel lume da queste delimitato può pervenire una notevole massa di materiale senza modificarvi in modo significativo il regime pressorio (Rilasciamento recettivo).

Fisiologia. — *Regolazione del ritmo di scarica del motoneurone spinale per mezzo dell'inibizione antidromica di Renshaw* (*). Nota di TORQUATO GUALTIEROTTI, DOMENICO SPINELLI e ANNA FIORENTINI, presentata (**) dal Socio R. MARGARIA.

Precedenti ricerche (Gualtierotti e Milla, 1942) avevano dimostrato che il ritmo di scarica dei potenziali d'azione della fibra muscolare durante la contrazione isometrica volontaria era indipendente dalla tensione a cui era soggetto il muscolo e approssimativamente costante entro valori di 8-12 al secondo. La coincidenza di tale ritmo di scarica con alcune fondamentali frequenze del sistema nervoso centrale, quali ad esempio il ritmo α di Berger nella corteccia cerebrale, aveva condotto ad una teoria secondo la quale un ritmo di 8-12 al secondo è tipico dei neuroni effettori in tutto il sistema nervoso centrale (Margaria, 1946).

Una interpretazione del meccanismo che regola il ritmo di scarica del motoneurone è oggi possibile in seguito ai lavori di Renshaw (1941) e a quelli più recenti di Eccles e collaboratori (1954). Questi autori hanno descritto e studiato l'inibizione antidromica del motoneurone spinale: l'impulso motore che percorre il neurite del motoneurone si propaga ad un ramo ricorrente che si stacca a breve distanza dal corpo cellulare e stabilisce una sinapsi eccitatoria con una particolare cellula situata nel corno anteriore (cellula di Renshaw), la quale a sua volta scarica, attraverso una sinapsi inibitoria, sul motoneurone spinale.

Margaria, Gualtierotti e Spinelli (in corso di stampa) hanno potuto studiare nell'uomo le caratteristiche dell'inibizione antidromica di Renshaw in varie condizioni sperimentali. Il valore dell'inibizione antidromica veniva calcolato dal rapporto tra l'ampiezza della prima e della seconda risposta elettrica riflessa monosinaptica di un muscolo quando il suo nervo veniva stimolato con due singoli impulsi elettrici susseguentisi a intervallo variabile. Se il primo stimolo era sopramassimale, non veniva seguito da alcuna risposta riflessa poiché la stimolazione antidromica delle fibre motorie del nervo bloccava gli impulsi provenienti per la via degli afferenti: il secondo stimolo di intensità sottomassimale provocava invece una risposta motoria riflessa la cui ampiezza era considerata come indice dello stato di eccitabilità dei motoneuroni. Il valore dell'inibizione antidromica di Renshaw veniva ritenuto proporzionale alla riduzione dell'ampiezza della risposta riflessa rispetto a quella non condizionata da uno stimolo sopramassimale precedente. Diminuendo in modo continuo l'intervallo tra i due stimoli tra 100 e 50 msec

(*) Dal Laboratorio di Fisiologia dell'Università di Milano.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

l'ampiezza della risposta riflessa seguente il secondo stimolo diminuiva progressivamente fino ad annullarsi (fig. 1, *A B C* e diagramma a sinistra della fig. 2, in linea continua).

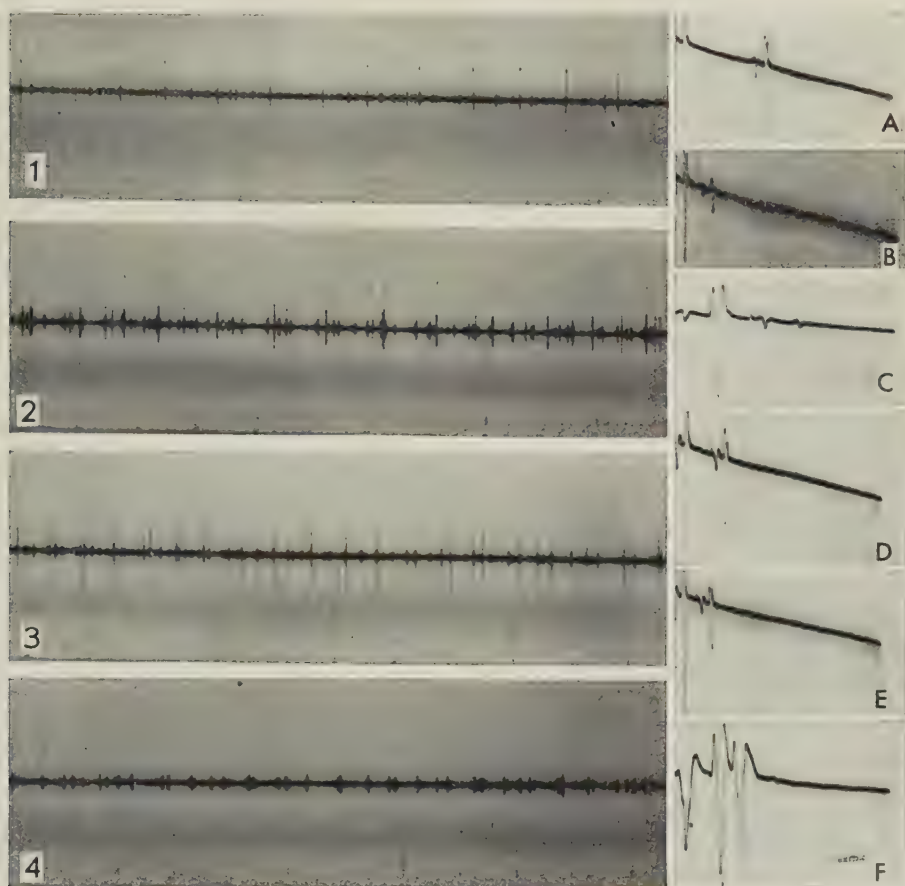


Fig. 1. — Potenziali d'azione della singola fibra muscolare durante una contrazione volontaria isometrica nell'uomo (1 2 3 4) e risposte riflesse monosinaptiche per il calcolo dell'inibizione antidromica di Renshaw (*A B C D E F*) nello stesso individuo in condizioni normali e di ipoglicemia.

1	tensione kg	4,5	glicemia	0,091 %
2	»	» 8,5	»	0,091 %
3	»	» 4,5	»	0,067 %
4	»	» 4,5	»	0,057 %

Segnatempo 1/7 sec.

A B C risposte muscolari dirette e riflesse monosinaptiche seguenti un singolo stimolo elettrico applicato sul relativo nervo misto, glicemia 0,091 %. In *A* e *B* manca la prima risposta diretta e si osserva in successione la prima risposta riflessa, la lieve traccia dell'artefatto del secondo stimolo, la seconda risposta diretta e la seconda risposta riflessa; asse dei tempi 500 msec. In *C* si osserva in successione la prima risposta diretta seguente al primo stimolo, la prima risposta riflessa, l'artefatto del secondo stimolo, la seconda risposta diretta e infine la seconda risposta riflessa, appena visibile; asse dei tempi 150 msec. Da *A* verso *C* l'intervallo tra i due stimoli diminuisce progressivamente.

D E F risposte dirette e riflesse monosinaptiche muscolari come in *A B C* ad un valore di glicemia di 0,057 %. La successione dei potenziali di risposta è come in *A B C*. Asse dei tempi in *D* e *E* 500 msec; in *F* 150 msec.

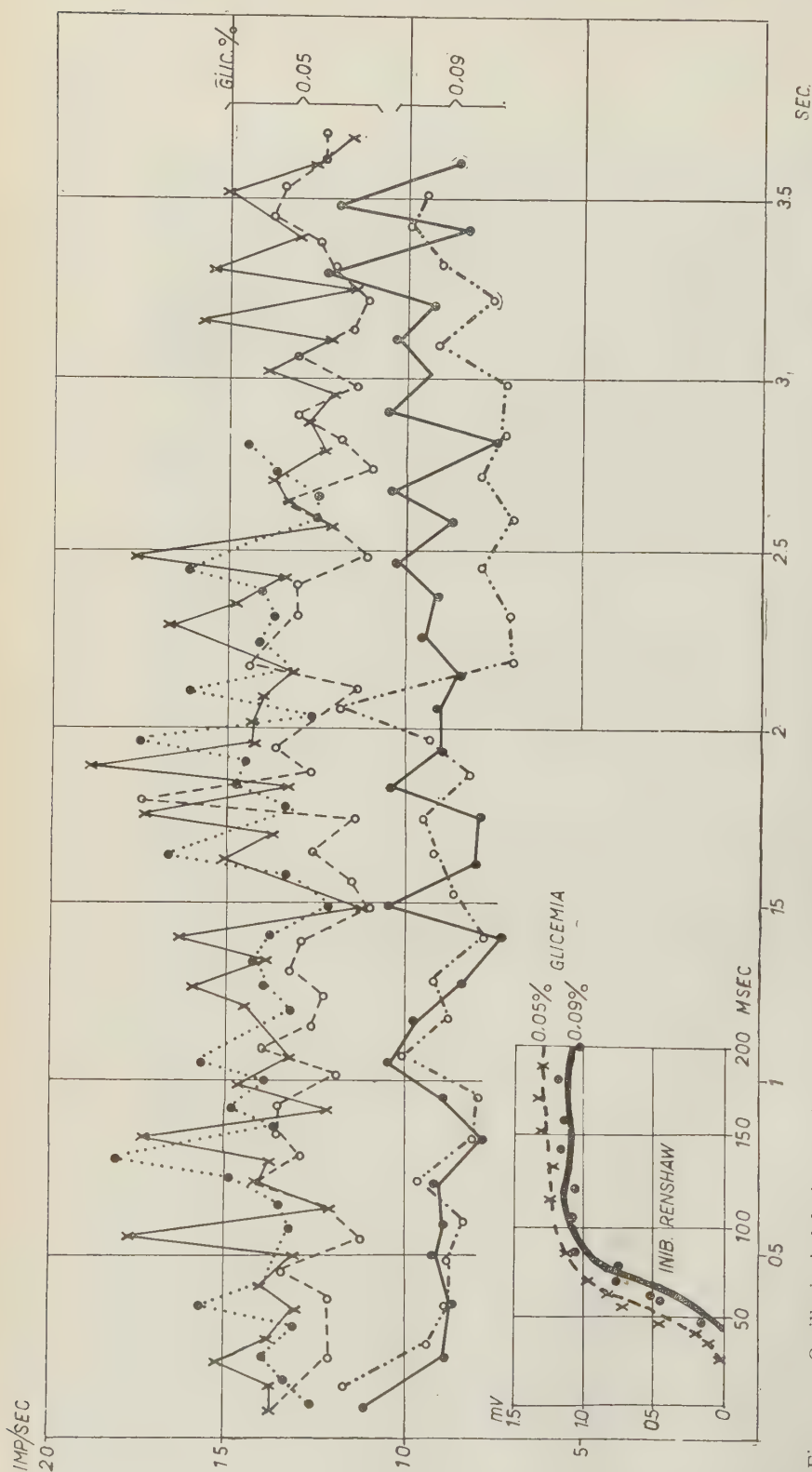


Fig. 2. - Oscillazioni del ritmo dei potenziali d'azione della singola fibra muscolare nella contrazione isometrica volontaria nell'uomo a due valori di glicemia.

Sull'ordinata numero dei potenziali d'azione per secondo della singola fibra muscolare calcolato in base a ciascun intervallo tra due potenziali d'azione in successione. Sull'ascissa il tempo in sec. I diagrammi corrispondenti allo 0.09 % di glicemia sono calcolati rispettivamente durante una contrazione isometrica volontaria di Kg 4.5 (linea continua) e di Kg. 8.5 (linea tratteggiata). Allo 0.05 % i rilievi riguardano tre fibre: la contrazione del muscolo era in ogni caso di Kg 4.5. I ritmi di queste fibre sono rispettivamente:

Glicemia %:	0.091	0.057	0.057	0.057
Tensione Kg:	8.5	4.5	4.5	4.5
Impulsi/sec:	9.5 ± 1.2	9.0 ± 1.4	14.3 ± 1.8	12.8 ± 1.1
			14.3 ± 1.3	14.3 ± 1.3

In basso a sinistra, diagramma dell'inibizione di Renshaw agli stessi valori di glicemia: sull'ordinata ampiezza in mV di una risposta riflessa monosinaptica nel midollo spinale seguente un singolo stimolo elettrico applicato a un nervo misto dopo un primo stimolo condizionante sopramassimale. Sull'ascissa intervalli tra i due stimoli. La curva di sopra verso l'ordinata durante ipoglicemia pari a 0.05 % dimostra una diminuzione dell'inibizione antidromica di Renshaw.

Questi risultati sembrano indicare che il ritmo di scarica del singolo motoneurone spinale sia determinato dalla durata della inibizione antidromica di Renshaw; infatti supponendo che un treno continuo di impulsi sensitivi investa il motoneurone spinale, questi scaricherà una prima volta un potenziale d'azione lungo il proprio neurite. Tale impulso propagandosi lungo l'assone inibirà antidromicamente il motoneurone da cui è partito attraverso il circuito di Renshaw per un periodo corrispondente alle caratteristiche di funzionamento del circuito stesso. Poiché quest'ultimo è evidentemente indipendente dalle caratteristiche del treno di impulsi sensitivi che hanno provocato la prima scarica e presenta caratteristiche rigide in condizioni sperimentali costanti, ne risulta che il ritmo di scarica del motoneurone spinale e della relativa unità neuromuscolare sarà indipendente dalla frequenza degli impulsi sensitivi eccitatori convergenti sul motoneurone, ed anche approssimativamente costante, poiché le sue variazioni corrisponderanno soltanto a quelle del sistema di Renshaw che, come si è detto, sono molto limitate.

Un tale schema ipotetico giustifica i risultati finora ottenuti ai quali si è accennato precedentemente, che cioè non esiste relazione tra tensione e frequenza degli impulsi nel muscolo che si contrae volontariamente: infatti secondo tale schema questa relazione non è possibile e il ritmo di scarica deve corrispondere al valore reciproco della durata dell'inibizione antidromica di Renshaw.

Precedenti ricerche già citate (Margaria, Gualtierotti e Spinelli, in corso di stampa) hanno indicato che la durata dell'inibizione antidromica di Renshaw può essere ridotta da varie condizioni sperimentali come ad esempio in ipoglicemia. In questo caso la curva corrispondente all'andamento dell'inibizione stessa si sposta parallelamente a quella normale (fig. 1, *DEF* e diagramma a sinistra della fig. 2, in linea punteggiata). L'ipotesi suaccennata della dipendenza del ritmo di scarica del motoneurone dalla durata dell'inibizione di Renshaw può allora essere sottoposta a vaglio sperimentale, poichè in ipoglicemia si dovrà riscontrare una variazione nel ritmo di scarica dei motoneuroni dello stesso ordine di grandezza della variazione dell'inibizione di Renshaw.

Esperimenti in questo senso sono stati eseguiti sull'uomo registrando i potenziali d'azione della singola fibra muscolare mediante microelettrodi bifilari contenuti in un ago da iniezione messo a terra, amplificatori differenziali ad alta discriminazione e tubo a raggi catodici. Il ritmo di scarica della fibra muscolare venne determinato (fig. 1) durante la contrazione isometrica a tensione nota applicata mediante tensiometro tarato tra Kg 0,5 e Kg 10, in condizioni normali e durante ipoglicemia. Contemporaneamente veniva determinata sullo stesso soggetto la curva dell'inibizione antidromica di Renshaw nelle due condizioni (normale e in ipoglicemia).

I risultati sono riassunti nei due diagrammi della fig. 2, dai quali si rileva che il ritmo di scarica della singola fibra muscolare varia in misura inversamente proporzionale alla durata dell'inibizione antidromica di Renshaw: in ambedue i casi la variazione è di circa 25-30%.

Si conferma inoltre che non vi è alcuna relazione tra la tensione esercitata dal muscolo e il ritmo di scarica dell'unità neuromotoria, sia in condizioni di glicemia normale che in ipoglicemia.

In seguito a questi risultati si possono trarre le seguenti conclusioni:

a) si conferma che l'unità neuromuscolare nell'uomo ha un ritmo di scarica che è approssimativamente costante e indipendente dalla tensione esercitata dal muscolo;

b) il ritmo di scarica appare regolato dall'attività del circuito di Renshaw (ramo ricorrente del neurite del motoneurone - cellula di Renshaw - sinapsi inibitoria sul motoneurone) ed è quindi inversamente proporzionale alla durata dell'inibizione antidromica del motoneurone stesso provocata attraverso questo meccanismo;

c) l'attività dell'unità neuromuscolare varia in relazione alle caratteristiche del circuito inibitorio di Renshaw ed è perciò dipendente da tutte quelle condizioni generali, sperimentali o spontanee, che modificano la durata dell'inibizione antidromica, quale ad esempio l'ipoglicemia;

d) data l'alta sensibilità della cellula di Renshaw all'ipoglicemia e all'ipossia e ad altre modificazioni generali dell'organismo, è necessario tener conto di questi fattori quando si voglia studiare il comportamento dell'unità neuromotoria.

Questa ricerca è stata finanziata dall'Ufficio di Ricerca Scientifica dell'Air Research and Development Command, United States Air Force, tramite il suo Ufficio Europeo, secondo il Contratto AF 61(052)-23.

BIBLIOGRAFIA.

- ECCLES J. C., FATT P. e KOKETSU K., « J. Physiol. », 126, 524 (1954).
GUALTIEROTTI T. e MILLA E., « Pflüg. Arch. », 245, 524 (1942).
MARGARIA R., « Arch. Néerl. Physiol. », 28, 399 (1946).
MARGARIA R., GUALTIEROTTI T. e SPINELLI D. (in corso di stampa), « J. exp. Med. Surg. ».
RENSHAW B., « J. Neurophysiol. », 4, 167 (1941).

Fisiologia. — *Il comportamento dell'acqua del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizantica* (*). Nota di GAETANO LIVREA e FERRUCCIO DE STEFANO, presentata (**) dal Corrisp. G. AMANTEA.

In una Nota precedente [1] abbiamo esposto un piano di lavoro teso a documentare che la bradicardia, con o senza aritmia, osservabile nei colombi in inanizione acuta, malnutrizione calorica ed orizantica, e già da noi [2-5] dimostrata indipendente dai bioregolatori esogeni, è forse l'espressione della mancata copertura dei bisogni globali del cuore in N. Abbiamo inoltre sostenuto che il nostro piano di lavoro avrebbe permesso: *a)* di apportare qualche specifico contributo alla conoscenza delle ripercussioni tuttora ignote dell'inanizione e delle malnutrizioni sui diversi organi del colombo; *b)* di inquadrare le ripercussioni funzionali e biochimiche cardiache dell'inanizione e delle malnutrizioni nel quadro più completo delle ripercussioni sugli altri organi; *c)* di accertare sino a qual punto le ricerche di biochimica morfologica e dinamica del cuore possono servire alla comprensione di certi aspetti del lavoro metabolico col quale il cuore sintetizza, conserva ed usura i suoi complessi tissulari specifici.

Poiché la conoscenza delle conseguenze cardiache dell'inanizione e delle malnutrizioni potrà essere esauriente solo dopo la conoscenza e la correlazione possibilmente quantitativa delle modificazioni morfologiche, fisiologiche e biochimiche indotte dagli anzidetti disordini nutritivi non solo sul cuore, ma anche sugli altri organi, è stato giocoforza incominciare ad esplorare il campo ancora sconosciuto della morfologia funzionale e della biochimica morfologica e dinamica sia dell'inanizione che della malnutrizione del colombo.

Pertanto, in una seconda Nota [6], abbiamo incominciato col precisare preliminarmente il comportamento ponderale del cuore e degli altri organi negli anzidetti stati nutritivi, ed abbiamo accertato, fra l'altro, che l'entità della ripercussione operata dal digiuno protratto e dalla malnutrizione orizantica sul peso di alcuni organi, tra i quali il cuore, è, nei due casi, dello stesso ordine di grandezza di quella operata sul peso dell'organismo complessivo. Ciò ci ha permesso di affermare che il cuore del colombo non resiste affatto all'inanizione ed alla malnutrizione orizantica e non è salvaguardato attraverso l'usura degli altri organi.

Poiché nella letteratura vi sono prove molteplici che in tutti gli organi, sia nell'inanizione che nella malnutrizione non complicata, v'è uno stato

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Scienza dell'Alimentazione dell'Università di Messina con un contributo del C.N.R.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

di edema o comunque di idratazione, per procedere sistematicamente nel nostro piano di lavoro, subito dopo il comportamento ponderale, abbiamo ritenuto necessario precisare il comportamento dell'acqua di alcuni principali organi del colombo, sia digiunante che in malnutrizione orizantica. Eseguendo questa semplice ricerca intendevamo non tanto apportare un contributo a quest'aspetto tuttora non determinato delle ripercussioni operate dall'inanizione e dalla malnutrizione orizantica sui diversi organi del colombo, quanto accertare con maggiore esattezza la perdita reale di tessuto vitale di alcuni organi, soprattutto del cuore, e così meglio interpretare le ripercussioni biochimiche, che successivamente avevamo in animo di precisare, sia sul tessuto miocardico che su alcuni altri tessuti.

MATERIALI E METODI.

Sono stati adoperati 29 colombi (*Columba livia*) del commercio, in perfette condizioni generali, sessualmente maturi e del peso medio di 390 g circa. Prima di iniziare gli esperimenti tutti gli animali sono stati tenuti in osservazione, per almeno una settimana, ad una dieta mista di grano e granturco *ad libitum*. Indi sono stati suddivisi in 3 lotti: un lotto di 11 come controlli, un lotto di 9 sottoposti al digiuno, con acqua *ad libitum*, fino ad ottenere la perdita di peso corporeo e il grado di bradicardia desiderata, ed un lotto di 9 sottoposti a dieta esclusiva di riso brillato e lavato, somministrato per imbeccamento due volte al giorno, nella dose complessiva di 25 g *pro die e pro capite*, fino all'instaurarsi di conclamati segni nervosi. Per tutta la durata degli esperimenti, gli animali dei tre lotti sono stati controllati quotidianamente per quanto riguarda il comportamento generale, il peso, l'attività cardiaca (metodo dell'ascoltazione fonendoscopica in condizioni d'assoluta quiete ambientale e di tranquillità dell'animale) e le funzioni digerenti e nervose.

Al momento opportuno i vari animali sono stati sacrificati per dissanguamento, dalle carotidi, curando che quelli di controllo e quelli a dieta orizantica fossero ad ingluvie vuota. Durante il dissanguamento, si è provveduto a raccogliere in pesafiltri tarati i necessari campioni di sangue. Ultimato il dissanguamento, si è proceduto alla rapida apertura delle cavità addominale e toracica ed al prelevamento di frammenti di fegato, sempre dal lobo sinistro, e di cuore, sempre dalla regione della punta. Nel caso del cuore, si è avuto cura di allontanare i piccoli coaguli eventualmente presenti. Infine si è prelevato un piccolo frammento di muscolo pettorale superficiale. Anche tutti questi campioni sono stati deposti in pesafiltri tarati e, insieme a quelli del sangue, sono stati portati a peso costante in stufa regolata a 105 °C.

RISULTATI E DISCUSSIONE.

Prima di esporre i risultati relativi al contenuto in acqua del sangue, del fegato, del muscolo scheletrico e del cuore, riteniamo opportuno far notare

brevemente che *a*) nei colombi digiunanti la frequenza cardiaca media è progressivamente diminuita da 154 fino ad 81 pulsazioni/m', con una riduzione del 48 %; *b*) nei colombi a dieta orizantica, la bradicardia, con o senza aritmia, si è insediata sempre dopo l'insorgere del vomito, in genere tra l'8° e l'11° giorno, e la frequenza media è pervenuta progressivamente da 166 a 98 pulsazioni/m', verificandosi così una riduzione del 41 % in corrispondenza della comparsa dei segni nervosi, a loro volta coincidenti, nel nostro caso, con una perdita media di peso corporeo del 17,6 %.

I risultati relativi al contenuto in acqua degli organi esaminati sono raccolti nelle Tabelle I e II. Da esse si ricava quanto segue:

1° sia in condizione di nutrizione normale, che di protratta inanizione assoluta o di malnutrizione orizantica spinta sino all'insediamento dei fenomeni nervosi del beriberi, il contenuto in acqua del cuore è inferiore a quello del sangue e superiore a quello del muscolo scheletrico e del fegato;

2° nell'inanizione acuta, rispetto alle condizioni normali, il contenuto in acqua aumenta significativamente nel cuore (0,9 %), nel muscolo (1,5 %) e nel sangue (2,2 %), aumenta insignificativamente nel fegato (0,6 %);

3° nella malnutrizione da dieta orizantica, rispetto alle condizioni normali, il contenuto in acqua del sangue e del cuore rimane pressoché invariato, aumenta insignificativamente nel fegato (0,6 %), aumenta significativamente nel muscolo scheletrico (1,2 %);

4° nella malnutrizione da dieta orizantica, rispetto all'inanizione acuta, il contenuto in acqua è invariato nel fegato e nel muscolo, è significativamente inferiore nel cuore (0,8 %) e nel sangue (2,4 %);

5° pur non essendovi uno stretto rapporto tra entità della perdita di peso corporeo ed idratazione dei tessuti nei singoli animali digiunanti o beriberici⁽¹⁾, l'idratazione tessutale dei colombi digiunanti è in genere sempre maggiore di quella dei colombi beriberici;

6° l'entità delle modificazioni qui descritte nel contenuto in acqua del fegato, del cuore e del muscolo scheletrico non è tale da influenzare sensibilmente l'entità dell'usura di detti organi, quale è stata da noi specificata nella precedente Nota, sia per l'inanizione assoluta che per la malnutrizione orizantica: difatti, se sulla base della modificazione del contenuto in acqua osservata nel cuore da inanizione e nel cuore beriberico, procediamo alla correzione degli indici di usura di detti cuori [6], vediamo che tali indici passano rispettivamente da 0,90 a 1,01 e da 0,91 a 0,93;

7° infine, non vi è rapporto, nei singoli animali digiunanti o beriberici, tra contenuto in acqua del cuore e frequenza e ritmo delle pulsazioni.

(1) I risultati di MENDEL e ROSE [7] per il coniglio e quelli di altri Autori (ved. MORGULIS [8]) per varie specie di pesci, uccelli e mammiferi depongono per l'esistenza di uno stretto rapporto almeno tra la percentuale di acqua nei muscoli e quella della perdita di peso corporeo.

TABELLA I.

Peso corporeo, frequenza cardiaca e contenuto percentuale d'acqua del sangue, fegato, muscolo scheletrico e cuore di colombi normali, digiunanti o in malnutrizione orizantica.

Colombi		Peso corporeo			Giorni di digiuno o di dieta oriz- nica	Frequenza cardiaca media		A c c u a			
n.	Sesso	ini- ziale	finale	% perduto		ini- ziale	finale	sangue	fegato	muscolo schel.	cuore
COLOMBI NORMALI											
1	<i>m</i>	455	—	—	—	165	—	—	68,2	71,0	76,9
2	<i>f</i>	395	—	—	—	200	—	81,9	73,7	73,3	76,9
3	<i>f</i>	325	—	—	—	165	—	77,9	70,5	71,3	76,1
4	<i>m</i>	370	—	—	—	145	—	79,6	72,2	71,9	77,4
5	<i>m</i>	450	—	—	—	170	—	77,7	70,9	72,3	77,0
6	<i>m</i>	400	—	—	—	175	—	78,6	70,7	72,5	76,9
7	<i>f</i>	400	—	—	—	165	—	78,0	66,5	71,9	76,9
8	<i>m</i>	410	—	—	—	175	—	77,5	71,5	72,4	76,8
9	<i>f</i>	425	—	—	—	155	—	75,4	71,0	70,3	75,6
10	<i>m</i>	410	—	—	—	175	—	78,8	72,0	72,7	77,4
11	<i>m</i>	430	—	—	—	165	—	78,3	69,7	72,3	77,3
COLOMBI DIGIUNANTI											
1	<i>m</i>	400	323	19,3	7	165	91	82,6	70,9	75,8	78,2
2	<i>f</i>	345	274	20,6	6	165	91	80,0	69,8	73,0	77,6
3	<i>f</i>	290	215	25,9	6	135	97	—	71,9	—	79,2
4	<i>f</i>	340	258	24,2	8	175	93	79,8	72,4	71,1	76,8
5	<i>f</i>	350	275	21,5	8	165	75	82,2	73,4	75,8	78,8
6	<i>f</i>	392	305	22,2	11	125	80	79,6	70,6	—	77,2
7	<i>m</i>	370	289	21,9	8	145	83	79,5	71,6	72,5	76,5
8	<i>m</i>	435	341	21,7	11	135	55	79,2	69,2	72,7	77,2
9	<i>m</i>	365	289	20,9	8	165	68	81,8	71,5	73,6	78,1
COLOMBI BERIBERICI											
1	<i>m</i>	402	325	19,2	13	145	100	78,5	70,2	74,7	76,8
2	<i>f</i>	440	370	16,0	13	155	115	74,9	70,3	74,2	75,8
3	<i>m</i>	440	402	8,7	14	125	105	79,9	68,9	73,6	77,0
4	<i>m</i>	420	350	16,7	14	165	93	76,9	75,6	71,7	77,5
5	<i>m</i>	405	305	24,7	20	185	74	79,0	70,6	70,7	77,6
6	<i>m</i>	405	303	25,2	19	185	83	79,5	71,6	74,3	77,5
7	<i>f</i>	370	300	19,0	17	175	93	78,1	70,2	73,5	77,1
8	<i>m</i>	340	310	8,9	9	195	120	75,7	70,5	72,1	76,5
9	<i>f</i>	380	305	19,8	16	165	100	81,2	72,9	73,6	76,6

Non potendo qui discutere per ora tutti i risultati ottenuti e dovendoci limitare a qualche considerazione generale soltanto circa l'acqua del cuore, possiamo dire che, sia in condizione normale di nutrizione che in condizioni di inanizione acuta e di malnutrizione orizantica, i processi metabolici del cuore si svolgono sempre in presenza di una quantità d'acqua, la quale, pur variando a seconda delle anzidette condizioni nutritive, è in ognuna delle tre condizioni sempre inferiore a quella del sangue e sempre superiore a quella del muscolo scheletrico e del fegato e che mentre nella bradicardia da inanizione si riscontra un contenuto in acqua del cuore lievemente aumentato, nella bradicardia da malnutrizione orizantica si riscontra, invece, un contenuto in acqua quasi uguale a quello del cuore normale, normocardico.

Questo comportamento dell'acqua ci sembra tanto più segnalabile in quanto uno di noi [3], in collaborazione con Craxì, ha potuto dimostrare che il cosiddetto cuore beriberico oltre che funzionalmente è anche istopatologicamente identico al cuore da inanizione, notandosi in entrambi, fra l'altro, rigonfiamento edematoso delle fibre muscolari ed edema interstiziale.

Ciò farebbe pensare che il quadro istologico di edema del cuore beriberico e del cuore da inanizione non è tanto la conseguenza di un aumento dell'acqua libera o di soluzione del tessuto, quanto la conseguenza di una mutata condizione del cosiddetto spazio non solvente, cioè dell'acqua legata o di costituzione. Una parte di tale acqua non sarebbe più immobilizzata intorno ai gruppi polari delle molecole proteiche, sia per l'usura di queste, sia per una diminuzione della loro carica acquosa in conseguenza di nuovi equilibri indotti dal disordine nutritivo nei gruppi polari proteici o negli ioni minerali fissati alle molecole proteiche.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. LIVREA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 24, 577 (1958).
- [2] G. LIVREA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 15, 453 (1953).
- [3] G. LIVREA e P. CRAXÌ, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16, 508 (1954).
- [4] G. LIVREA, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 16, 763 (1954).
- [5] G. LIVREA, « Biologica Latina », 10, 794 (1957).
- [6] G. LIVREA e F. DE STEFANO, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, 24, 579 (1958).
- [7] L. B. MENDEL and W. C. ROSE, « J. Biol. Chem. », 10, 255 (1911).
- [8] S. MORGULIS, *Fasting and undernutrition*, Dutton, New York, 1923.

Patologia. — *Nuovi rilievi sulla fine struttura degli alveoli polmonari desunti dall'osservazione al microscopio elettronico di sezioni ultra sottili sottoposte ad impregnazione argantica.* Nota di VITTORIO MARINOZZI, presentata (*) dal Corrisp. G. BOMPIANI.

Lo studio al microscopio elettronico degli alveoli polmonari ha permesso di accertare l'esistenza, sulla loro superficie, di un rivestimento cellulare la cui continuità, asserita da Low (1952, 1953 e 1954), messa in dubbio da Kisch (1955) e negata da Policard, Collet e Giltaire-Ralyte (1954) e da Swigart e Kane (1954) è stata definitivamente dimostrata dai risultati concordi dei lavori più recenti (Policard, Collet e Giltaire-Ralyte, 1955; Karrer, 1956; Giesecking, 1956; Van Breeman e Neustein, 1956; Bargmann e Knopp, 1956 e Low e Sampaio, 1957).

Circa la natura delle dette cellule, che vengono designate come « cellule alveolari », i pareri sono discordi. Mentre alcuni autori le ritengono di natura epiteliale (Low, Karrer, Bargmann e Knopp, Low e Sampaio), altri ne asseriscono l'origine istiocitaria (Policard, Collet e Giltaire-Ralyte). La disparità di vedute in proposito deriva, tra l'altro, dal fatto che alcune di esse presentano caratteri citologici del tutto simili a quelli delle cellule libere endo-alveolari, la cui natura mesenchimale è ammessa da quasi tutti gli autori surricordati.

Ad eccezione di Giesecking e di Dettmer, tutti gli altri autori concordano nell'affermare l'esistenza di una membrana basale, di scarsa densità elettronica, interposta tra le dette cellule di rivestimento e quelle endoteliali dei capillari. Secondo Low (1953) e Policard, Collet e Giltaire-Ralyte (1955) le membrane basali sarebbero due, una epiteliale, situata al di sotto delle cellule alveolari, ed una endoteliale, situata all'esterno dell'endotelio dei capillari.

In una precedente Nota ⁽¹⁾ abbiamo illustrato un metodo di impregnazione argantica delle sezioni ultrasottili che ne permette l'utilizzazione per l'osservazione al microscopio ottico. La possibilità di ottenere con il detto metodo preparati esenti da grossolani precipitati di argento ci ha spinti a tentarne l'impiego anche per le sezioni da osservare al microscopio elettronico.

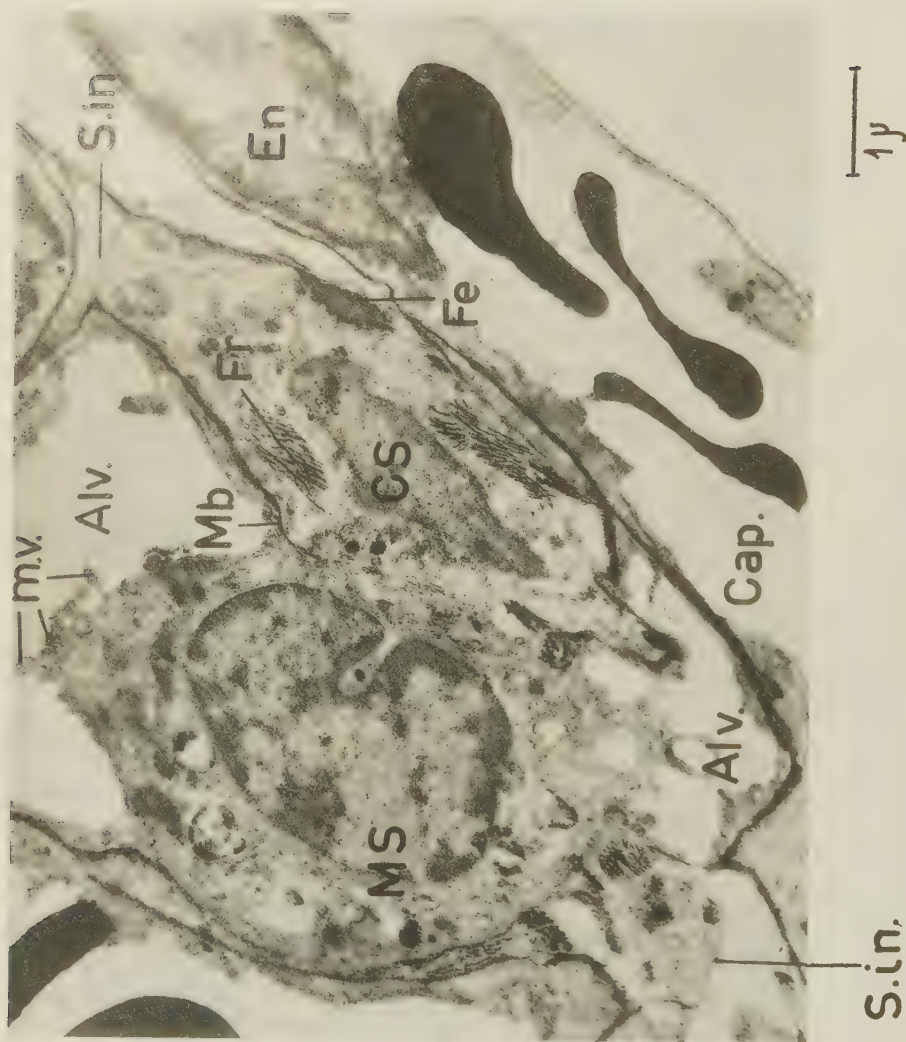
I metodi di impregnazione argantica sono già stati largamente usati nella microscopia elettronica, ma soltanto per la colorazione di materiale preparato per dilacerazione o per mezzo degli ultrasuoni; non ci risulta che sia mai stata realizzata, prima d'ora, l'impregnazione argantica delle sezioni ultrasottili.

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

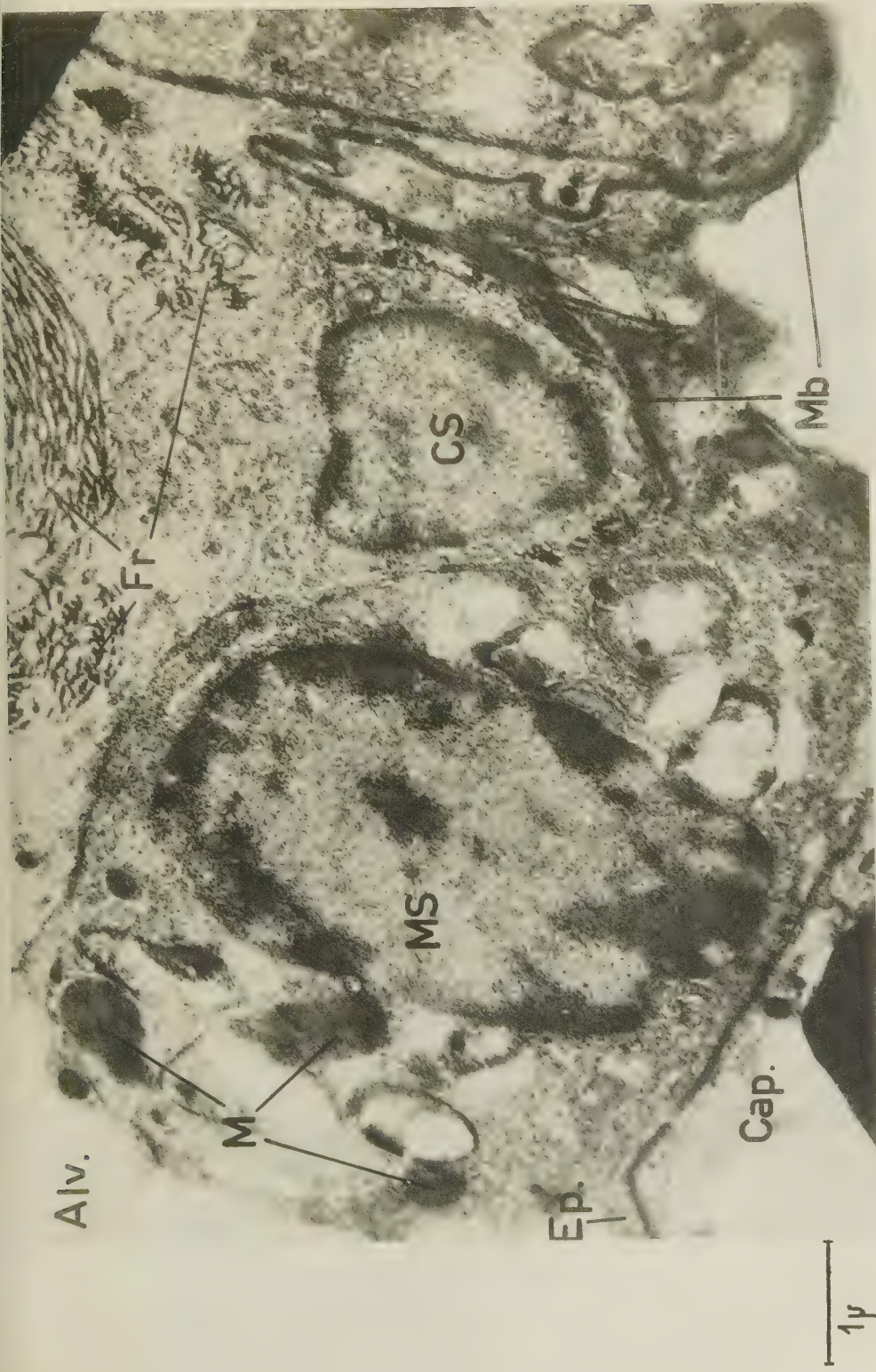
(1) V. MARINOZZI, questi « Rendiconti », fasc. 5, p. 600 (1958).



Veduta d'insieme di un setto interalveolare.
Ep = cellula epiteliale di rivestimento; S.in. = spazio intercapillare; Fe = fibre elastiche; En = endotelio; Gr = globulo rosso; Mb = membrana basale; (Impregnazione argéntica).



La cellula a citoplasma vacuolato (o macrofago settale, MS) è in contatto con una cellula reticolare (o sette propriamente detta, CS) tramite una soluzione di continuo della membrana basale (Mb).
mv = microvilli; Fr = fibre reticulari; Fe = fibre elastiche; En = endotelio; S.in = spazio intercapillare; (Impregnazione argentea).



La cellula del tipo a citoplasma vacuolato (o macrofago settale, MS) è in intima connessione con la cellula reticolare (o settale propriamente detta, CS) la quale, a sua volta, è in contatto immediato con le fibre reticolari (Fr) dello spazio intercapillare. Mb = membrana basale; Ep = espansione citoplasmatica laminare di una cellula epiteliale; M = mitocondri; Alv. = alveolo; (Impregnazione argentea).



Parete di un dotto alveolare.

CS = cellula settale (o interstiziale); Fr = fibre reticolari; Fe = fibre elastiche; Mb. ep. = membrana basale
epiteliale; Mb. En. = membrana basale endoteliale; En = endotelio (è visibile la sola espansione la-
minare citoplasmatica); S.in = spazio intercapillare; Cap. = capillare; (Impregnazione argantica).

MATERIALE E METODO.

Per queste prime osservazioni abbiamo usato frammenti di polmone di ratto fissati in acido osmico al 2%, tamponato a pH 7,2 secondo Palade, ed inclusi in metil-butilm-tacrilato 1:20. Le sezioni ultrasottili (200 Å circa) venivano raccolte su vetrini copri-oggetto, previamente ricoperti con pellicola di formvar, e sottoposte all'impregnazione argen-tica dopo dissoluzione del metacrilato con etere etilico. (Tra i vari solventi del metacrilato abbiamo prescelto l'etere etilico in quanto consente la migliore preservazione delle sezioni, probabilmente per il fatto che esso, mentre è un ottimo solvente del metacrilato di butile, non discioglie quello di metile).

Completata la colorazione, le sezioni venivano distaccate dai vetrini insieme alla pel-licola di formvar e raccolte su reticelle di rame che venivano punzonate dopo che le sezioni erano state contrassegnate sotto controllo del microscopio a contrasto di fase.

RISULTATI.

Sulla parete degli alveoli si riconoscono due tipi di cellule nettamente differenziati tra loro.

Un primo tipo è caratterizzato essenzialmente dalla notevole esten-sione superficiale del citoplasma, che forma un sottile mantello intorno al nucleo e si espande; in forma quasi laminare, sulle pareti alveolari assicu-randone un rivestimento continuo (fig. 1). Il nucleo fa salienza verso il lume dell'alveolo; nel citoplasma si riconoscono soltanto rare e piccole strutture sferoidali, identificabili come mitocondri.

Le cellule del secondo tipo hanno forma per lo più ovoidale e nucleo in posizione centrale. A differenza delle precedenti, che presentano una super-ficie liscia, esse lasciano riconoscere, lungo la loro circonferenza, numerosi e fini prolungamenti citoplasmatici (o microvilli) (figg. 2 e 3). Il citoplasma, oltre a numerosi mitocondri, presenta grossi vacuoli alcuni dei quali appa-iono limitati da un sottile strato di alta densità elettronica. (Non ci è pos-sibile precisare se quest'ultimo reperto derivi dalla deposizione dell'argento sulla parete dei vacuoli o se le formazioni in questione corrispondano al tipo di inclusioni citoplasmatiche vacuolizzate, descritte da Kisch nelle cosi-dette « cellule specifiche »).

Caratteri citologici del tutto analoghi presentano le cellule libere endo-alveolari.

Le cellule del primo tipo aderiscono, in profondità, ad una sottilissima membrana basale che l'impregnazione argen-tica mette in particolare evi-denza (fig. 1). Limitatamente ai tratti nei quali i capillari fanno salienza sulle pareti alveolari, la detta membrana appare come la sola struttura inter-posta fra le cellule di rivestimento e quelle endoteliali dei capillari (fig. 1). In rapporto al versante profondo dei capillari, però, essa sembra sdoppiarsi e mentre una parte si continua lungo la circonferenza dei capillari, l'altra parte (vale a dire la vera e propria membrana basale delle cellule di rivesti-mento) viene a delimitare, con quella corrispondente del versante opposto del setto, degli spazi, interstiziali (o intercapillari), nei quali sono conte-

nute fibre reticolari ed elastiche (figg. 2 e 3). La loro identificazione è facilitata dall'impregnazione argenterica che mette in risalto il periodo caratteristico delle fibre reticolari e conferisce alle fibre elastiche un'altissima densità elettronica, probabilmente per effetto della deposizione omogenea dell'argento sulla sostanza cementante.

Negli spazi interstiziali sono presenti anche alcune cellule linfocitosimili, con nucleo rotondeggiante o ovalare, che si possono riconoscere come cellule reticolari per la loro costante, intima connessione con il reticolo argento-filo (figg. 2, 3 e 4).

Quelle che abbiamo descritto sopra come il secondo tipo di cellule superficiali sono a diretto contatto con le strutture connettivali degli spazi intercapillari, attraverso soluzioni di continuo della membrana basale superficiale, come indicano chiaramente le figg. 2 e 3, dalle quali risulta pure evidente l'intima connessione delle dette cellule con quelle reticolari dell'interstizio.

Tranne che nelle situazioni predette, non esistono soluzioni di continuo della membrana basale superficiale.

Lo spazio interstiziale, estremamente esiguo nei setti interalveolari (ove i capillari occupano quasi interamente lo spazio interposto fra le due membrane basali superficiali), ha uno sviluppo cospicuo in corrispondenza dei punti nodali degli alveoli e nel piede d'impianto, degli stessi, sui dotti alveolari (fig. 4).

CONCLUSIONI.

L'impregnazione argenterica secondo Jones delle sezioni ultrasottili consente di realizzare una «colorazione elettronica» qualitativa dei tessuti che riteniamo particolarmente vantaggiosa per le ricerche di istologia, in quanto facilita l'identificazione delle strutture metaplasmatiche.

Essa ci ha permesso di accertare che, nell'alveolo polmonare, oltre alle vere *cellule epiteliali di rivestimento*, esistono altre cellule che, per essere in rapporto diretto con le strutture interstiziali e, soprattutto, con le cellule reticolari dei setti (o *cellule settali propriamente dette*), riteniamo di natura mesenchimale. Esse hanno caratteri citologici del tutto simili a quelli comunemente riconosciuti come peculiari dei macrofagi (cfr. Sampaio, 1956) e potrebbero essere designate, pertanto, come *macrofagi settali*.

La loro somiglianza con le cellule libere endoalveolari (*macrofagi endoalveolari*) fa ritenere verosimile che queste ultime derivino dal distacco delle precedenti dalle pareti dell'alveolo.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] BARGMANN W. e KNOPP A., «Z. Zellforsch.», 44, 263 (1956).
- [2] BREEMAN (van) V. L. e NEUSTEIN H. B., «Anat. Rec.», 124, 472 (1956).
- [3] DETTMER N., «Beitr. Silikose Forsch.», 45, 17 (1956).
- [4] GIESEKING R., «Beitr. Path. Anat.», 116, 177 (1956).

- [5] KARRER H. E., « Bull. J. Hopkins Hosp. », 98, 65 (1956).
- [6] ID., « J. Biophys. Bioch. Cytol. », 2, 241 (1956).
- [7] KISCH B., « Exper. Med. and Surg. », 13, 101 (1955).
- [8] LOW F. N., « Anat. rec. », 113, 437 (1952).
- [9] ID., « Anat. rec. », 117, 241 (1953).
- [10] ID., « Anat. rec. », 120, 827 (1954).
- [11] ID. e SAMPAIO M. M., « Anat. Rec. », 127, 1 (1957).
- [12] POLICARD A., COLLET A. e GILTAIRE-RALYTE L., « Presse Méd. », 62, 1775 (1954).
- [13] ID., « C. R. Ac. Sc. », 239, 687 (1954).
- [14] ID., « C. R. Ac. Sc. », 240, 2363 (1955).
- [15] SAMPAIO M. M., « Anat. Rec. », 124, 501 (1956).
- [16] SWIGART R. N. e KANE D. J., « Anat. Rec. », 118, 57 (1954).

Patologia. — *Sulla presenza di granuli ferruginosi nell'Apparato di Golgi delle cellule eritroblastiche.* Nota di ENNIO LUCIO BENEDETTI, presentata (*) dal Corrisp. G. BOMPIANI.

Nei globuli rossi normali è possibile mettere in evidenza delle granulazioni colorabili con il Bleu di Prussia. Anche negli eritroblasti e nelle cellule reticolari degli organi ematopoietici è presente lo stesso materiale ferruginoso [2] [3] [4] [5] [7] che può aumentare notevolmente nell'iperemolisi [3] [4] [6].

Alcune granulazioni ferruginose studiate con la tecnica delle sezioni ultrasottili per la microscopia elettronica, risultano costituite da granuli tra loro isolati, molto densi e di taglia alquanto uniforme (55 Å) [10] [4] [5]. Poiché la *ferritina* isolata ed identificata chimicamente appare al microscopio elettronico come costituita dagli identici granuli, tali ammassi ferruginosi sono considerati di natura ferritinica [8] [10] [11].

I depositi intracellulari di ferritina sono per lo più localizzati nei mitocondri [2] [3] [4] [5], mentre non sono stati mai segnalati nell'apparato di Golgi.

TECNICA DELLA RICERCA.

Le nostre osservazioni sulle cellule della serie eritroblastica del pollo sono state condotte nella membrana corion-allantoidea (serie megaloblastica), nella milza di embrioni di 14 giorni e nel midollo di giovani animali. I frammenti di tessuto venivano fissati in acido osmico al 2 % (pH 7, 3), disidratati in alcool etilico ed inclusi in metacrilato di butile. Le sezioni ultrasottili venivano allestite mediante microtomo Porter-Servall munito di lama di vetro o di diamante. L'osservazione delle sezioni ultrasottili è stata eseguita con il microscopio RCA (EMU 2 E) ⁽¹⁾. Alcune sezioni più spesse sono state colorate con il metodo di Perls.

(*) Nella seduta del 17 maggio 1958.

(1) L'osservazione è stata condotta dall'autore nel laboratorio di Microscopia elettronica dell'Institut de Recherches sur le Cancer « G. Roussy » dell'Università di Parigi. Si esprimono al Direttore prof. Ch. Oberling e al dott. Bernhard i sensi della più viva riconoscenza.

RISULTATI.

Nelle cellule promegaloblastiche e megaloblastiche che occupano i vasi della membrana corion-allantoidea, l'apparato di Golgi è costituito da un insieme di fasci paralleli di membrane osmiofile e da un sistema di vacuoli comunicanti tra loro di varia ampiezza delimitati da una membrana liscia. In alcuni vacuoli (fig. 1) si mettono in evidenza un certo numero di granuli ad elevata densità, di taglia per lo più uniforme (circa 60 Å), circondati da una sostanza poco densa ed amorfa.

Nelle cellule eritroblastiche situate nelle lacune spleniche o midollari, l'apparato di Golgi occupa una piccola regione citoplasmatica situata in una concavità del nucleo. L'apparato di Golgi è formato da brevi sistemi di membrane parallele, ma soprattutto da vacuoli di taglia variabile, comunicanti tra loro. Anche in queste cellule (fig. 2) alcuni vacuoli sono occupati da granuli aventi i caratteri sopradetti.

Anche nelle cellule reticolari ove si osservano voluminosi depositi di materiale ferruginoso prodotto dalla fagocitosi dei globuli rossi, i granuli di ferritina sono ammassati, talora nei mitocondri, tal'altra in piccole vescicole nella regione di Golgi. Con il metodo di Perls solo gli ammassi più voluminosi possono essere identificati al microscopio ottico.

DISCUSSIONE.

Recentemente Bessis e coll. [3] [4] [5] [6] [7] hanno studiato il ciclo del materiale ferruginoso nelle cellule reticolari e negli eritroblasti. Secondo questi Autori i granuli di ferritina elaborati nelle cellule reticolari ove si compie l'emolisi dei globuli rossi o l'accumulo di ferro proveniente dal plasma, vengono trasmessi agli eritroblasti mediante il fenomeno della *pino-citosi*. Negli eritroblasti i granuli di ferritina sono raccolti nei mitocondri, ove verosimilmente tale sostanza è ulteriormente elaborata in vista della sintesi emoglobinica. Con la presente osservazione viene per la prima volta messo in evidenza come, le granulazioni ferruginose siano situate anche nell'apparato di Golgi, la cui funzione nelle cellule eritroblastiche è poco conosciuta. Poiché l'apparato di Golgi in altre cellule svolge importanti funzioni elaborative, di secrezione e di deposito, è verosimile che la presenza di granuli di ferritina in esso, sia l'indizio della partecipazione di questo organulo cellulare al metabolismo del ferro nel quadro della sintesi emoglobinica. In effetti nella mielosi eritremica aviaria trasmissibile, nella quale è profondamente turbato il metabolismo emoglobinico delle cellule eritroblastiche, l'apparato di Golgi è caratterizzato da un'abnorme struttura ed in esso abbondano i depositi di materiale ferruginoso [1].

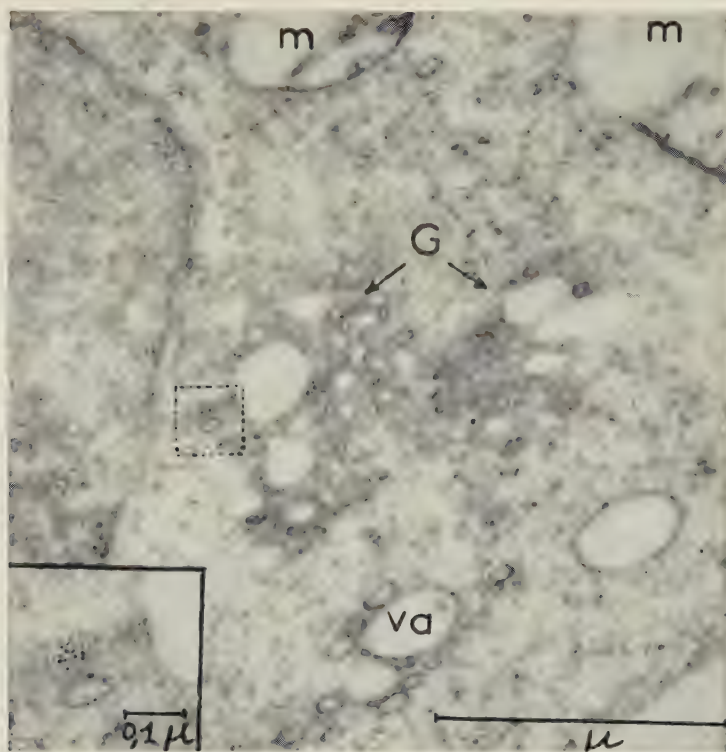


Fig. 1. - Promegaloblasto: Apparato di Golgi (G) costituito da membrane e da vacuoli (va) uno dei quali contiene granuli ferruginosi. (m) mitocondri.

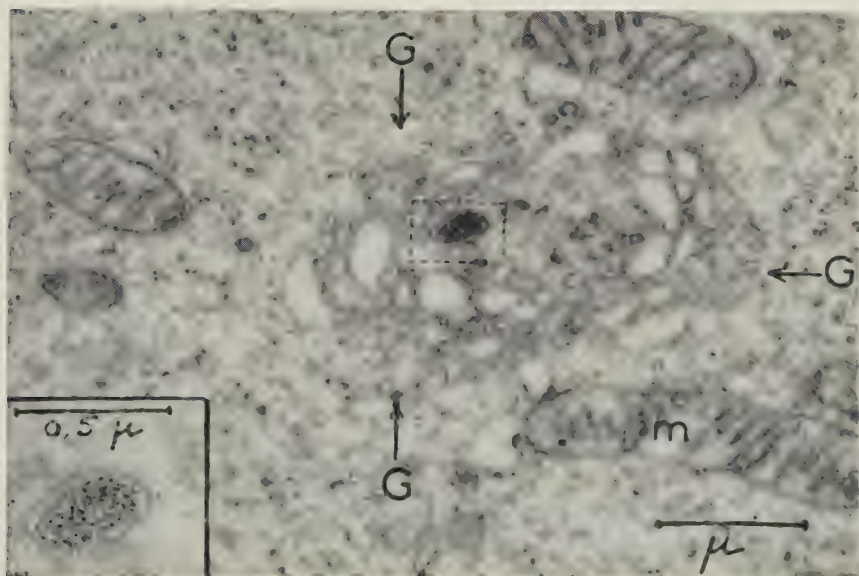


Fig. 2. - Proeritroblasto: apparato di Golgi formato prevalentemente da vacuoli. In uno di questi si osservano granuli ferruginosi.



BIBLIOGRAFIA.

- [1] BENEDETTI E. L. e LEPLUS R., « Rev. d'Hematologie », 1958 (in corso di stampa).
- [2] BESSIS M., « Bruxelles Med. », 37, 1321 (1957).
- [3] BESSIS M. e BRETON-GORIUS J., « Rev. d'Hematologie », 12, 43 (1957).
- [4] BESSIS M. e BRETON-GORIUS J., « C. R. Ac. Sc. », 244 2846 (1957).
- [5] BESSIS M. e BRETON GORIUS J., « C. R. Ac. Sc. », 244 (1957).
- [6] BESSIS M. e BRETON-GORIUS J., « La Semaine des Hôp. », 4, 411 (1957).
- [7] BESSIS M. e BRETON-GORIUS J., « J. Biophysic. Biochim. Cytol. », 3, 503 (1957).
- [8] FARRANT J. L., « Biochim. Biophysic. Acta », 13, 569 (1954).
- [9] HUGUENAU F. e BERNHARD W., « Arc. Anat. Micr. Morph. Exp. », 44, 27 (1955).
- [10] KUFF E. L. e DALTON A., « J. Ultrastructure Res. », 1, 62 (1957).
- [11] RICHTER G., « J. Exp. Med. », 106, 203 (1957).

Patologia. — *Sulla sensibilizzazione al calore da raggi ultravioletti di spore di B. subtilis* (*). Nota di GIUSEPPE FALCONE e GIORGIO CAVALLO, presentata (**) dal Socio L. CALIFANO.

Mentre alcune interpretazioni del complesso fenomeno della resistenza al calore umido delle spore batteriche si svolgono sulla peculiare struttura dell'involucro, altre, più recenti, riguardano costituenti chimici interni della spora.

Per quanto riguarda le teorie basate sulla struttura del rivestimento esse non sembrano trovare giustificazione nell'acquisizione che tale rivestimento ha, in effetti, uno spessore di soli 0,1 micron e difficilmente, come fa notare Virtanen [1], può esercitare una effettiva protezione dall'azione del calore. Il rivestimento potrebbe, invece, costituire un mezzo di protezione efficace, per effetto di permeabilità selettiva, contro le sostanze disinfettanti.

Sembra però verosimile che il fenomeno della resistenza debba ripartirsi a condizioni che proteggono le proteine enzimatiche delle spore dalla denaturazione termica.

Nei batteri la temperatura massima alla quale è ancora possibile la crescita coincide infatti quasi con quella di inattivazione degli enzimi cellulari. Edwards e Rettger [2] hanno trovato che in *B. mycoides*, germe questo con temperatura massima di crescita a 40 °C, la succinodeidasi è inattivata a 40 °C mentre la catalasi e la citocromossidasi a 41 °C. In *B. subtilis* il massimo di temperatura consentito è di 50 °C, e la succinodeidrogenasi viene inattivata a 51 °C, la catalasi a 56 °C e la citocromossidasi a 60 °C.

Per molto tempo si è creduto che le spore in stato di quiescenza non avessero alcuna attività enzimatica, recentemente, invece, da parte di nume-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Napoli.

(**) Nella seduta del 10 giugno 1958.

rosi ricercatori sono stati dimostrati in estratti di spore alcuni enzimi quali la alaninoracemasi (Stewart ed Halvorson [3]; Stewart [4]) la catalasi (Lawrence ed Halvorson [5]) e la adenosindeaminasi (Powell ed Hunter [6]; Lawrence [7]) tutti resistenti all'azione del calore. È stato visto, inoltre, da questi Autori, che la termoresistenza di questi enzimi ad eccezione della adenosindeaminasi, è associata con la presenza nella spora batterica di una particolare sostanza con massimo di assorbimento a 2700 Å.

Durante le prime fasi del germogliamento le spore, contemporaneamente alla comparsa di attività enzimatiche prima non svelabili, benché morfologicamente non abbiano subito modificazioni, perdono la caratteristica termoresistenza, liberano sostanze con massimo di assorbimento a 2700 Å (Falcone [8]) e il peso secco di esse diminuisce del 30 % mentre l'azoto totale ed aminico del terreno aumenta (Powell e Strange [9]).

Da ricerche di Powell [10] e di Powell e Strange [9] è risultato anche che il materiale liberato dalle spore consiste di un peptide e di acido dipicolinico (sale calcico) il quale costituisce il 50 % circa del materiale che viene eliminato dalla spora. Tale sostanza, assorbe fortemente a 2700 Å ed è identificabile con quella che si libera da spore di *B. subtilis* incubate con L-alanina (Falcone [8]) e, probabilmente, anche con quella liberata da spore riscaldate alla temperatura di inattivazione (Cavallo [11]) o in seguito a shock termico (Murty ed Halvorson [12], Harrell [13], Harrell e Mantini [14], Falcone [15]).

Poiché dunque in tutte le condizioni che determinano perdita di resistenza al calore delle spore si ha liberazione di acido dipicolinico sembrerebbe esistere rapporto fra i due fatti.

Non si sa, però, ancora nulla sul tipo di combinazione dell'acido dipicolinico con gli enzimi delle spore. Occorre sottolineare che l'acido dipicolinico è stato trovato soltanto nelle spore e mai nelle forme vegetative (Powell e Strange [9]) ed è dimostrato che esso viene sintetizzato durante la sporificazione (Powell e Strange [16]) ed eliminato nel corso della germinazione (Powell e Strange [9], Falcone [8]).

Il fatto che l'acido dipicolinico si trovi nelle spore quiescenti in forma legata (Harrell [13]) e venga liberato nel corso della germinazione ha permesso ad Halvorson e Church [17] di avanzare una ipotesi molto interessante sul meccanismo con cui questa sostanza condizionerebbe la quiescenza degli enzimi ossidanti il glucosio. Harrell [18] ha trovato che in estratti di spore di *B. cereus* l'ossidazione del glucosio è stimolata dall'aggiunta di acido dipicolinico ed inibita da ioni Ca^{++} , Hg^{++} , Zn^{++} , Sr^{++} , Cr^{++} , Ba^{++} e che l'inibizione da ioni calcio è reversibile per aggiunta di acido dipicolinico o di versene.

L'acido dipicolinico, che è un eccellente agente chelante, liberato dalle spore nel corso della germinazione, attiverebbe l'ossidazione del glucosio chelando il calcio, particolarmente abbondante nelle spore, e sbloccando così il sistema respiratorio inibito.

Da quanto si è esposto si può ritenere verosimile che la termoresistenza delle spore sia riportabile alla specifica resistenza dei rispettivi enzimi, legata

essenzialmente alle combinazioni di essi o di loro attivatori con l'acido dipicolinico.

I raggi ultravioletti, tra le varie azioni esercitate sulle cellule batteriche, sensibilizzano le spore all'azione del calore. Tale fenomeno scoperto inizialmente da Bovie e coll. [19 e 20] sui Parameci fu per la prima volta osservato nelle spore da Curran ed Evans [21] i quali, sperimentando con *B. cohaerens*, notarono che le spore dopo leggera irradiazione U. V. divengono più sensibili al calore di quelle non irradiate.

Come risulta dalla Tabella i raggi U. V. sensibilizzano all'azione del calore anche le spore di *B. subtilis* pure se in grado minore di quello osservato da Curran ed Evans per *B. cohaerens*. Il rapporto tra numero di spore sopravvissute al riscaldamento effettuato prima della irradiazione e quello delle spore sottoposte alla irradiazione e poi riscaldate, varia dipendentemente dal tempo di irradiazione. Esso inizia con irradiazione di 1260 ergs/mm^2 e raggiunge il valore più alto (circa 3 nella media dei nostri esperimenti) dopo 4 minuti di irradiazione (pari a 5040 ergs/mm^2). Nel caso di *B. cohaerens*, invece, si hanno valori massimi di 8,2 dopo 5 m' di irradiazione (6300 ergs/mm^2).

TABELLA.

	Riscaldamento m'	Irradiaz. U. V. m'	Riscaldamento m'	Numero spore viventi	Rapporto spore viventi serie «a» e serie «b»
<i>a</i> - 1	2	1	—	$6,7 \cdot 10^8$	1,44
2	2	2	—	$2,6 \cdot 10^8$	2,51
3	2	4	—	$7,8 \cdot 10^7$	3,11
4	2	8	—	$1,3 \cdot 10^7$	1,62
<i>b</i> - 1	—	1	2	$4,6 \cdot 10^8$	
2	—	2	2	$1 \cdot 10^8$	
3	—	4	2	$2,6 \cdot 10^7$	
4	—	7	2	$8 \cdot 10^6$	

Dal grafico n. 1 risulta la liberazione di sostanze assorbenti a 2700 \AA , e quindi identificabili con l'acido dipicolinico fin dal primo minuto di irradiazione (1260 ergs/mm^2). La quantità di sostanza liberata è proporzionale all'intensità della irradiazione stessa.

Con irradiazione di 8 minuti, con la quale l'effetto sensibilizzante non è più dimostrabile per l'intervenuto effetto letale dei R. U., la liberazione di acido dipicolinico è maggiore.

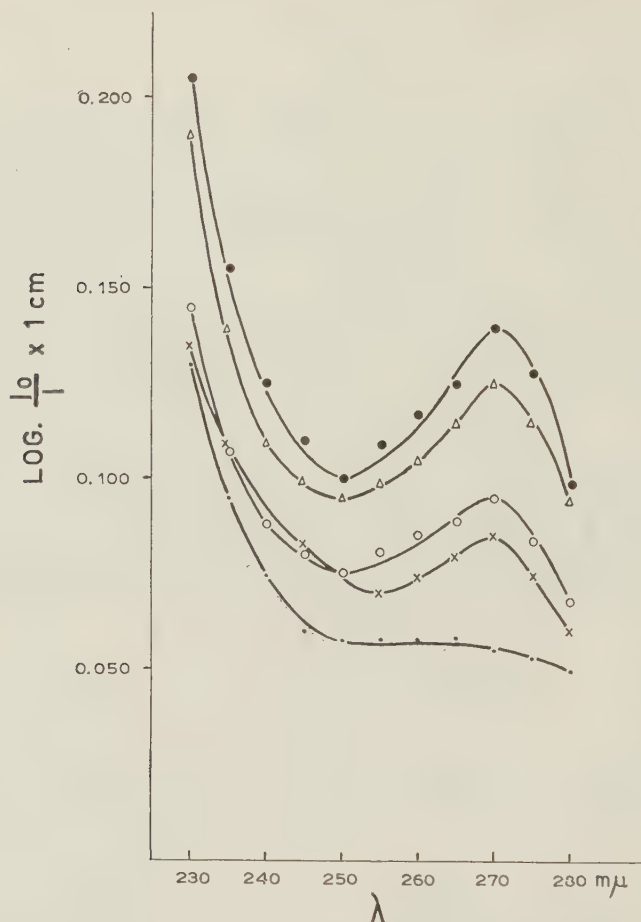


Fig. 1. - Curve di assorbimento di liquidi di centrifugazione di sospensioni di spore di *Bacillus subtilis*:

- — • cellule non irradiate
- × — × cellule irradiate con raggi U. V., 1260 ergs/mm²
- — ○ cellule irradiate con raggi U. V., 2520 ergs/mm²
- △ — △ cellule irradiate con raggi U. V., 5040 ergs/mm²
- — ● cellule irradiate con raggi U. V., 10080 ergs/mm²

Il fatto, dunque, che tra 1260 e 6000 ergs/mm² si ha liberazione di acido dipicolinico e contemporaneamente graduale sensibilizzazione al calore rende probabile l'ammissione di dipendenza tra i due fenomeni.

PARTE SPERIMENTALE.

Si è sperimentato con spore di *B. subtilis* (ceppo n. 21 della collezione dell'Istituto di Microbiologia della Rutgers University).

Le spore venivano preparate da colture su agar addizionato con MnSO₄ 0,01 %, tenute 7 giorni a 37 °C e quindi 7 giorni a + 2 °C, condizione questa ultima utile alla autolisi delle forme vegetative.

Le colture sporificate venivano raccolte con acqua, filtrate attraverso filtro di vetro Schott G-2, lavate 10 volte per centrifugazione, riscaldate a 60 °C per 60' allo scopo di uccidere le poche forme vegetative eventualmente presenti, lavate altre 4 volte con acqua, liofilizzate e conservate sotto pressione ridotta su cloruro di calcio.

Per ogni prova un'aliquota delle spore liofilizzate veniva pesata, lavata 4 volte, risospesa in acqua in modo da ottenere una concentrazione di 10 mg (peso secco) per ml.

Questa sospensione veniva distribuita in quantità di 3,5 ml in piastre di 12 cm di diametro, ed irradiata con raggi ultravioletti (21 ergs/mm²/sec) per tempi diversi (1, 2, 4, 8 minuti) e continuamente agitata per rendere il più possibile omogenea la irradiazione.

Le spore variamente irradiate venivano centrifugate a 9000 giri per 15' e sul sopranatante limpido si determinava l'acido dipicolinico in base al suo assorbimento specifico a 2700 Å, con spettrofotometro Beckman DU.

Una sospensione analogamente preparata era divisa in due quote; la prima delle quali era riscaldata per 2 m' a 100 °C in bagno maria e quindi divise in diversi campioni che venivano irradiati secondo le modalità già descritte. La seconda quota veniva, invece, prima irradiata e poi riscaldata.

Per la conta delle spore viventi si usava il metodo di Gratia modificato (Welsch e coll. [22]).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] VIRTANEN A. J. und PULKKI L., « Arch. Mikrobiol. », 4, 99 (1933).
- [2] EDWARDS O. F. and RETTGER L. F., « J. Bacteriol. », 34, 489 (1937).
- [3] STEWART B. T. and HALVORSON H. O., « J. Bacteriol. », 65, 160 (1953).
- [4] STEWART B. T., « Federation Proc. », 12, 275 (1953).
- [5] LAWRENCE N. L. and HALVORSON H. O., « J. Bacteriol. », 68, 334 (1954).
- [6] POWELL J. F. and HUNTER J. R., « Biochem. J. », 62, 381 (1956).
- [7] LAWRENCE N. L., « J. Bacteriol. », 70, 577 (1955).
- [8] FALCONE G., « Boll. Ist. Sieroterap. Milan. », 33, 460 (1954).
- [9] POWELL J. F. and STRANGE R. E., « Biochem. J. », 54, 205 (1953).
- [10] POWELL J. F., « Biochem. J. », 54, 210 (1953).
- [11] CAVALLO G., « Riv. Ist. Sieroterap. Ital. », 27, 213 (1952).
- [12] MURTY G. G. K. and HALVORSON H. O., « Bacteriol. Proc. », p. 46 (1956).
- [13] HARRELL W. K., « Bacteriol. Proc. », p. 44 (1956).
- [14] HARRELL W. K. and MANTINI E., « Canad. J. Microbiol. », 3, 735 (1957).
- [15] FALCONE G. e CARACÒ A., « Atti VII Congr. Intern. Microbiol. ».
- [16] POWELL J. F. and STRANGE R. E., « Biochem. J. », 63, 661 (1956).
- [17] HALVORSON H. and CHURCH B., « Bacteriol. Rev. », 21, 112 (1957).
- [18] HARRELL W. K., DOI R. H. and HALVORSON H. O., « J. appl. Bact. », 20, xiii (1957).
- [19] BOVIE W. T. and KLEIN A., « J. gen. Physiol. », 1, 331 (1918).
- [20] BOVIE W. T., and DALAND A., « Am. J. Physiol. », 66, 55 (1923).
- [21] CURRAN H. R., and EVANS F. R., « J. Bacteriol. », 36, 455 (1938).
- [22] WELSCH M., CAVALLO G. et CANTELMO P., « Rev. Belg. Path. Mèd. Exp. », 27, 241 (1953).

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Socio Giancarlo Vallauri

tenuta (*) dal Socio ANTONIO CARRELLI

Il giorno 7 maggio 1957, all'età di 75 anni in Torino si spegneva Giancarlo Vallauri. Una lunga malattia, sopportata con animo forte e rassegnato, aveva negli ultimi tempi lentamente indebolita una tempra resistentissima, che non aveva conosciuto mai tregua o riposo e che gli aveva permesso una vita piena di responsabilità, d'incarichi, di meritate soddisfazioni. Solo pochi anni or sono un male, da Lui giovanilmente sopportato e rapidamente vinto, aveva per poco offuscata la sua instancabile attività, che riprese subito dopo con maggiore lena. Quanti lo ricordano non possono non avere ben vivo dinanzi ai loro occhi il suo aspetto estremamente distinto, il suo fare affabile, il suo dire semplice e suadente, tutto il suo insieme insomma, che ne faceva una spiccata, indimenticabile personalità.

Nato a Roma il 19 ottobre del 1882, Ufficiale di Marina nel 1903, laureato in Ingegneria dopo, nel 1907, subito assistente universitario, può ben dirsi che nei lunghi anni d'insegnamento e di lavoro per la ricerca non abbandonò mai la sua tenace vocazione, quella per la Marina, e fu per tutta la sua vita Ufficiale e Professore, raggiungendo brillantemente nella carriera della Marina il grado di Ammiraglio, con promozione per merito di guerra e medaglie al valore, conquistate nelle campagne di guerra che condusse con mirabile attaccamento nel 1911-12, 1915-18 e 1940-43, e in quella scientifica le più alte qualifiche quali, per ricordare un esempio significativo, la Presidenza del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

La sua vita di studi cominciò all'Accademia Navale di Livorno e già in quei lontani anni, siamo al principio del secolo, egli mostrava ai suoi insegnanti ed ai suoi colleghi di quali capacità fosse dotato; ma un forte richiamo, l'altra vocazione della sua vita, lo attirò agli studi severi del Politecnico per perfezionare ancora la sua cultura e per soddisfare la sua tendenza per la tecnica di alta specializzazione e per la ricerca pura; lo vediamo nel 1907 laureato a Napoli in ingegneria elettrotecnica, la sua aspirazione era così esaudita. Inizia subito la carriera accademica quale assistente a Padova. Poscia a Napoli alla Scuola del Lombardi e dopo un intervallo di un paio di anni all'estero in Germania sia come tecnico e sia come assistente, lo vediamo di nuovo a Napoli professore incaricato di Fisica tecnica, ma già

(*) Nella seduta del 10 giugno 1958.

si delinea la sua futura specializzazione; gli viene infatti conferito l'insegnamento di Radiotelegrafia e Magnetismo navale, anzi è prima incaricato di questa specifica materia, e poi dell'altra. Nel 1916, quale vincitore di concorso è nominato Direttore dell'Istituto Elettrotecnico della Marina a Livorno; dopo alcuni anni di incarico a Pisa è nel 1923 vincitore di concorso per la materia fondamentale: l'Elettrotecnica. A Pisa le sue qualità d'insegnante e di uomo lo pongono in primissimo piano fra i professori di quel centro universitario; ed Egli è nominato Direttore di quella Scuola. Pisa doveva rappresentare la penultima tappa delle sue peregrinazioni; per quanto la Scuola d'Ingegneria di Napoli, che lo aveva conosciuto e quindi apprezzato per quello che valeva, facesse notevoli sforzi per averlo con sé, contando sul suo dinamismo, sulle sue possibilità d'organizzatore, la città di Torino vinse in questa lotta, e nel 1926 Vallauri è definitivamente stabilito nella città che fu la sua città di elezione, per occupare un altissimo posto: la cattedra di Guido Grassi.

È veramente arduo dare un resoconto sintetico preciso della sua attività. Di sicuro può dirsi questo: che comincia ufficialmente nel 1907 appena dopo la laurea, e termina solo con la sua morte. Ma volendo rievocare a Voi, Soci dell'Accademia, la figura di questo consocio, bisogna dire in primo luogo che il Vallauri fu un temperamento particolarissimo; dotato di un singolare fascino personale egli riuscì a suscitare nella sua lunga carriera un grande movimento di tecnici e ricercatori, e fu capace di tenere intorno a sé un notevolissimo numero di allievi devoti. La sua attività non conosceva soste, aveva un altissimo senso del dovere, e poneva un impegno profondo, volitivo, realizzatore in qualunque problema, in qualunque questione, senza che il lavoro rappresentasse mai stanchezza o desse origine al più piccolo senso di noia. Queste sue qualità erano evidentissime, e colpivano immediatamente il collaboratore od anche il semplice interlocutore che aveva la ventura d'imbattersi in lui; e non era dato a nessuno, nella cerchia delle sue attività, di procedere nel lavoro con fare distratto, senza impegno, senza passione, perché quando Lui agiva, produceva in chi gli era vicino il bisogno di adeguare sé stesso all'entusiasmante fervore della sua vitalità. Bisogna ancora aggiungere che è ben difficile trovare una persona così schiva di riconoscimenti ufficiali, e così assolutamente distaccata dalla più piccola brama di qualsiasi compenso materiale. Egli nella sua vita ha curato con passione parecchie attività: l'organizzazione della ricerca, lo studio di problemi scientifici, la direzione di periodici, la presidenza di riunioni, commissioni, sempre dominati con ordine, con precisione e signorilità, ma una credo, senza timore d'ingannarmi, sia stata dominante e, bisogna dire, coltivata con particolare successo; la passione per l'insegnamento. La sua capacità espositiva era veramente suadente e le lezioni, le conferenze, le esposizioni di ritrovati ed idee da Lui fatte sono veramente indimenticabili per chi ha avuto la ventura di assistervi. Ed in realtà fu la sua, sotto questo riguardo, una lunga luminosa carriera di ben quarantanni, nei quali con semplicità, affettuosa paternità, riuscì sempre ad imporre a tutte le studentesche, a quella di Napoli, di Pisa,

di Torino, un'austera disciplina; poi alla fine del corso, quando quelle giovani generazioni di studenti si tramutavano in Tecnici, in Insegnanti, in Ufficiali, tutte rimanevano legate a Lui con devozione ed entusiasmo, producendo in Lui, negli incontri che non mancavano, dati i suoi continui spostamenti, un'intima profonda sensazione di gioia.

Attaccato com'era alla famiglia nella sua avanzata maturità, ha avuto un dolore che lo ha terribilmente scosso, ed ha lasciato un senso di tristezza per tutto il resto della sua vita; la morte di uno dei suoi figli, giovane, audace aviatore, in un episodio bellico della seconda guerra mondiale. Dopo un periodo di grande scoramento, fortunatamente si riprese, e lo rivedemmo nuovamente pieno di quel suo fuoco interiore, giovanissimo di aspetto e di pensiero in mezzo ai giovani, sempre lieto di poter dare qualche contributo ai più svariati problemi che entravano nel larghissimo cerchio della sua competenza.

Il Vallauri ha vissuto ed ha operato in una fase particolarmente critica e caratteristica della Scienza; ha visto, proprio quando iniziava i suoi studi, il momento dello sviluppo, della presa di consistenza e valore dell'Elettrotecnica; questa Scienza diventava rapidamente un ramo fondamentale dell'Ingegneria, ramo che assumeva il suo assetto scientifico, in modo da poter dominare completamente ogni problema che si veniva delineando. Già come allievo universitario egli vedeva consolidare questo magnifico ramo collaterale dell'Elettrologia, ed aprirsi così un canipo esteso ed estremamente fruttuoso di ricerca.

Da pochi anni, prima della fine del secolo, si era organizzata per opera di Galileo Ferraris la prima associazione dei tecnici di questa scienza, e cioè era stata fondata l'Associazione Elettrotecnica Italiana, e già nel 1913 gli atti dell'Associazione avevano assunto un'importanza tanto notevole da far sentire la necessità di un periodico specializzato e con pubblicazione continua; veniva così alla luce, generato da questi bisogni, un nuovo periodico; l'Elettrotecnica, che ebbe fin dall'inizio una vita brillante e felice. Si voleva con esso soddisfare alla necessità di portare a contatto di moltissimi giovani, le cui file man mano s'ingrossavano, i problemi vitali che quella nuova branca di sapere mano a mano poneva, e molto spesso risolveva; e giustamente il Lori, cui bisogna attribuire l'idea, pensò di affidare il compito redazionale ad una terna di giovani, di tre mentalità, attività e tendenza diverse, in modo da poter coprire per le diverse competenze tutta la produzione, e questi tre giovani scelti, tre nomi ormai ben noti a tutti i cultori di questo ramo, furono Vallauri, Bordoni e Barbagelata: s'iniziava per merito di questi tre giovani quell'opera che fra l'altro dava origine a quei commenti redazionali di così alta efficacia e giusta impostazione, e che è stata così altamente proficua per il progresso tecnico del nostro Paese.

In un primo momento l'attività di Vallauri, quale ricercatore, è rimasta essenzialmente legata a questioni relative a problemi che potremmo considerare classici della Scienza elettrotecnica, e cioè in primo luogo al problema

dell'isteresi del ferro: il Vallauri non considera tale questione secondo l'indirizzo classico, ma studia e mette in evidenza particolarità interessanti relativamente a fenomeni di isteresi con cicli asimmetrici prodotti da campi magnetici alternativi, o campi ortogonali. In queste ricerche, che egli coltivò con fervore, i risultati raccolti valsero in quel periodo, nel quale il fenomeno del magnetismo ed in particolare quello dell'isteresi, era particolarmente oscuro, a lumeggiare molti elementi noti ed a portarne dei nuovi, arricchendo la fenomenologia di fatti che, come sempre accade, contribuirono notevolmente a mostrare la complessità di quelle manifestazioni che sono ancora oggi, con una Fisica tanto più progredita, al vaglio teorico per una definitiva interpretazione. Un problema che, come quello precedente, si considera classico nel campo dell'Elettrotecnica, ha ancora avuto una sua soluzione dal Vallauri; mi riferisco agli studi relativi alla impostazione ed alla risoluzione della questione che in quel momento rappresentava una delle più impegnative, e cioè: quella della duplicazione statica della frequenza. Altri problemi venivano posti in questo settore e si sviluppavano con non meno grande successo di quelli diremo già classici nel campo dell'Elettrotecnica. Questi problemi erano collegati con la grande scoperta del Marconi, che aveva dato all'umanità un nuovo e potente mezzo per trasmettere informazioni. È passato oggi poco più di un cinquantennio dalla prima volta che l'etere fu percorso da perturbazioni create dall'uomo, il progresso è stato così travolgente che è facile perdere il senso delle proporzioni; bisogna oggi rifarsi alla situazione nella quale si svolgeva la scoperta e lo sviluppo dell'idea marconiana. Da un lato v'era una genialità dotata d'una inventiva prepotente, una attività da poter definire puro intuito, che non ammette giustificazioni di sorta, ma che anche contro le più sicure affermazioni teoriche, risponde con la indipendenza di colui che non ha la mente vincolata da una cultura, ma che intuisce quasi per potere magico; quale esempio significativo di questa mentalità, può citarsi l'ottenuto collegamento fra le due sponde dell'Oceano mediante onde elettromagnetiche, e ciò contro ogni logica previsione, collegamento che è risultato possibile per la presenza nell'intorno della Terra di una entità prima sconosciuta: la ionosfera. Dall'altra parte invece, e cioè dal lato della teoria, quale elemento effettivamente sicuro, come impostazione logica, accettabile in modo completo, le equazioni di Maxwell, che molto genericamente racchiudono il modo con il quale dovrebbe realizzarsi l'irraggiamento e la propagazione delle onde elettromagnetiche nello spazio. Ed infatti solo in un momento posteriore, in uno stadio di una ricerca più organizzata, compare nel 1901 un lavoro fondamentale di Sommerfeld, che fissa le leggi della propagazione delle onde in funzione della conducibilità della Terra, e che permette una visione meno empirica del problema della propagazione, in rapporto alle varie lunghezze d'onda. Ma per esempio in quel primo momento ben poco era noto per ciò che riguarda il punto fondamentale della scoperta marconiana, e cioè sul modo di funzionare dell'antenna, sul suo rendimento, sul valore del campo prodotto, ed ancora rudimentali erano i mezzi di produzione e di ricezione delle onde. In un periodo che abbraccia all'inizio le

prime tre decadi di questo secolo, viene ad affermarsi un movimento di idee e di uomini che contribuisce a creare un nuovo ramo dell'Elettrotecnica: la Radiotecnica, e, come si è accennato, ciò veniva attuandosi in una soluzione paradossale; si aveva, da una parte una tecnica che si sviluppa molto rapidamente e con grandi successi, senza una visione d'insieme chiara che giustifichi i vari tentativi, e dall'altra una teoria molto astratta, che deve considerarsi molto lontana dallo studio raggiunto dalla tecnica. In tale situazione s'inserisce l'opera di Vallauri. Egli viene da un ambiente di studi severi, quali sono le scuole d'Ingegneria e dunque è dotato di una sensibilità tecnica che gli permette di rimanere sempre legato a realizzazioni concrete, e vedere il lato pratico, la necessità di una funzionalità di qualsiasi ritrovato, che non sia limitata ad un puro risultato scientifico, ma abbia invece le caratteristiche che permettono un esercizio continuo, efficace; d'altro canto la larga preparazione matematica e l'estensione della cultura nelle varie branche della scienza dell'Ingegneria lo mette nelle condizioni migliori per seguire l'interessantissimo sviluppo di questa nuova branca della scienza. In Italia il numero dei cultori di questo ramo non è molto numeroso, e Vallauri è il grande animatore di questa schiera, da cui sono usciti uomini eccellenti sia nel campo teorico sia nel campo puramente tecnico. Ed infatti la sua azione in questo campo è stata di duplice natura, ha esercitato in primo luogo una funzione organizzativa e di coerente realizzazione tecnica; ed ha lavorato e fatto lavorare teoricamente e sperimentalmente sulle questioni più vive che le varie scoperte nel campo della nuova tecnica ponevano. Le ricerche sperimentali, che si susseguono in un secondo periodo in modo continuo, riguardano essenzialmente il nuovo grande ritrovato: il triodo, e l'analisi del comportamento di questo geniale dispositivo dà luogo a numerosi lavori; in questi vengono studiati, dal punto di vista empirico, i vari modi di funzionamento, dando contributi essenziali alla loro utilizzazione pratica. In questo gruppo di ricerche bisogna ricordare come particolarmente significativa quello nel quale viene analizzata in una forma schematica e molto suggestiva, il funzionamento del triodo, riconoscendo in esso un sistema di due circuiti accoppiati sul tratto filamento-griglia, dando la prova di questa concezione, che esprime in una relazione (l'equazione di Vallauri) dimostrata nella sua validità mediante opportune esperienze. Pur lavorando con questo preciso indirizzo, è ancora da ricordare che non è tralasciata in tale attività, quella puramente tecnica applicata, in una espressione, quella di esercizio. E cioè si ha la progettazione, la costruzione ed il funzionamento di stazioni trasmettenti di grande potenza, in un primo tempo utilizzando l'uso della scintilla, e poi passando all'uso dell'arco Poulsen, e cioè quanto di più moderno e di più significativo si aveva in quel momento. L'attività di questo periodo è compiuta alla direzione dell'Istituto sperimentale della Marina. In quel momento era sentita in modo molto acuto dagli alti Ufficiali di quell'Arma la necessità della Scienza, quale essenziale ausilio dei mezzi bellici, e particolarmente quelli della navigazione. La Marina ebbe quindi la necessità di costituire un Ente moderno, atto alla sperimentazione ed alla ricerca dei campi più moderni

e la direzione di esso, con compiti che abbracciano tutto il complesso degli studi della radiotecnica, fu affidata come si è detto, dopo regolare concorso ad un giovane Ufficiale da pochi anni laureato. Ed Egli non si limita ad una azione di organizzazione, ma procede ad opere di progetto ed esercizio dei dispositivi più recenti; e la direzione di questo Istituto elettrotecnico radio-telegrafico della R. Marina, costituito a Livorno, di cui uscì una schiera numerosissima di ricercatori e di tecnici, fu tenuta da Lui per molti anni anche quando passò nei ruoli universitari. Ed è in questo periodo che egli si occupa ancora di problemi squisitamente moderni: quali la misura della frequenza di oscillatori piezoelettrici ed elabora un sistema per compiere misure sull'intensità del campo elettromagnetico su onde transoceaniche; in tal modo veniva approfondito, e con misure difficili, compiute con dispositivi particolarmente elaborati, il problema che rappresentava il più oscuro ed il più significativo nel campo della radiotecnica e cioè il problema della propagazione delle onde elettromagnetiche nello spazio. Quando nel 1926 lasciò Pisa perché chiamato alla Cattedra di Guido Grassi e quindi come successore del maestro di tutti i maestri: di Galileo Ferraris, si sviluppò un altro e ben più significativo periodo della sua vita. La grande metropoli piemontese, che aveva una forte industria elettrica di larghe capacità, la SIP, rappresentò l'ambiente ideale perché Egli, maestro, tecnico e ricercatore, potesse realizzare un suo grande sogno. Man mano che gli anni passavano egli sentiva che lo studio teorico e sperimentale, e la realizzazione industriale nel campo della radiotecnica richiedevano, per un paese come l'Italia, un centro propulsore capace di coordinare e potenziare le varie attività; la complessità sempre crescente dei problemi di radiotecnica era già al punto di non permettere che varie iniziative fossero lasciate più o meno disperse. Questo Centro, nella sua mente, deve rappresentare la fucina della ricerca in questo campo, deve essere la fonte di studio e di propulsione dei vari ricercatori e deve poi essere pronto per le varie possibilità della ricerca futura; i campi di studio sono da compiere a largo raggio perché dalla radiotecnica si passa per necessità di coordinamento e di sviluppo ad argomenti relativi a problemi affini. Nasce così in Lui l'idea di dotare il Politecnico e la città di Torino di un Istituto che potesse soddisfare a tutte queste varie e complesse esigenze. Il piano di costruzione dell'Istituto dimostra in maniera evidentissima le sue rare qualità di equilibrio e di concretezza; in primo luogo l'Istituto doveva ospitare tutti gli insegnamenti del ramo elettrotecnico della scuola di Ingegneria, quindi attribuisce ad esso una prima funzione essenziale: quella didattica; poi l'Istituto doveva articolarsi in varie sezioni di studi e di ricerca con tre compiti distinti: formazione di tecnici specializzati in modo completo, sviluppo di ricerche nei vari campi, assistenza ai problemi industriali; tutto ciò concepito con larghezza di visione in modo che i problemi allo studio potessero essere non soltanto quelli puramente radiotecnici; le difficoltà incontrate alla realizzazione non furono poche; se è ben vero che la SIP generosamente dette per l'inizio dell'impresa, di ben altre entità furono le somme necessarie per la costruzione dell'edificio, per l'attrezzatura scientifica dei vari reparti, per la

dotazione necessaria ed un efficace concreto funzionamento; ma pur dibattendosi anche nella difficile congiuntura economica nella quale venne a trovarsi, Egli con costanza, con alta fede, sicuro della bontà della causa che sosteneva, ebbe la grande soddisfazione di poter il 23 settembre 1935 inaugurare in Torino l'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris. Così anche l'Italia ebbe un Istituto che può competere con successo con gli Istituti similari di altri paesi, estremamente più ricchi del nostro.

Ma contemporaneamente al completamento dei lavori e all'avviamento dell'attività dell'Istituto, il Vallauri attua un altro progetto che è da considerare il necessario completamento di quanto aveva già realizzato e cioè la fondazione di una nuova specifica rivista scientifica atta a seguire lo sviluppo di questo nuovo ramo della elettrotecnica. Alta Frequenza da Lui voluta e creata, e da Lui diretta per ben un quarto di secolo, ha rappresentato e rappresenta tuttora un veicolo d'informazione veramente prezioso e che ha dato una grande risonanza internazionale ai nostri studi in tale campo. Il Vallauri fu di quella rivista un direttore ideale; paternamente attaccato a questa sua creatura, ne curò le sorti con diligenza e con amore. Quanta parte il suo lavoro personale di sue idee, di sue ricerche finisse anonimamente nelle pagine di Alta Frequenza è molto difficile dire. A noi è dato ora di guardare con ammirazione i 25 volumi che si allineano sugli scaffali delle biblioteche, pensando che tutto quanto è in essi contenuto fu rivisto, vagliato, giudicato da lui.

Quanto penoso è stato il lavoro di revisione, quanto faticoso lo scarto di ciò che non era degno di pubblicazione? Noi non possiamo saperlo, possiamo ricordare che egli dichiarava di essere ben soddisfatto che la rivista venisse fuori con la più perfetta regolarità, portando al giudizio dei tecnici il lavoro man mano compiuto da quell'insieme di studiosi, che egli aveva saputo animare e lanciare con fede e passione nel difficile campo della Scienza. Ma nella sua carriera di ricercatore bisogna ricordare ancora un'ultima fase che a me sembra particolarmente significativa. Proprio alla fine della sua vita, quando la Radiotecnica aveva raggiunto un grado di sviluppo tale da rappresentare un elemento essenziale nella vita della civiltà moderna, quando essa si era già tanto evoluta da creare una nuova specializzazione, l'Elettrotecnica, e nasce come dottrina a sé la Scienza della informazione, egli negli anni che vanno dal '51 al '56 ha voluto ritornare con una indagine teorica e sperimentale ai principi fondamentali dell'elettromagnetismo; ed ha portato un contributo chiarificatore alle leggi dell'induzione, riandando con mezzi moderni, di larga e precisa sensibilità, alla verifica dei principi fondamentali delle equazioni di Maxwell, dando così ancora una conferma che può dirsi più diretta della più geniale intuizione del fisico inglese, base di tutti i progressi futuri: e cioè la corrente di spostamento.

Ma se in tal modo noi abbiamo fatto sommario cenno della sua attività di tecnico, di maestro, di ricercatore, non abbiamo esaurito questa complessa figura. Bisogna pur ricordare che quanto abbiamo detto fruttò a Lui i più

alti riconoscimenti nel campo accademico; oltre che nostro consocio, fu membro dell'Accademia Pontificia delle Scienze, di quella dei XL, dell'Accademia delle Scienze di Torino, per citare le più importanti, ed ancora di altri sodalizi stranieri. Medaglia d'oro dei benemeriti del Ministero della Pubblica Istruzione, della Marina, dell'Associazione Elettrotecnica Italiana di cui fu anche brillante ed amato Presidente.

Le pubbliche Amministrazioni e gli Enti si avvalsero molto spesso e nelle più varie occasioni di Lui, perché ben sapevano con quanta oculata diligenza egli compisse gli incarichi assunti: fra i tanti piace a me citare i più importanti, come per esempio quello di Capo Missione della Delegazione Italiana nel 1930 a Berlino per la Conferenza Mondiale dell'Energia e quindi a Washington nel 1936 allo stesso scopo, e nel 1950 a Rapallo, Presidente della Conferenza Internazionale di Radiodiffusione. Né sono mancati altri alti incarichi tra i quali quello di Presidente della SIP, e quello che ricordo qui a voi con reverenza e commozione, di Presidente dal 1934 al '43 della EIAR, dove ha lasciato un indimenticabile ricordo: e l'Ente si avvalse nuovamente della sua opera perché fu nominato in tempi recenti Presidente del Comitato Tecnico Consultivo della RAI, succeduto all'EIAR.

Oggi Vallauri non è più tra noi: la sua salma riposa nella Villa di S. Albano, a Lui cara, come gli Istituti di ricerca e di lavoro da Lui fondati e diretti: perché quella villa rappresentava un altro dei poli principali dei suoi affetti; la famiglia.

Ma se ci addolora la sua dipartita, se rimaniamo pensosi e tristi pensando che non possiamo più avere il diletto della sua compagnia e l'esempio della sua attività spassionata, una considerazione deve consolarci: la sua fu una vita ben spesa, attiva, completa preparazione serena alla morte che fu per Lui il coronamento di quanto aveva così nobilmente prodotto.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà la parola al Collega Antonio Carrelli che commemora il compianto Socio prof. Giancarlo Vallauri.

Alla commemorazione assistono l'ing. Edoardo Lombardi, in rappresentanza delle famiglie Vallauri e Lombardi ed anche quale Presidente del Comitato Italiano per le Conferenze Mondiali dell'Energia, già presieduto dal prof. Vallauri; il Socio Perucca, Presidente dell'Accademia delle Scienze di Torino, in rappresentanza dell'Accademia stessa e del Rettore del Politecnico torinese; il prof. Arnaldo Maria Angelini per il Presidente dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale «Galileo Ferraris»; il prof. Algeri Marino, Presidente del Consiglio Superiore Tecnico del Ministero delle Poste e Telecomunicazioni e il prof. Albino Antinori del Consiglio d'Amministrazione P. T. del Ministero delle Poste e Telecomunicazioni. Numerose le adesioni pervenute, tra le quali un messaggio dell'ing. Giuseppe Vallauri, figlio dello Scomparso.

Il Presidente ringrazia il Socio Carrelli per l'elevata orazione e rinnova ai familiari del compianto prof. Vallauri i sentimenti del più vivo cordoglio della Classe e suo personale per la scomparsa del valoroso scienziato e del carissimo amico.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Giovanni Sansone presenta i volumi VII, VIII, IX, e X dell'Edizione nazionale delle Opere di Luigi Bianchi con le seguenti parole:

« Il volume VII sui " Problemi di rotolamento " si apre con una introduzione di W. Blaschke e contiene un gruppo di Memorie pubblicate dal Bianchi nel periodo 1913-1917.

« Sono studiate specialmente le congruenze di rotolamento che vengono collegate con la difficile teoria delle superficie isoterme e con quelle a rappresentazione isoterma. Sono determinate le congruenze rettilinee le quali in infiniti modi si possono considerare di rotolamento, e vengono approfonditi i legami tra queste congruenze e quelle di sfere di Ribaucour.

« Con gli studi del Bianchi la cinematica con due o più gradi di libertà diventa un valido strumento di ricerca della Geometria differenziale.

« Il volume VIII a cura di Mario Villa riguarda in certo senso, come diceva F. Enriques per i problemi di geometria algebrica da Lui affrontati con Castelnuovo e Severi, una vetrina di modelli nei quali si rispecchiano i fenomeni che caratterizzano ampie classi di superficie dello spazio ordinario e degli spazi a curvatura costante.

« In queste ricerche, come peraltro in tutto il complesso dell'Opera del Bianchi, si ammira una profonda visione dei problemi geometrici, trattati poi in modo estremamente perspicuo con la continua fusione dei metodi geometrici e di quelli analitici.

« Il volume IX contiene un'introduzione del compianto geometra A. Maxia, allievo di E. Bompiani, sulla Geometria degli spazi di Riemann, che in un certo senso può considerarsi come una costruzione artistica della geometria di questi spazi.

« Vi si notano le cosiddette identità del Bianchi, da lui ritrovate indipendentemente da G. Ricci-Curbastro, che come scrive A. Buhl possono avvicinarsi alla stocksiana formula elettromagnetica di Maxell e mettono quindi in evidenza come gli spazi di Riemann tendono a prolungare il mondo dei fenomeni elettromagnetici; sono altresì da ricordare la classificazione completa nel campo reale dei vari tipi di spazi riemanniani V_3 che posseggono gruppi di movimenti, e i cosiddetti " spazi normali " del Bianchi.

« Il vol. X " Ricerche varie " riguarda alcuni studi che pur essendo collegati ad altri del Nostro fu ritenuto opportuno di raccogliere in un gruppo speciale.

« Ha curato questo volume comprendente otto Memorie e Note, P. Torricelli che vi ha premesso un'affettuosa introduzione.

« Due lavori del 1922 riguardano " Le reti di Tchebycheff sulle superficie e il parallelismo nel senso di Levi-Civita " e il " parallelismo di Levi-

Civita nella metrica degli spazi curvi'', parallelismo che il Bianchi così come il Severi, Pérès, Bompiani considerarono immediatamente importante e fecondo di nuovi risultati per la geometria.

«La stampa delle Memorie del Bianchi proposta circa trent'anni fa da Enrico Bompiani e dal compianto Gaetano Scorza è terminata per lo sforzo congiunto di tanti valorosi colleghi matematici italiani e stranieri che ho via via ricordato nella presentazione dei precedenti volumi e di questi ultimi: parlo di Enea Bortolotti, di G. Ricci, F. Conforto, U. Amaldi, E. Bompiani, R. Calapso, B. Gambier, P. Tortorici, V. Strazzeri, W. Blaschke, M. Villa, A. Maxia.

«A questi volumi ne seguirà ancora un altro sul carteggio matematico di Bianchi coi matematici del suo tempo a cura di E. G. Togliatti.

«Il lavoro può ormai considerarsi virtualmente compiuto. Enea Bortolotti che lo iniziò ed io che lo continuai dopo la sua immatura scomparsa, non avevamo mai considerato la somma di difficoltà tecniche e finanziarie che avremmo incontrato nel nostro cammino: le prime, come ho detto, furono superate grazie all'aiuto di tanti colleghi ai quali va il grazie dell'U.M.I. e mio personale, le seconde pel generoso contributo finanziario del C.N.R., al quale va pure il sentito ringraziamento dell'U.M.I. e di tutti i matematici.

«Anche un cordiale grazie va all'editore Paolo Cremonese che si è adoperato in ogni tempo perché l'edizione del Bianchi corrispondesse alle belle tradizioni dell'editoria italiana».

Il Presidente Giordani si compiace vivamente con il Collega Sansone per il prezioso contributo da lui dato all'importante opera.

Il Socio E. Bompiani desidera sottolineare che la presentazione nella seduta odierna degli ultimi quattro volumi delle Opere del Bianchi, non solamente torna a onore del Collega Sansone e dell'Unione Matematica, ma ha anche il valore di una vera e propria commemorazione del Maestro nel trentesimo anniversario della morte, avvenuta il 6 giugno 1928. Dopo aver ricordato che la pubblicazione delle Opere sopra citate fu deliberata dalla Commissione Scientifica dell'Unione Matematica alla fine del 1938, il Socio Bompiani osserva che l'impresa ebbe effettivamente inizio soltanto nel 1952 ed è stata conclusa nel 1958, anno nel quale ricorre anche il cinquantenario della premiazione, da parte dell'Accademia di Parigi, della fondamentale Memoria di Luigi Bianchi sulla deformazione delle quadriche.

L'oratore conclude, esaltando la figura gigantesca di scienziato e di maestro del Bianchi che, tra gli innumerevoli e altissimi meriti, ebbe anche quello di essere stato pioniere della geometria differenziale, molti capitoli della quale sono stati da lui profondamente e genialmente rinnovati, alla luce di una concezione moderna della scienza che egli fu uno dei pochissimi ad avere in Italia, nonostante che la Scuola Matematica Italiana fosse allora in pieno splendore.

Il Socio Aloisi presenta il volume 2° del «Trattato di Patologia Generale» del compianto Collega Guido Vernoni, già tutto in bozze al momento della morte dell'Autore e pubblicato a cura dello stesso prof. Aloisi, per portare alla luce il frutto degli ultimi anni di vita e di lavoro dell'insigne Scienziato.

Il predetto volume è diviso in tre sezioni, delle quali l'una è dedicata alle malattie secondo le loro cause, esterne o interne, la seconda alle malattie secondo il sistema organico in cui hanno sede, la terza ai tumori nella quale l'Autore ha esposto ancora più distesamente le proprie vedute originali. Il volume è riccamente illustrato e presenta una fotografia del Collega scomparso.

Il Socio Picone presenta, il volume pubblicato per la celebrazione del centenario della nascita di Emile Picard, con le seguenti parole:

«A nome del prof. René Garnier dell'Istituto di Francia, ho l'onore di presentare all'Accademia, come omaggio reso dal Comitato di patronato per la celebrazione del centenario della nascita di Emile Picard, il volume pubblicato dal Comitato stesso al quale sono consegnati i discorsi pronunciati nella cerimonia tenuta all'Università di Parigi, alla Scuola Centrale detta "des Arts et Manufactures" e alla "Maison des Centraux".

«È da notare il posto preminente dato al discorso pronunciato dal rappresentante della nostra Accademia, che immediatamente segue quelli del rappresentante del Ministero della Pubblica Istruzione francese, del rappresentante dell'Accademia di Francia e del Presidente del Comitato di patronato».

Il Socio Meneghetti presenta il suo compendio di «Farmacologia» in due volumi, mettendo in evidenza come il primo di questi comprenda le parti di prevalente interesse teorico, cioè la farmacologia generale e la farmacologia speciale, mentre il secondo è dedicato ad argomenti di maggiore importanza pratica, quali gli elementi di farmacologia terapeutica, gli elementi di tossicologia e quelli di chemioterapia.

L'autore esprime la sua speranza che l'opera possa avere raggiunto una sintesi efficace e sia utile a quanti si dedicano allo studio della farmacologia.

Il Socio E. Bompiani presenta il I volume del «Corso sulla teoria della turbolenza», tenuto a Varenna dal 1° al 10 settembre 1957 per iniziativa del Centro Internazionale di Matematica Estivo (C.I.M.E.).

Presenta poi tre suoi volumi, due di Geometria analitica, uno di Geometria descrittiva nei quali l'autore si propone di mutare l'indirizzo tradizionale dell'insegnamento di tali materie in Italia immettendovi idee nuove la cui fecondità per la Scienza è manifesta. Ciascuno dei primi due volumi è corredato da un'Appendice del prof. C. Longo sull'algebra generale e sugli spazi grafici e sulle coniche e quadriche in spazi lineari finiti.

Il Presidente ringrazia i Colleghi che hanno offerto opere in omaggio all'Accademia.

Il Segretario Accademico presenta le opere pervenute in dono all'Accademia.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Margaria, Cambi, Califano, Natta, Caglioti e Picone.

Viene letto l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria. Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

NATTA G., MAZZANTI G. e CORRADINI P. — Polimerizzazione stereospecifica dell'acetilene (pres. dal Socio G. NATTA).

ELIANU J. — Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali. Nota I (pres. dal Socio M. PICONE).

ELIANU J. — Sulla rappresentazione delle funzioni analitiche di più variabili reali. Nota II (pres. dal Socio M. PICONE).

LIVREA G. e DE STEFANO F. — Il comportamento delle diverse frazioni dell'N. del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

LIVREA G. e DE STEFANO F. — Il comportamento delle diverse frazioni dell'N. del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per malnutrizione orizantica. Nota III (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

LOMBARDI E. e GIUFFRÈ L. — Struttura dei bassi polimeri lineari dell'acetilene (pres. dal Socio G. NATTA).

MOISIL G. — Intorno ad un problema della teoria dei complessi unidimensionali (pres. dal Socio B. SEGRE).

TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E. — Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. — V. Contributo sperimentale allo studio della fisiologia della giunzione gastro-esofagea nell'uomo (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E. — Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. — VI. Eccitabilità della peristalsi secondaria (o extra-deglutitoria) anche nel tratto sovraortico dell'esofago (pres. dal Corrisp. G. AMANTEA).

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente presenta il fascicolo 4 (aprile 1958) dei Rendiconti, rinnovando ancora una volta il suo vivo ringraziamento ai Segretari accademici per la diligenza e la solerzia con le quali seguono la pubblicazione.

Il Presidente dà quindi notizia del Convegno sugli aspetti medici e sociali, che avrà luogo a Siena nei giorni 22 e 23 giugno c. a. e del VI Convegno Internazionale delle Comunicazioni, che si svolgerà a Genova dal 7 al 12 ottobre p. v.

TEMI DI DISCUSSIONE

Il prof. Giordani invita i Soci a formulare proposte per i temi di discussione da tenere nel prossimo anno accademico.

Il Socio Montalenti, anche a nome del prof. Chiarugi, prospetta l'opportunità di una discussione sull'Evoluzione, che potrebbe aver luogo anche in collaborazione con studiosi stranieri se il C.N.R. volesse finanziare l'impresa.

Il Presidente prega il Socio Montalenti di prendere gli accordi del caso con i Colleghi della Categoria V e di presentare poi alla Presidenza concrete proposte.

Il Socio Ghigi, anche a nome del Collega Cotronei, richiama l'attenzione della Classe sul grave problema dell'uso eccessivo degli insetticidi, che potrebbe essere studiato dai Soci della Categoria V d'intesa con i Colleghi Chimici.

Il prof. Ghigi osserva in proposito che l'uso indiscriminato degli insetticidi produce una graduale scomparsa della fauna e viene a turbare quell'equilibrio della natura che regola tutti i rapporti della vita organica. Cita, ad esempio, la scomparsa, già avvenuta, di molti pronubi e la preoccupante diminuzione degli uccelli, la distruzione della fauna autoctona della Sardegna e ricorda inoltre l'impoverimento delle acque dolci di quell'isola, con i conseguenti gravissimi danni alla piscicoltura, privata del pascolo costituito dalle larve degli insetti antibiotici.

Il Socio Chiarugi è pienamente d'accordo con il Collega Ghigi ed esprime la sua convinzione che è assolutamente necessario conservare, nei rapporti organici, quell'equilibrio iniziale stabilito dalla natura per evitare che, rompendo tale equilibrio, l'uomo venga alla fine a trovarsi in un ambiente ostile.

Il Presidente invita i Soci Chiarugi e Ghigi a prendere gli opportuni accordi con i Colleghi della Categoria V per riferire quindi alla Presidenza e assicura che, per una eventuale discussione sugli insetticidi, i Biologi potranno senz'altro fare affidamento sulla collaborazione dei Chimici.

Il Socio Armellini crede che un argomento interessante per una discussione scientifica potrebbe essere quello delle stelle magnetiche ma, data la complessità del problema, si riserva di fare concrete proposte dopo essersi consultato con il Collega Abetti e con gli altri astronomi.

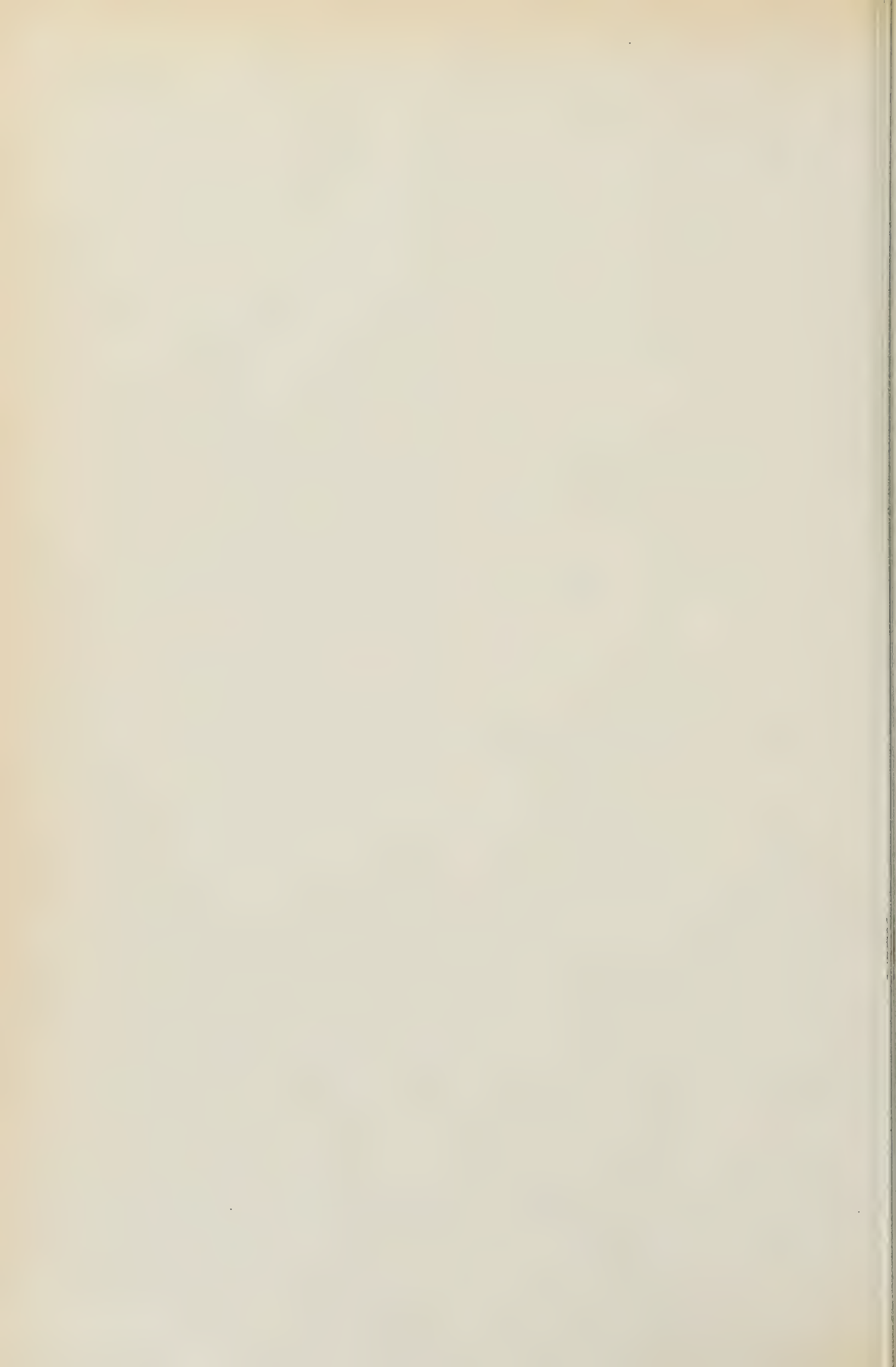
OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 10 giugno 1958

- AGOSTINI Sergio. — *Progetto per un porto su spiaggia sottile per navi da 50.000 tonnellate*. Ravenna, 1957. Dattiloscritto e tavole.
- BIANCHI Luigi. — *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. VII: *Problemi di rotolamento*. Roma, Edizioni Cremonese, 1957. Pp. 361, in-8°.
- *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. VIII: *Classi speciali di superficie*. Roma, Edizioni Cremonese, 1958. Pp. 398, in-8°.
- *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Vol. IX: *Geometria degli spazi di Riemann*; vol. X: *Ricerche varie*. Roma, Edizioni Cremonese, 1958. Pp. 344, in-8°.
- BOMPIANI Enrico. — *Geometria analitica*. Vol. I e II con appendici di C. Longo, Roma, Litografia Marves, 1958. Voll. 2, in-8°, con figg. (In litografia).
- *Geometria descrittiva con applicazioni*. Roma, Litografia Marves, 1958. Pp. 314, in-8°, con figg. (In litografia).
- BOSSOLASCO Mario. — *Contributo al paleomagnetismo in Italia*. Estr. da « Geofisica Pura e Applicata », vol. XXXIV, 1958, n. 1.
- *Vedute sull'influenzamento artificiale dei fenomeni meteorologici*. Estr. da « Geofisica e Meteorologia », vol. VI, 1958, nn. 1-2.
- BRUNI Giordano. — *Ammassamento e suddivisione della materia*. Estr. da « La Rivista Italiana del Petrolio », 1952, n. 230, giugno.
- *Il coesile critico dell'acqua*. Estr. da « Chimica nel Mondo », 1954, n. 6-7, giugno-luglio.
- *Il coesile e la reazione fisica di congelamento dell'acqua al punto triplo ordinario*. Estr. da « Chimica nel Mondo », 1954, n. 10, ottobre.

- BRUNI Giordano. — *Coesili e molecole*. Estr. da «La Rivista Italiana del Petrolio», 1951, giugno-agosto.
- *Coesione e spessore pellicolare dell'acqua in equilibrio col ghiaccio I e vapore*. Estr. da «Chimica nel Mondo», 1954, n. 2, febbraio.
- *La determinazione della coesione nei liquidi*. Estr. da «La Rivista Italiana del Petrolio», 1952, n. 236, dicembre.
- *Elasticità e plasticità*. Estr. da «La Rivista Italiana del Petrolio», 1953, n. 243, luglio.
- *Gli individui ghiandolari del macrocosmo*. Estr. da «Eco del Lavoro», 1954, novembre-dicembre.
- *Una lettera degli Ingegneri di Buenos Aires al prof. Giordano Bruni [e risposta]*. Estr. da «Il Monitore Tecnico», 1957.
- *Il modulo di riempimento dello spazio dedotto dallo spessore pellicolare dei liquidi*. Estr. da «Rivista Italiana del Petrolio», 1953, n. 248, dicembre.
- *La quantizzazione nel cicloesano*. Estr. da «La Rivista Italiana del Petrolio», 1953, n. 246, ottobre.
- *Relazioni semplici fra le temperature caratteristiche dell'acetilene*. Estr. da «Idrocarburi», 1953, novembre.
- *Una sintomatica coincidenza. Il tempo di espansione dell'universo e l'età della materia sono dello stesso ordine di grandezza*. Estr. da «Chimica nel Mondo», 1954, n. 3.
- *Lo spessore pellicolare del benzolo al punto triplo*. Estr. da «Idrocarburi», 1954, n. 5.
- *La velocità della luce superata*. Estr. da «Metano», a. VII, 1953, n. 6.
- Centenaire de la naissance de Émile Picard*. Paris, Impr. Pierre Neveu, s.d. Pp. 108, in-8°.
- CENTRO INTERNAZIONALE DI MATEMATICA ESTIVO. — *Corso sulla teoria della turbolenza. Varenna, 1-10 settembre 1957*. Vol. I. Torino, Libreria Editrice Universitaria Levrotto e Bella, s.d. Pagine varie, in-8° (In litografia).
- CIFARELLI Antonio Pippo. — *Ago e Siringa a servizio della Scienza Medica. (Appunti per una Storia della Tecnica Parenterale)*. Estr. da «L'Educazione Umana», a. IX, 1958, n. 4, luglio-agosto.
- DE MENEZES ACCIAIUOLI Luiz. — *Geologia de Portugal. Ensaio Bibliográfico. A-P*. Lisboa, Direcção-Geral de Minas e Serviços Geológicos, 1957. Pp. XLVIII-362, in-8°.
- DI BENEDETTO Giovanni. — *Bibliografia Marconiana*. Supplemento a «La Ricerca Scientifica», a. XXVIII, 1958.
- FLESZAROWA Regina. — *Retrospektywna bibliografia geologiczna Polski*. P. I: 1900-1950. Vol. I, fasc. 1: A-L; vol. I, fasc. 2: L-Z. Warszawa, Wydawnictwa Geologiczne, 1957-1958. Voll. 2, in-8° (Instytut Geologiczny. Muzeum Ziemi).
- HAIKONEN T. — Vedi: SUCKSDORFF C. and HAIKONEN T.
- LONGO Biagio. — *A proposito di un rilievo alla mia teoria della nutrizione dell'embrione della «Cucurbita» operata per mezzo del tubetto pollinico*. Estr. da «Bollettino (Contribuzioni) dell'Istituto Botanico dell'Università di Catania», vol. II.
- LONGO C. — Vedi: BOMPIANI Enrico.
- MENEGHETTI Egidio. — *Farmacologia*. 9ª ed. T. I.: *Farmacologia generale e speciale*; t. II: *Elementi di farmacologia terapeutica, di tossicologia e di chemioterapia*. Padova, CEDAM, 1958. Voll. 2, in-8°, con figg.
- PANNARIA Francesco. — *Giano e la fisica*. Estr. da «Civiltà delle Macchine», 1956, n. 1, gennaio-febbraio.
- *La materia incombinata*. Estr. da «Bollettino della Federazione Nazionale degli Ordini dei Chimici», a. VII, 1958, n. 3. [Segue]: *Sincro-?-Trone*. Estr. da «Bollettino della Federazione Nazionale degli Ordini dei Chimici», a. VII, 1958, n. 2.
- SUCKSDORFF C. and HAIKONEN T. — *The Nurmijärvi Geophysical Observatory*. Estr. da «Geofisica», vol. V, n. 4.
- VERNONI Guido. — *Trattato di patologia generale*. Vol. II. Firenze, Sansoni, 1958. Pp. XIII-1238, in-4°, con figg. e tavv.

A. SIGNORINI e G. COTRONEI.



INDICI DEL VOLUME



INDICE PER AUTORI

A

- AGOSTINELLI C., Sui vortici sferici in magneto idrodinamica, 35.
 AGUDO F. R. D. e WOLF F., Propriétés spectrales des équations différentielles non-autoadjointes, 643.
 ALBERTARIO M., vedi MARRÈ E.
 ALEMAGNA A., vedi BACCHETTI T.
 ARTOM M. e GENTILE C., Spettrofotometro a filtri interferenziali, 709.

B

- BACCHETTI T. e ALEMAGNA A., Sugli acidi tioidrossammici. — III. Nuovo metodo di preparazione dagli alogenuri idrossammici, 161.
 BAFFONI G. M. e D'ANCONA G., Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in Uccelli a prole inetta ed a prole precoce. Nota I, 456.
 — Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in Uccelli a prole inetta e precoce. Nota II, 606.
 BANFI C., Propagazione di onde elettromagnetiche piane in un conduttore unidirezionale con direzione di conduttività, variabile, 306.
 BASSI I. W., vedi CORRADINI P.
 BASSI I. W., vedi NATTA G.
 BATINI C. e POMPEIANO O., Opposte influenze esercitate sul tono posturale dalle porzioni rostro-mediale e rostro-laterale del nucleo del tetto, 79.
 BATTAGLIA B., Selezione e rapporto dei sessi nel Copepode Harpacticoide *Tisbe gracilis* (T. Scott), 327.
 — Variabilità ambientale e selezione in *Tisbe reticulata*. — Influenza della salinità, 566.
 BELLINI L. e SCOLLO LAVIZZARI G., Studio delle lipasi nello sviluppo di *Artemia salina*, Leach, 92.
 BENEDETTI E. L., Sulla struttura del mesangio di Zimmermann indagata mediante il microscopio elettronico, 597.
 BENEDETTI E. L., Sulla presenza di granuli ferruginosi nell'Apparato di Golgi delle cellule eritroblastiche, 757.
 BERTI T., BEZZI S. e VISENTINI P., Nuovo gruppo di farmaci antivirali: complessi di bismuto con pirocatechindisolfonato sodico, 439.
 BEZZI S., vedi BERTI T.
 BIERNACKI M., Sur la position des extrêmes relatifs de certaines fonctions composées par des fonctions surharmoniques ou sousharmoniques, 7.
 BIOCCA E. e FERRETTI G., Un nuovo trematode; *Dollfusinus frontalis* gen. nov. et sp. nov., parassita dei seni naso frontali di *Erinaceus europaeus*, 171.
 BIORCI G., FERRO A. e MONTALENTI G., Instabilità delle pareti di Bloch dovuta ad atomi interstiziali in un materiale ferromagnetico con struttura cubica a corpo centrato, 542.
 BLASCHKE W., Sull'uso dei quaternioni duali nella cinematica, 291.
 BOBOC N., Sur la caractérisation des variétés différentiables à base dénombrable, 391.
 BOMPIANI E., Su certi complessi quadratici e cubici di rette, 213.
 — Complessi quadratici e cubici di spazi dotati di omologie armoniche, 371.
 BONDI C., vedi SPIRITO A.
 BOYARSKY L. H., vedi BOYARSKY L. L.
 BOYARSKY L. L., Sulla relazione tra frequenza di stimolo e fatica nella placca neuromotrice, 728.
 — e BOYARSKY L. H., L'esistenza di un limite di frequenza nel passaggio di impulsi attraverso le sinapsi, 731.
 BURNIAT P., Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geq 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3$, $2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7$. Nota I, 276.
 — Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geq 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3$, $2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7$. Nota II, 404.

C

- CAGLIOTI L., vedi SCROCCO M.
- CAGLIOTI V. e FURLANI C., Sulle frequenze stretching N—H dell'ammonio nei suoi sali semplici e complessi, 633.
- CALOI P., Dispersione delle onde sismiche nell'ambito delle altissime frequenze, 239.
- CAMBI L., Cianurazione dell'oro e di metalli analoghi con acido cianidrico e ossigeno, 129.
- e PAGLIA E., Azione dell'acido cianidrico sui solfiti di Co^{++} , 378.
- CARDANI C., CASNATI G., CAVALLERI B. e QUILICO A., Sulla struttura dell'echinulina, 488.
- CARRÀ S. e SIMONETTA M., Ricerche sulla struttura elettronica dei derivati clorurati della naftalina. - Parte II: Costanti di dissociazione delle cloronaftilammine, 713.
- GIANINETTI E. e SIMONETTA, Transizioni elettroniche $\pi-\pi$ (singoletti) delle azzine, 722.
- CARRELLI A., Commemorazione del Socio Giancarlo Vallauri, 764.
- CASNATI G., vedi CARDANI C.
- CATTANEO C., Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica, 526.
- Connessioni extrasinaptiche dei granuli del cervelletto in mammiferi, 604.
- CAVALLERI B., vedi CARDANI C.
- CAVALLO G., vedi FALCONE G.
- CHABAUD A., Osservazioni sulla classificazione del sottordine *Strongylinae* e creazione di una nuova sotto-famiglia: *Archeo-strongylinae*, 176.
- CHIARA L., Limiti superiori della variazione dell'eccentricità nei sistemi binari di massa decrescente, 704.
- CIMINO A., MOLINARI E. e ROMEO G., Contributo allo studio degli effetti magnetocatalitici, 49.
- COGNETTI G., La spermatogenesi secondaria in *Asterina* e la colorazione degli individui proteroginici di *Asterina gibbosa*, 325.
- e DELAVAUULT R., Individui sessuati e asessuati in *Coscinaasterias tenuispina* Lmk, 560.
- CORRADINI P. e BASSI I. W., Struttura cristallina di complessi metallorganici contenenti alluminio e titanio, 43.
- vedi NATTA G.

- CREPAX P. e INFANTELLINA F., Modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale di Gatto per effetto della 5-idrossitriptamina, 186.
- e PARMEGGIANI P. L., Osservazioni morfologiche ed elettrografiche sul cervelletto di Lucertola, 87.
- e PARMEGGIANI P. L., Fenomeni elettrici provocati da stimolazioni eterocettive e propriocettive nel cervelletto di Lucertola, 180.
- e PARMEGGIANI P. L., Analisi delle risposte elettriche del cervelletto di Lucertola a stimolazioni periferiche, 446.
- CRESCINI F., Azioni mutagene e ricombinatorie di tipo Mendeliano della fecondazione incestuosa nella Canapa (*Cannabis sativa* L.), 167.
- CROCCO G. A., Commemorazione del Socio Modesto Panetti, 464.
- CUCULESCU I., Généralisation aux groupes quelconques d'un théorème de E. Hille concernant les fonctions facteurs, 15.
- CURATOLO A., vedi TURANO L.

D

- D'ANCONA G., vedi BAFFONI G. M.
- DANUSSO F., vedi NATTA G.
- D'ARCANGELO P., Intossicazione acuta da streptomycin e da diidrostreptomycin nel colombo: effetti sul tasso delle sostanze riducenti del sangue, 341.
- DELAVALUULT R., vedi COGNETTI G.
- DE STEFANO F., vedi LIVREA G.
- DRAGOS L., Sur un mouvement fluide barotrope, 142.

E

- EVANGELISTI G., Sopra la potenza erogata in moto vario da correnti liquide entro tubi elastici, 287.
- Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche. Nota I, 679.

F

- FALCONE G. e CAVALLO G., Sulla sensibilizzazione al calore da raggi ultravioletti di spore di *A. subtilis*, 759.
- FAVINI G., PIERPAOLI V. e SIMONETTA M., Spettro di assorbimento elettronico della (1, 2-e)-as-naftotriazina, 66.

- FAVINI G., vedi SIMONETTA M.
 FERRETTI G., vedi BIOCICA E.
 FERRO A., vedi BIORCI G.
 FIORENTINI A., vedi GUALTIEROTTI T.
 FORTI G., Studi sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XXIII. Azione inibente dell'acido deidroascorbico sulla fosforilazione ossidativa di mitocondri vegetali, 70.
 FURLANI C., vedi CAGLIOTI V.

G

- GAETA F., Sul calcolo effettivo della forma associata $F(\mathbf{W}_{\alpha+\beta-n}^{gl})$ all'intersezione di due cicli effettivi puri $\mathbf{U}_{\alpha}^g, \mathbf{V}_{\beta}^l$ di S_n , in funzione delle $F(\mathbf{U}_{\alpha}^g), F(\mathbf{V}_{\beta}^l)$ relative ai cicli secanti. Nota I, 269.
 GALLARATI D., Alcune osservazioni sulle irregolarità di un S_3 doppio, 139.
 GARABEDIAN P. R., Applicazione al flusso supersonico del problema di Cauchy per un'equazione ellittica, 282.
 GENTILE C., vedi ARTOM M.
 GHIZZETTI A., Su una particolare equazione differenziale ordinaria non lineare, 262.
 GIANINETTI E., vedi CARRÀ S.
 GIANNUZZI M. A., Determinazione delle densità delle componenti in un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse. Nota I, 533.
 — Determinazione delle densità delle componenti di un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse. Nota II, 700.
 GOTTE L. e MORET V., Sull'Elastina. — Prime osservazioni sui prodotti della sua parziale idrolisi alcalina, 321.
 GOTUSSO G., Sulla tenacia dei sistemi meccanici in movimento, 693.
 GRAFFI D., Commemorazione del Corrisp. Vittorio Gori, 200.
 GRAIFF F., Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite. Nota I, 415.
 — Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite. Nota II, 519.
 GRASSINI G., vedi ILLUMINATI G.
 GRAZIADEI P., Contributo alla conoscenza delle connessioni interneuroniche nel ganglio stellato di *Sepia officinalis*, 557.
 GRÖBNER W., Le soluzioni generali del problema degli n corpi rappresentate mediante serie di Lie, 11.
 — L'inversione di un sistema di funzioni analitiche mediante serie di Lie, 386.

- GROSS W., Sul calcolo del massimo modulo delle radici dell'equazione caratteristica di una matrice, 497.
 GRÜNANGER P., Su un nuovo metodo di preparazione dei 5-isossazoloni e dei loro O-alchileteri, 163.
 GUALTIEROTTI T., SPINELLI D. e FIORENTINI A., Regolazione del ritmo di scarica del motoneurone spinale per mezzo dell'inibizione antidromica di Renshaw, 744.
 GUY R., Sur la dérivation covariante des spineurs, 512.

H

- HAIMOVICI M., Alcune proprietà delle decomposizioni dei sistemi differenziali, 646.

I

- ILLUMINATI G., Sui complessi di cobalti benzoato-pentammina, 158.
 — Reattività *meta* e *para* rispetto ai gruppi OCH_3 e SCH_3 . Determinazione approssimata del $\Delta A F^{\pm}$ per l'effetto dell'inibizione sterica di risonanza sulla bromurazione del metossidurene, 548.
 — GRASSINI G. e SCROCCO M., Sullo spettro infrarosso dell'urea in una serie di complessi del tipo urea-cetano, 435.
 INFANTELLINA F., vedi CREPAX P.
 INGHILLERI G., Un metodo per la triangolazione aerea analitica, 149.

L

- LEVI G., Commemorazione del Socio Nello Beccari, 102.
 LIVREA G., Sul fondamento nutritivo della bradicardia da inanizione e da malnutrizione del Colombo, 577.
 — e DE STEFANO F., Il comportamento ponderale degli organi del Colombo bradicardico per inanizione assoluta e per malnutrizione orizantica, 579.
 — e DE STEFANO F., Il comportamento dell'acqua del cuore e di alcuni organi del Colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizantica, 749.
 LONGO C., Teorema di Desargues ed omologie speciali in un piano grafico proiettivo, 410.
 LORENZELLI V., vedi MIRONI P.

M

- MARCHIONNA E., Sulle superficie aritmeticamente regolari ed aritmeticamente normali, 24.
- Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota I, 396.
- Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota II, 500.
- Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota III, 672.
- MARIN G., Nuovi risultati sull'azione delle radiazioni ionizzanti nel differenziamento sessuale degli Uccelli, 570.
- MARINOZZI V., La struttura dell'alveolo polmonare indagata con una particolare tecnica che permette l'utilizzazione delle sezioni ultrasottili anche per l'osservazione al microscopio ottico, 600.
- Nuovi rilievi sulla fine struttura degli alveoli polmonari desunti dall'osservazione al microscopio elettronico di sezioni ultra sottili sottoposte ad impregnazione argentea, 754.
- MARRÈ E., ALBERTARIO M. e VACCARI E., Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. - III. Relativa insensibilità di enzimi di Cianofeece a denaturanti che agiscono rompendo i legami di idrogeno, 349.
- MINEO C., Sulle rappresentazioni isodromiche di una superficie sopra un'altra, 227.
- MIRANDA C., Sul teorema del massimo modulo per le equazioni lineari ellittiche in due variabili a coefficienti reali, 131.
- MIRONE P. e LORENZELLI V., Osservazioni sulla struttura della banda ultrarossa di assorbimento dovuta al carbonile chetonico, 54.
- MOLINARI E., vedi CIMINO A.
- MONTALENTI G., vedi BIORCI G.
- MORAGLIO G., vedi NATTA G.
- MORET V., vedi GOTTE L.
- MORPURGO G., vedi SERMONTI G.
- MORPURGO C. V., vedi SPINELLI D.

N

- NATTA G., Impostazione cinetica dello studio della formazione dei polimeri a stereoblocchi, 246.
- CORRADINI P., BASSI I. W. e PORRI L., Polimorfismo del tricloruro di titanio cristallino, 121.

- NATTA G., DANUSSO F. e MORAGLIO G., Transizioni isofasiche dei polimeri delle α -olefine della serie alifatica normale, 254.
- PAJARO G., PASQUON I. e STELLACCI V., Determinazione radiochimica del numero di centri attivi in catalizzatori stereospecifici di polimerizzazione, 479.

P

- PAGLIÀ E., Azione dell'acido cianidrico sui sali di Co^{II} ; nitrico- Co^{III} -cianuri, 725.
- PAGLIA E., vedi CAMBI L.
- PAJARO G., vedi NATTA G.
- PARMEGGIANI P. L., vedi CREPAX P.
- PASQUON I., vedi NATTA G.
- PICCARDI G., Fatti sperimentali ed ipotesi solare, 427.
- PICCOLI G., Contributo alla conoscenza del vulcanismo terziario veneto, 550.
- PICONE M., Commemorazione del Socio Guido Ascoli, 614.
- PIERPAOLI V., vedi FAVINI G.
- vedi SIMONETTA M.
- POMPEIANO O., Analisi delle risposte posturali alla stimolazione elettrica della parte intermedia del *lobus anterior* del cervello, 82.
- POMPEIANO O., vedi BATINI C.
- PORRI L., vedi NATTA G.
- PUCCI C., Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Nota II, 3.
- Studio di un sistema di equazioni differenziali della Dinamica dei Gas, 653.
- e WEINSTEIN A., Sull'equazione del calore con dati subarmonici e sue generalizzazioni, 493.

Q

- QUILICO A., vedi CARDANI C.

R

- RIZZA G. B., Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa, 662.
- ROMEO G., vedi CIMINO A.
- ROSSI A., Sull'incompatibilità larvale nei trapianti xenoplastici di Urodela su Anuri. Processi degenerativi delle code di *Triton taeniatus* trapiantate nel campo dell'arto posteriore di *Discoglossus pictus* e di *Hyla arborea*, 193.

S

- SALOMONI E., vedi TURANO L.
 SCOLLO LAVIZZARI G., vedi BELLINI L.
 SCONZO P., Il calcolo della posizione e della velocità nel problema della determinazione di un'orbita, 422.
 SCORZA DRAGONI G., Commemorazione del Corrispondente Luigi Fantappiè, 353.
 SCROCCO M. e CAGLIOTI L., Fenomeni di coniugazione studiati con spettrofotometria I. R. ed U. V. su una serie di pirroli α e β -sostituiti, 316.
 — e CAGLIOTI L., Spettroscopia I. R. nel campo di vibrazione del $-\text{CH}_3$ su alcuni derivati pirrolici, 429.
 — vedi ILLUMINATI G.
 SEGRE S., Un modello della struttura interna di Algal A. Nota I, 301.
 — Un modello della struttura interna di Algal A. Nota II, 537.
 SERMONTI G. e MORPURGO G., Riattivazione con cloruro di manganese di conidi inattivati con azotciprite in *Penicillium chrysogenum*, 96.
 SIMONETTA M., PIERPAOLI V. e FAVINI G., Sul calcolo degli integrali di penetrazione che interessano la teoria degli orbitali molecolari, 58.
 — vedi CARRÀ S.
 — vedi FAVINI G.
 SPINELLI D. e MORPURGO C. V., Azione del pantenolo sull'uomo e sull'animale succinilcolinnizzato, 76.
 — vedi GUALTIEROTTI T.
 SPIRITO A. e BONDI C., Sul trapianto di abbozzi di *Triton* su embrioni di *Rana esculenta* e possibilità di differenziamento e di maggior resistenza alla distruzione a seguito di un nuovo metodo sperimentale, 100.
 STELLACCI V., vedi NATTA G.
 STORCHI E., Sforzi plastici in una membrana piana di spessore variabile, 685.

T

- TALLINI G., Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti. Nota I, 19.
 — Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti. Nota II, 135.

- TERRACINI A., Sui sistemi F di linee spaziali, 220.
 THEODORESCU R., Sur certains processus à liaisons complètes, 260.
 TONOLO A., Classi di d^2 ternari le cui geodetiche ammettono integrali primi quadratici, 230.
 TOTARO C., Sulla riflessione e rifrazione in magneto-idrodinamica, 310.
 TROTTER A., Strutture ed attività di miceli fungini e loro probabili rapporti con la natura e l'origine dei Virus, 380.
 TURANO L., CURATOLO A., SALOMONI E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. — I. Nuova tecnica per lo studio delle funzioni motorie dell'esofago mediante la meccanografia e la roentgencinematografia, 449.
 — CURATOLO A. e SALOMONI E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. — II. L'attività cardiale in rapporto alla motilità esofagea, 573.
 — CURATOLO A. e SALOMONI E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. — III. Movimenti passivi e peristalsi, 736.

V

- VACCARI E., vedi MARRÈ E.
 VÁLCOVICI V., Sur la loi linéaire de E. P. Hubble concernant la récession des nébuleuses extragalactiques, 294.
 VECCHI L., Contributo alla conoscenza del mancino, 584.
 VERGNANO O., Sul determinismo delle morfosi della vegetazione sui terreni serpentinosi attraverso l'analisi della nutrizione minerale, 588.
 VESENTINI E., Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta. Nota II, 505.
 — Sopra i sistemi fibrati kähleriani compatti, 657.
 VISENTINI P., vedi BERTI T.
 VITAGLIANO TADINI G., Indagini sulle variazioni del rapporto sessi in *Asellus aquaticus*, 335.
 — Il probabile significato biologico della monogenia, 562.

W

- WEINSTEIN A., vedi PUCCI C.
 WOLF F., vedi AGUDO F. R. D.

INDICE PER MATERIE

A

- Analisi.** — Propriétés spectrales des équations différentielles non-autoadjointes, AGUDO F. R. D. e WOLF F., 643.
- Analisi funzionale.** — Généralisation aux groupes quelconques d'un théorème de E. Hille concernant les fonctions facteurs, CUCULESCU I., 15.
- Analisi matematica.** — Sur la position des extrêmes relatifs de certaines fonctions composées par des fonctions surharmoniques ou sousharmoniques, BIERNACKI M., 7.
- Su una particolare equazione differenziale ordinaria non lineare, GHIZZETTI A., 262.
- Le soluzioni generali del problema degli n corpi rappresentate mediante serie di Lie, GRÖBNER W., 11.
- L'inversione di un sistema di funzioni analitiche mediante serie di Lie, GRÖBNER W., 386.
- Sul calcolo del massimo modulo delle radici dell'equazione caratteristica di una matrice, GROSS W., 497.
- Alcune proprietà delle decomposizioni dei sistemi differenziali, HAIMOVICI M., 646.
- Sul teorema del massimo modulo per le equazioni lineari ellittiche in due variabili a coefficienti reali, MIRANDA C., 131.
- Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Nota II, PUCCI C., 3.
- Studio di un sistema di equazioni differenziali della Dinamica dei Gas, PUCCI C., 653.
- Sull'equazione del calore con dati subarmonici e sue generalizzazioni, PUCCI C. e WEINSTEIN A., 493.
- Anatomia.** — Connessioni estrasinaptiche dei granuli del cervelletto in mammiferi, CATTANEO L., 604.

Astrofisica. — Fatti sperimentali ed ipotesi solare, PICCARDI G., 427.

- Un modello della struttura interna di Algol A. Nota I, SEGRE S., 301.
- Un modello della struttura interna di Algol A. Nota II, SEGRE S., 537.

Astronomia. — Determinazione delle densità delle componenti in un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse. Nota I, GIANNUZZI M. A., 533.

- Determinazione delle densità delle componenti di un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse, GIANNUZZI M. A., 700.

— Il calcolo della posizione e della velocità nel problema della determinazione di un'orbita, SCONZO P., 422.

- Sur la loi linéaire de E. P. Hubble concernant la récession des nébuleuses extragalactiques, VÂLCOVICI V., 294.

B

Biochimica. — Sull'Elastina. — Prime osservazioni sui prodotti della sua parziale idrolisi alcalina, GOTTI L. e MORET V., 321.

Biologia. — Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in Uccelli a prole inetta ed a prole precoce. Nota I, BAFFONI G. M. e D'ANCONA G., 456.

- Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in Uccelli a prole inetta e precoce. Nota II, BAFFONI G. M. e D'ANCONA G., 606.

— Sull'incompatibilità larvale nei trapianti xenoplastici di Urodeli su Anuri. Processi degenerativi delle code di *Triton taeniatus* trapiantate nel campo dell'arto posteriore di *Discoglossus pictus* e di *Hyla arborea*, ROSSI A., 193.

- Sul trapianto di abbozzi di *Triton* su embrioni di *Rana esculenta* e possibilità di differenziamento e di maggior resistenza alla distruzione a seguito di un nuovo

metodo sperimentale, SPIRITO A. e BONDI C., 100.

Botanica. — Strutture ed attività di miceli fungini e loro probabili rapporti con la natura e l'origine dei Virus, TROTTER A., 380.

C

Calcolo delle probabilità. — Sur certains processus à liaisons complètes, THEODorescu R., 260.

Chimica. — Sulle frequenze stretching N—H dell'ammonio nei suoi sali semplici e complessi, CAGLIOTI V. e FURLANI C., 633.

— Contributo allo studio degli effetti magnetocatalitici, CIMINO A., MOLINARI E. e ROMEO G., 49.

— Struttura cristallina di complessi metallorganici contenenti alluminio e titanio, CORRADINI P. e BASSI I. W., 43.

— Sui complessi di cobalti benzoato-pentammina, ILLUMINATI G., 158.

— Reattività *meta* e *para* rispetto ai gruppi OCH_3 e SCH_3 . Determinazione approssimata del $\Delta\Delta F^\ddagger$ per l'effetto dell'inibizione sterica di risonanza sulla bromurazione del metossidurene, ILLUMINATI G., 548.

— Sullo spettro infrarosso dell'urea in una serie di complessi del tipo urea-cetano, ILLUMINATI G., GRASSINI G. e SCROCCO M., 435.

— Impostazione cinetica dello studio della formazione dei polimeri a stereoblocchi, NATTA G., 246.

— Polimorfismo del tricloruro di titanio cristallino, NATTA G., CORRADINI P., BASSI I. W. e PORRI L., 121.

— Determinazione radiochimica del numero di centri attivi in catalizzatori stereospecifici di polimerizzazione, NATTA G., PAJARO G., PASQUON I. e STELLACCI V., 479.

— Fenomeni di coniugazione studiati con spettrofotometria I. R. ed U. V. su una serie di pirroli α e β -sostituiti, SCROCCO M. e CAGLIOTI L., 316.

— Spettroscopia I. R. nel campo di vibrazione del $-\text{CH}_3$ su alcuni derivati pirrolici, SCROCCO M. e CAGLIOTI L., 429.

Chimica fisica. — Ricerche sulla struttura elettronica dei derivati clorurati della naftalina. — Parte II: Costanti di dissocia-

zione delle cloronaftilammine, CARRA S. e SIMONETTA M., 713.

Chimica fisica. — Transizioni elettroniche $\pi-\pi$ (singoletti) delle azine, CARRA S., GIANINETTI E. e SIMONETTA M., 722.

— Spettro di assorbimento elettronico della (1, 2-e)-as-naftotrizina, FAVINI G., PIERPAOLI V. e SIMONETTA M., 66.

— Osservazioni sulla struttura della banda ultrarossa di assorbimento dovuta al carbonile chetonico, MIRONE P. e LORENZELLI V., 54.

— Transizioni isofasiche dei polimeri delle α -olefine della serie alifatica normale, NATTA G., DANUSSO F. e MORAGLIO G., 254.

— Sul calcolo degli integrali di penetrazione che interessano la teoria degli orbitali molecolari, SIMONETTA M., PIERPAOLI V. e FAVINI G., 58.

Chimica inorganica. — Cianurazione dell'oro e di metalli analoghi con acido cianidrico e ossigeno, CAMBI L., 129.

— Azione dell'acido cianidrico sui solfiti di Co^{II} , CAMBI L. e PAGLIA E., 378.

— Azione dell'acido cianidrico sui sali di Co^{II} : nitrito- Co^{III} -cianuri, PAGLIA E., 725.

Chimica organica. — Sugli acidi tioidrossammici. — III. Nuovo metodo di preparazione dagli alogenuri idrossammici, BACCETTI T. e ALEMAGNA A., 161.

— Sulla struttura dell'echinulina, CARDANI C., CASNATI G., CAVALLERI B. e QUILICO A., 488.

— Su un nuovo metodo di preparazione dei 5-isossazoloni e dei loro O-alchileteri, GRÜNANGER P., 163.

Cinematica. — Sull'uso dei quaternioni duali nella cinematica, BLASCHKE W., 291.

Commemorazioni. — Commemorazione del Socio Giancarlo Vallauri, CARRELLI A., 764.

— Commemorazione del Socio Modesto Pannetti, CROCCO G. A., 464.

— Commemorazione del Corrispondente Vittorio Gori, GRAFFI D., 200.

— Commemorazione del Socio Nello Beccari, LEVI G., 102.

— Commemorazione del Socio Guido Ascoli, PICONE M., 614.

— Commemorazione del Corrispondente Luigi Fantappiè, SCORZA DRAGONI G., 353.

Comunicazioni varie, 118, 206, 356, 474, 625, 775.

Congressi, 477.

Cosmogonia. — Limiti superiori della variazione dell'eccentricità nei sistemi binari di massa decrescente, CHIARA L., 704.

D

Dinamica dei fluidi. — Applicazione al flusso supersonico del problema di Cauchy per un'equazione ellittica, GARABEDIAN P. R., 282.

E

Embriologia. — Nuovi risultati sull'azione delle radiazioni ionizzanti nel differenziamento sessuale degli Uccelli, MARIN G., 570.

F

Farmacologia. — Nuovo gruppo di farmaci antivirali: complessi di bismuto con pirocatechindisolfonato sodico, BERTI T., BEZZI S. e VISENTINI P., 439.

Fisica. — Spettrofotometro a filtri interferenziali, ARTOM M. e GENTILE C., 709.

— Instabilità delle pareti di Bloch dovuta ad atomi interstiziali in un materiale ferromagnetico con struttura cubica a corpo centrato, BIORCI G., FERRO A. e MONTALENTI G., 542.

Fisica matematica. — Propagazione di onde elettromagnetiche piane in un conduttore unidirezionale con direzione di conduttività, variabile, BANFI C., 306.

— Sulla riflessione e rifrazione in magneto-idrodinamica, TOTARO C., 310.

Fisiologia. — Opposte influenze esercitate sul tono posturale dalle porzioni rostro-mediale e rostro-laterale del nucleo del tetto, BATINI C. e POMPEIANO O., 79.

— Sulla relazione tra frequenza di stimolo e fatica nella placca neuromotrice, BOYARSKY L. L., 728.

— L'esistenza di un limite di frequenza nel passaggio di impulsi attraverso le sinapsi BOYARSKY L. L. e BOYARSKY L. H., 731.

— Modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale di Gatto per effetto della 5-idrossitriptamina, CREPAX P. e INFANTELLINA F., 186.

Fisiologia. — Osservazioni morfologiche ed elettrografiche sul cervelletto di Lucertola, CREPAX P. e PARMEGGIANI P. L., 87.

— Fenomeni elettrici provocati da stimolazioni esteroceettive e propriocettive nel cervelletto di Lucertola, CREPAX P. e PARMEGGIANI P. L., 180.

— Analisi delle risposte elettriche del cervelletto di Lucertola a stimolazioni periferiche, CREPAX P. e PARMEGGIANI P. L., 446.

— Intossicazione acuta da streptomicina e da diidrostreptomina nel Colombo: effetti sul tasso delle sostanze riducenti del sangue, D'ARCANGELO P., 341.

— Regolazione del ritmo di scarica del motoneurone spinale per mezzo dell'inibizione antidromica di Renshaw, GUALTIEROTTI T., SPINELLI D. e FIORENTINI A., 744.

— Sul fondamento nutritivo della bradicardia da inanizione e da malnutrizione del Colombo, LIVREA G., 577.

— Il comportamento ponderale degli organi del Colombo bradicardico per inanizione assoluta e per malnutrizione orizantica, LIVREA G. e DE STEFANO F., 579.

— Il comportamento dell'acqua del cuore e di alcuni organi del Colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizantica, LIVREA G. e DE STEFANO F., 749.

— Analisi delle risposte posturali alla stimolazione elettrica della parte intermedia del *lobus anterior* del cervelletto, POMPEIANO O., 82.

— Azione del pantenolo sull'uomo e sull'animale succinilcolinnizzato, SPINELLI D. e MORPURGO C. V., 76.

— Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. — I. Nuova tecnica per lo studio delle funzioni motorie dell'esofago mediante la meccanografia e la roentgencinematografia, TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., 449.

— Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. — II. L'attività cardiaca in rapporto alla motilità esofagea, TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., 573.

— Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. — III. Movimenti passivi e peristalsi, TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., 736.

Fisiologia umana. — Contributo alla conoscenza del mancino, VECCHI L., 584.

Fisiologia vegetale. — Studi sulla fisiologia dell'acido ascorbico. — XXIII. Azione inibente dell'acido deidroascorbico sulla fosforilazione ossidativa di mitocondri vegetali, FORTI G., 70.

— Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. — III. Relativa insensibilità di enzimi di Cianoficee a denaturanti che agiscono rompendo i legami di idrogeno, MARRÈ E., ALBERTARIO M. e VACCARI E., 349.

— Sul determinismo delle morfosi della vegetazione sui terreni serpentinosi attraverso l'analisi della nutrizione minerale, VERGNANO O., 588.

G

Genetica. — Selezione e rapporto dei sessi nel Copepode Harpacticoide *Tisbe gracilis* (T. Scott) BATTAGLIA B., 327.

— Variabilità ambientale e selezione in *Tisbe reticulata*. — Influenza della salinità, BATTAGLIA B., 566.

— Riattivazione con cloruro di manganese di conidi inattivati con azotoiprite in *Penicillium chrysogenum*, SERMONTI G. e MORPURGO G., 96.

— Indagini sulle variazioni del rapporto sessi in *Aseelus aquaticus*, VITAGLIANO TADINI G., 335.

— Il probabile significato biologico della monogenia, VITAGLIANO TADINI G., 562.

Genetica vegetale. — Azioni mutagene e ricombinatorie di tipo Mendeliano della fecondazione incestuosa nella Canapa (*Cannabis sativa* L.), CRESCINI F., 167.

Geodesia. — Un metodo per la triangolazione aerea analitica, INGHILLERI G., 149.

Geofisica. — Dispersione delle onde sismiche nell'ambito delle altissime frequenze, CALOI P., 239.

Geologia. — Contributo alla conoscenza del vulcanismo terziario veneto, PICCOLI G., 550.

Geometria. Su certi complessi quadratici e cubici di rette, BOMPIANI E., 213.

— Complessi quadratici e cubici di spazi dotati di omologie armoniche, BOMPIANI E., 371.

— Alcune osservazioni sulle irregolarità di un S_3 doppio, GALLARATI D., 139.

Geometria. — Sur la dérivation covariante des spineurs, GUY R., 512.

— Teorema di Desargues ed omologie speciali in un piano grafico proiettivo, LONGO C., 410.

— Sulle superficie aritmeticamente regolari ed aritmeticamente normali, MARCHIONNA E., 24.

— Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota I, MARCHIONNA E., 396.

— Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche, Nota II, MARCHIONNA E., 500.

— Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota III, MARCHIONNA E., 672.

— Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa, RIZZA G. B., 662.

— Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti. Nota I, TALLINI G., 19.

— Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti. Nota II, TALLINI G., 135.

— Sui sistemi F di linee spaziali, TERRACINI A., 220.

— Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta. Nota II, VESENTINI E., 505.

— Sopra i sistemi fibrati kähleriani compatti, VESENTINI E., 657.

Geometria algebrica. — Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geq 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7$. Nota I, BURNIAT P., 276.

— Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geq 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7$. Nota II, BURNIAT P., 404.

— Sul calcolo effettivo della forma associata $F(W_{\alpha+\beta-n}^{gl})$ all'intersezione di due cicli effettivi puri U_α^g, V_β^l di S_n , in funzione delle $F(U_\alpha^g), F(V_\beta^l)$ relative ai cicli secanti. Nota I, GAETA F., 269.

Geometria differenziale. — Sulle rappresentazioni isodromiche di una superficie sopra un'altra, MINEO C., 227.

— Classi di ds^2 ternari le cui geodetiche ammettono integrali primi quadratici, TONOLO A., 230.

I

Idrodinamica. — Sopra la potenza erogata in moto vario da correnti liquide entro tubi elastici, EVANGELISTI G., 287.

— Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche, Nota I, EVANGELISTI G., 679.

M

Magneto idrodinamica. — Sui vortici sferici in magneto idrodinamica, AGOSTINELLI C., 35.

Meccanica. — Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica, CATTANEO C., 526.

— Sur un mouvement fluide barotrope, DRAGOS L., 142.

— Sulla tenacia dei sistemi meccanici in movimento, GOTUSSO G., 693.

— Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite. Nota I, GRAIFF F., 415.

— Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite. Nota II, GRAIFF F., 519.

— Sforzi plastici in una membrana piana di spessore variabile, STORCHI E., 685.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, 1958, 119, 210, 360, 477, 630, 776.

P

Patologia. — Sulla struttura del mesangio di Zimmermann indagata mediante il microscopio elettronico, BENEDETTI E. L., 597.

— Sulla presenza di granuli ferruginosi nell'Apparato di Golgi delle cellule eritroblastiche, BENEDETTI E. L., 757.

— Sulla sensibilizzazione al calore da raggi ultravioletti di spore di *B. subtilis*, FALCONE G. e CAVALLO G., 759.

— La struttura dell'alveolo polmonare indagata con una particolare tecnica che permette l'utilizzazione delle sezioni ultrasottili anche per l'osservazione al microscopio ottico, MARINOZZI V., 600.

Patologia. — Nuovi rilievi sulla fine struttura degli alveoli polmonari desunti dall'osservazione al microscopio elettronico di sezioni ultra sottili sottoposte ad impregnazione argentea, MARINOZZI V., 754.

Personale accademico, 115, 205, 356, 473, 625, 771.

Plichi suggellati, 114, 207.

Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, 361.

Presentazione di libri, 117, 207, 357, 475, 626, 772.

Presentazione di Note e Memorie, 117, 209, 359, 476, 628, 774.

R

Relazioni di Commissioni, 359.

T

Temi di discussione, 775.

Topologia. — Sur la caractérisation des variétés différentiables à base dénombrable, BOBOC N., 391.

Z

Zoologia. — Studio delle lipasi nello sviluppo di *Artemia salina*, Leach, BELLINI L. e SCOLLO LAVIZZARI G., 92.

— Un nuovo trematode; *Dollfusinus frontalis* gen. nov. et sp. nov., parassita dei seni naso frontali di *Erinaceus europaeus*, BIOCCA E. e FERRETTI G., 171.

— Osservazioni sulla classificazione del sottordine *Strongylina* e creazione di una nuova sotto-famiglia: *Archeostrongylinae*, CHABAUD A., 176.

— La spermatogenesi secondaria in *Asterina* e la colorazione degli individui proteroginici di *Asterina gibbosa*, COGNETTI G., 325.

— Individui sessuati e asessuati in *Coscina-sterias tenuispina* Lmk, COGNETTI G. e DELAVALT R., 560.

— Contributo alla conoscenza delle connessioni interneuriche nel ganglio stellato di *Sepia officinalis*, GRAZIADEI P., 557.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO I.

GENNAIO 1958.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PUCCI C., Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. Nota II (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	Pag. 3
BIERNACKI M., Sur la position des extrêmes relatifs de certaines fonctions composées par des fonctions surharmoniques ou sousharmoniques (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 7
GRÖBNER W., Le soluzioni generali del problema degli n corpi rappresentate mediante serie di Lie (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 11
CUCULESCU I., Généralisation aux groupes quelconques d'un théorème de E. Hille concernant les foctions facteurs (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>) . . .	» 15
TALLINI G., Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti. Nota I (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 19
MARCHIONNA E., Sulle superficie aritmeticamente regolari ed aritmeticamente normali (pres. dal Socio <i>O. Chisini</i>)	» 24
AGOSTINELLI C., Sui vortici sferici in magneto idrodinamica (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	» 35
CORRADINI P. e BASSI I. W., Struttura cristallina di complessi metallorganici contenenti alluminio e titanio (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	» 43
CIMINO A., MOLINARI E. e ROMEO G., Contributo allo studio degli effetti magnetocatalitici (pres. dal Socio <i>V. Caglioti</i>)	» 49
MIRONE P. e LORENZELLI V., Osservazioni sulla struttura della banda ultrarossa di assorbimento dovuta al carbonile chetonico (pres. dal Socio <i>G. B. Bonino</i>)	» 54
SIMONETTA M., PIERPAOLI V. e FAVINI G., Sul calcolo degli integrali di penetrazione che interessano la teoria degli orbitali molecolari (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	» 58
FAVINI G., PIERPAOLI V. e SIMONETTA M., Spettro di assorbimento elettronico della (1, 2-e)-as-naftotriazina (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	» 66
FORTI G., Studi sulla fisiologia dell'acido ascorbico. - XXIII. Azione inibente dell'acido deidroscorbico sulla fosforilazione ossidativa di mitocondri vegetali (pres. dal Socio <i>S. Tonzig</i>)	» 70
SPINELLI D. e MORPURGO C. V., Azione del pantenolo sull'uomo e sull'animale succinilcolinnizzato (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	» 76
BATINI C. e POMPEIANO O., Opposte influenze esercitate sul tono posturale dalle porzioni rostro-mediale e rostro-laterale del nucleo del tetto (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	» 79
POMPEIANO O., Analisi delle risposte posturali alla stimolazione elettrica della parte intermedia del <i>lobus anterior</i> del cervelletto (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>) . .	» 82

CRÉPAX P. e PARMEGGIANI P. L., Osservazioni morfologiche ed elettrografiche sul cervelletto di Lucertola (pres. dal Socio <i>G. C. Pupilli</i>)	Pag. 87
BELLINI L. e SCOLLO LAVIZZARI G., Studio delle lipasi nello sviluppo di <i>Artemia salina</i> , Leach (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	» 92
SERMONTI G. e MORPURGO G., Riattivazione con cloruro di manganese di conidi inattivati con azotoiprite in <i>Penicillium chrysogenum</i> (pres. dal Socio straniero <i>E. B. Chain</i>)	» 96
SPIRITO A. e BONDI C., Sul trapianto di abbozzi di <i>Triton</i> su embrioni di <i>Rana esculenta</i> e possibilità di differenziamento e di maggior resistenza alla distruzione a seguito di un nuovo metodo sperimentale (pres. dal Socio <i>G. Cotronei</i>)	» 100

COMMEMORAZIONI

LEVI G., Commemorazione del Socio Nello Beccari	» 102
Plichi suggellati	» 114
Personale accademico	» 115
Presentazione di libri	» 117
Presentazione di Note e Memorie	» 117
Comunicazioni varie	» 118
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'11 gennaio 1958	» 119

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1958.

NOTE DI SOCI

NATTA G., CORRADINI P., BASSI I. W. e PORRI L., Polimorfismo del tricloruro di titanio cristallino (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	» 121
CAMBI L., Cianurazione dell'oro e di metalli analoghi con acido cianidrico e ossigeno	» 129

NOTE PRESENTATE DA SOCI

MIRANDA C., Sul teorema del massimo modulo per le equazioni lineari ellittiche in due variabili a coefficienti reali (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	» 131
TALLINI G., Una proprietà grafica caratteristica della superficie di Veronese negli spazi finiti. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	» 135
GALLARATI D., Alcune osservazioni sulle irregolarità di un S_3 doppio (pres. dal Corrisp. <i>E. Togliatti</i>)	» 139
DRAGOS L., Sur un mouvement fluide barotrope (pres. dal Corrisp. <i>B. Finzi</i>)	» 142
INGHILLERI G., Un metodo per la triangolazione aerea analitica (pres. dal Corrisp. <i>L. Solaini</i>)	» 149
ILLUMINATI G., Sui complessi di cobalti benzoato-pentammina (pres. dal Socio <i>V. Caglioti</i>)	» 158
BACCHETTI T. e ALEMAGNA A., Sugli acidi tioidrossammici. - III. Nuovo metodo di preparazione dagli alogenuri idrossammici (pres. dal Socio <i>L. Cambi</i>)	» 161
GRÜNANGER P., Su un nuovo metodo di preparazione dei 5-isossazoloni e dei loro O-alchileteri (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i>)	» 163

CRESCINI F., Azioni mutagene e ricombinatorie di tipo Mendeliano della fecondazione incestuosa nella Canapa (<i>Cannabis sativa</i> L.) (pres. dal Socio A. Chiarugi)	Pag. 167
BIOCCA E. e FERRETTI G., Un nuovo trematode; <i>Dollfusinus frontalis</i> gen. nov. et sp. nov., parassita dei seni naso frontali di <i>Erinaceus europaeus</i> (pres. dal Socio V. Puntoni)	» 171
CHABAUD A., Osservazioni sulla classificazione del sottordine <i>Strongylina</i> e creazione di una nuova sotto-famiglia: <i>Archeostrongylinae</i> (pres. dal Socio V. Puntoni)	» 176
CREPAX P. e PARMEGGIANI P. L., Fenomeni elettrici provocati da stimolazioni esterocettive e propriocettive nel cervelletto di Lucertola (pres. dal Socio G. C. Pupilli)	» 180
CREPAX P. e INFANTELLINA F., Modificazioni dell'attività elettrica della corteccia cerebrale di Gatto per effetto della 5-idrossitriptamina (pres. dal Socio G. C. Pupilli)	» 186
ROSSI A., Sull'incompatibilità larvale nei trapianti xenoplastici di Urodeli su Anuri. Processi degenerativi delle code di <i>Triton taeniatus</i> trapiantate nel campo dell'arto posteriore di <i>Discoglossus pictus</i> e di <i>Hyla arborea</i> (pres. dal Socio G. Cotronei)	» 193

COMMEMORAZIONI

GRAFFI D., Commemorazione del Corrisp. Vittorio Gori	» 200
Personale accademico	» 205
Comunicazioni varie	» 206
Plichi suggellati	» 207
Presentazioni di libri	» 207
Presentazione di Note e Memorie	» 209
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 febbraio 1958	» 210

FASCICOLO 3.

MARZO 1958.

NOTE DI SOCI

BOMPIANI E., Su certi complessi quadratici e cubici di rette	» 213
TERRACINI A., Sui sistemi F di linee spaziali	» 220
MINEO C., Sulle rappresentazioni isodromiche di una superficie sopra un'altra	» 227
TONOLO A., Classi di ds^2 ternari le cui geodetiche ammettono integrali primi quadratici	» 230
CALOI P., Dispersione delle onde sismiche nell'ambito delle altissime frequenze	» 239
NATTA G., Impostazione cinetica dello studio della formazione dei polimeri a stereoblocchi	» 246
NATTA G., DANUSSO F. e MORAGLIO G., Transizioni isofasiche dei polimeri delle α -olefine della serie alifatica normale (pres. dal Socio G. Natta)	» 254

NOTE PRESENTATE DA SOCI

THEODORESCU R., Sur certains processus à liaisons complètes (pres. dal Socio M. Picone)	» 260
GHIZZETTI A., Su una particolare equazione differenziale ordinaria non lineare (pres. dal Socio M. Picone)	» 262

GAETA F., Sul calcolo effettivo della forma associata $F(W_{\alpha+\beta-n}^{gl})$ all'intersezione di due cicli effettivi puri $U_{\alpha}^g, V_{\beta}^l$ di S_n , in funzione delle $F(U_{\alpha}^g), F(V_{\beta}^l)$ relative ai cicli secanti. Nota I (pres. dal Socio F. Severi).	Pag. 269
BURNIAT P., Superficie algebriche regolari di genere geometrico $p_g \geq 4$ qualunque e di genere lineare $p^{(1)} = 2p_g - 3, 2p_g - 2, \dots, 8p_g + 7$. Nota I (pres. dal Socio S. Segre)	» 276
GARABEDIAN P. R., Applicazione al flusso supersonico del problema di Cauchy per un'equazione ellittica (pres. dal Socio M. Picone)	» 282
EVANGELISTI G., Sopra la potenza erogata in moto vario da correnti liquide entro tubi elastici (pres. dal Corrisp. G. Supino)	» 287
BLASCHKE W., Sull'uso dei quaternioni duali nella cinematica (pres. dal Socio M. Picone)	» 291
VÁLCOVICI V., Sur la loi linéaire de E. P. Hubble concernant la récession des nébuleuses extragalactiques (pres. dal Corrisp. B. Finzi)	» 294
SEGRE S., Un modello della struttura interna di Algol A. Nota I (pres. dal Socio G. Armellini)	» 301
BANFI C., Propagazione di onde elettromagnetiche piane in un conduttore unidirezionale con direzione di conduttività, variabile (pres. dal Corrisp. D. Graffi)	» 306
TOTARO C., Sulla riflessione e rifrazione in magneto-idrodinamica (pres. dal Socio A. Signorini)	» 310
SCROCCO M. e CAGLIOTI L., Fenomeni di coniugazione studiati con spettrofotometria I. R. ed U. V. su una serie di pirroli α e β -sostituiti (pres. dal Socio V. Caglioti)	» 316
GOTTE L. e MORET V., Sull'Elastina. - Prime osservazioni sui prodotti della sua parziale idrolisi alcalina (pres. dal Corrisp. A. Roncato)	» 321
COGNETTI G., La spermatogenesi secondaria in <i>Asterina gibbosa</i> (pres. dal Socio G. Cotronei)	» 325
BATTAGLIA B., Selezione e rapporto dei sessi nel Copepode Harpacticoida <i>Tisbe gracilis</i> (T. Scott) (pres. dal Corrisp. V. D'Ancona)	» 327
VITAGLIANO TADINI G., Indagini sulle variazioni del rapporto sessi in <i>Asellus aquaticus</i> (pres. dal Corrisp. G. Montalenti)	» 335
D'ARCANGELO P., Intossicazione acuta da streptomicina e da diidrostreptomicina nel colombo: effetti sul tasso delle sostanze riducenti del sangue (pres. dal Corrisp. G. Amantea)	» 341
MARRÈ E., ALBERTARIO M. e VACCARI E., Ricerche sull'adattamento proteico in organismi termoresistenti. - III. Relativa insensibilità di enzimi di Cianoficee a denaturanti che agiscono rompendo i legami di idrogeno (pres. dal Socio S. Tonzig)	» 349

COMMEMORAZIONI

SCORZA DRAGONI G., Commemorazione del Corrispondente Luigi Fantappiè	» 353
Personale accademico	» 356
Comunicazioni varie	» 356
Presentazione di libri	» 357
Presentazione di Note e Memorie	» 359
Relazioni di Commissioni	» 359
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 marzo 1958	» 360
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei	» 361

FASCICOLO 4.

APRILE 1958.

NOTE DI SOCI

BOMPIANI E., Complessi quadratici e cubici di spazi dotati di omologie armoniche	Pag. 371
CAMBI L. e PAGLIA E., Azione dell'acido cianidrico sui solfiti di Co^{II} (pres. dal Socio L. Cambi)	» 378
TROTTER A., Strutture ed attività di miceli fungini e loro probabili rapporti con la natura e l'origine dei Virus	» 380

NOTE PRESENTATE DA SOCI

GRÖBNER W., L'inversione di un sistema di funzioni analitiche mediante serie di Lie (pres. dal Socio M. Picone)	» 386
BOBOC N., Sur la caractérisation des variétés différentiables à base dénombrable (pres. dal Socio M. Picone).	» 391
MARCHIONNA E., Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota I (pres. dal Socio O. Chisini)	» 396
BURNIAT P., Superficie algebriche regolari di genere geometrico $\hat{p}_g \geq 4$ qualunque e di genere lineare $\hat{p}^{(1)} = 2\hat{p}_g - 3, 2\hat{p}_g - 2, \dots, 8\hat{p}_g + 7$. Nota II (pres. dal Socio B. Segre)	» 404
LONGO C., Teorema di Desargues ed omologie speciali in un piano grafico proiettivo (pres. dal Socio E. Bompiani)	» 410
GRAIFF F., Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite. Nota I (pres. dal Corrisp. B. Finzi)	» 415
SCONZO P., Il calcolo della posizione e della velocità nel problema della determinazione di un'orbita (pres. dal Socio G. Armellini)	» 422
PICCARDI G., Fatti sperimentali ed ipotesi solare (pres. dal Corrisp. G. Righini)	» 427
SCROCCO M. e CAGLIOTI L., Spettroscopia I. R. nel campo di vibrazione del $-\text{CH}_3$ su alcuni derivati pirrolici (pres. dal Socio V. Caglioti)	» 429
ILLUMINATI G., GRASSINI G. e SCROCCO M., Sullo spettro infrarosso dell'urea in una serie di complessi del tipo urea-cetano (pres. dal Corrisp. V. Caglioti)	» 435
BERTI T., BEZZI S. e VISENTINI P., Nuovo gruppo di farmaci antivirali: complessi di bismuto con pirocatechindisolfonato sodico (pres. dal Socio E. Meneghetti)	» 439
CREPAX P. e PARMEGGIANI P. L., Analisi delle risposte elettriche del cervello di Lucertola a stimolazioni periferiche (pres. dal Socio G. C. Pupilli)	» 446
TURANO L., CURATOLO A., SALOMONI E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. - I. Nuova tecnica per lo studio delle funzioni motorie dell'esofago mediante la meccanografia e la roentgencinematografia (pres. dal Corrisp. G. Amantea)	» 449
BAFFONI G. M. e D'ANCONA G., Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in Uccelli a prole inetta ed a prole precoce. Nota I (pres. dal Socio G. Cotronei)	» 456

C O M M E M O R A Z I O N I

CROCCO G. A., Commemorazione del Socio Modesto Panetti	Pag.	464
Personale accademico	»	473
Comunicazioni varie	»	474
Presentazione di libri	»	475
Presentazione di Note e Memorie	»	476
Congressi	»	477
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 19 aprile 1958	»	477

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1958.

NOTE DI SOCI

NATTA G., PAJARO G., PASQUON I. e STELLACCI V., Determinazione radiochimica del numero di centri attivi in catalizzatori stereospecifici di polimerizzazione (pres. dal Socio <i>G. Natta</i>)	»	479
CARDANI C., CASNATI G., CAVALLERI B. e QUILICO A., Sulla struttura dell'echinulina (pres. dal Socio <i>A. Quilico</i>)	»	488

NOTE PRESENTATE DA SOCI

PUCCI C. e WEINSTEIN A., Sull'equazione del calore con dati subarmonici e sue generalizzazioni (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	»	493
GROSS W., Sul calcolo del massimo modulo delle radici dell'equazione caratteristica di una matrice (pres. dal Socio <i>M. Picone</i>)	»	497
MARCHIONNA E., Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota II (pres. dal Socio <i>O. Chisini</i>).	»	500
VESENTINI E., Osservazioni sulle strutture fibrato analitiche sopra una varietà kähleriana compatta. Nota II (pres. dal Socio <i>B. Segre</i>)	»	505
GUY R., Sur la dérivation covariante des spineurs (pres. dal Socio <i>E. Bompiani</i>)	»	512
GRAIFF F., Sulle condizioni di congruenza per deformazioni anche finite. Nota II (pres. dal Corrip. <i>B. Finzi</i>)	»	519
CATTANEO C., Sui postulati comuni alla cinematica classica e alla cinematica relativistica (pres. dal Socio <i>A. Signorini</i>)	»	526
GIANNUZZI M. A., Determinazione delle densità delle componenti in un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse. Nota I (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>).	»	533
SEGRE S., Un modello della struttura interna di Algol A. Nota II (pres. dal Socio <i>G. Armellini</i>)	»	537
BIORCI G., FERRO A. e MONTALENTI G., Instabilità delle pareti di Bloch dovuta ad atomi interstiziali in un materiale ferromagnetico con struttura cubica a corpo centrato (pres. dal Corrip. <i>R. Deaglio</i>)	»	542

ILLUMINATI G., Reattività <i>meta</i> e <i>para</i> rispetto ai gruppi OCH_3 e SCH_3 . Determinazione approssimata del $\Delta\Delta F^\pm$ per l'effetto dell'inibizione sterica di risonanza sulla bromurazione del metossidurene (pres. dal Corrisp. V. Caglioti)	Pag. 548
PICCOLI G., Contributo alla conoscenza del vulcanismo terziario veneto (pres. dal Socio Gb. Dal Piaz)	» 550
GRAZIADEI P., Contributo alla conoscenza delle connessioni interneuroniche nel ganglio stellato di <i>Sepia officinalis</i> (pres. dal Socio A. Pensa)	» 557
COGNETTI G. e DELAVALT R., Individui sessuati e asessuati in <i>Coscinasterias tenuispina</i> Lmk (pres. dal Socio G. Cotronei)	» 560
VITAGLIANO TADINI G., Il probabile significato biologico della monogenia (pres. dal Corrisp. G. Montalenti)	» 562
BATTAGLIA B., Variabilità ambientale e selezione in <i>Tisbe reticulata</i> . - Influenza della salinità (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona)	» 566
MARIN G., Nuovi risultati sull'azione delle radiazioni ionizzanti nel differenziamento sessuale degli Uccelli (pres. dal Corrisp. U. D'Ancona)	» 570
TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. - II. L'attività cardiaca in rapporto alla motilità esofagea. (pres. dal Corrisp. G. Amantea)	» 573
LIVREA G., Sul fondamento nutritivo della bradicardia da inanizione e da malnutrizione del colombo (pres. dal Corrisp. G. Amantea)	» 577
LIVREA G. e DE STEFANO F., Il comportamento ponderale degli organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta e per malnutrizione orizantica (pres. dal Corrisp. G. Amantea).	» 579
VECCHI L., Contributo alla conoscenza del mancinismo (pres. dal Corrisp. G. Amantea)	» 584
VERGNANO O., Sul determinismo delle morfosi della vegetazione sui terreni serpentinosi attraverso l'analisi della nutrizione minerale (pres. dal Socio A. Chiarugi)	» 588
BENEDETTI E. L., Sulla struttura del mesangio di Zimmermann indagata mediante il microscopio elettronico (pres. dal Corrisp. G. Bompiani)	» 597
MARINOZZI V., La struttura dell'alveolo polmonare indagata con una particolare tecnica che permette l'utilizzazione delle sezioni ultrasottili anche per l'osservazione al microscopio ottico (pres. dal Corrisp. G. Bompiani)	» 600
CATTANEO L., Connessioni estrasinaptiche dei granuli del cervelletto in mammiferi (pres. dal Socio A. Pensa).	» 604
BAFFONI G. M. e D'ANCONA G., Osservazioni sulla morfogenesi ed istogenesi cerebellare in Uccelli a prole inetta e precoce. Nota II (pres. dal Socio G. Cotronei)	» 606

COMMEMORAZIONI

PICONE M., Commemorazione del Socio Guido Ascoli	» 614
Personale accademico	» 625
Comunicazioni varie	» 625
Presentazione di libri	» 626
Presentazione di Note e Memorie	» 628
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 17 maggio 1958	» 630

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1958.

NOTE DI SOCI

- CAGLIOTI V. e FURLANI C., Sulle frequenze stretching N—H dell'ammonio nei suoi sali semplici e complessi (pres. dal Socio *V. Caglioti*) Pag. 633

NOTE PRESENTATE DA SOCI

- AGUDO F. R. D. e WOLF F., Propriétés spectrales des équations différentielles non-autoadjointes (pres. dal Socio *M. Picone*) » 643
- HAIMOVICI M., Alcune proprietà delle decomposizioni dei sistemi differenziali (pres. dal Socio *B. Segre*) » 646
- PUCCI C., Studio di un sistema di equazioni differenziali della Dinamica dei Gas (pres. dal Socio *M. Picone*) » 653
- VESENTINI E., Sopra i sistemi fibrati kähleriani compatti (pres. dal Socio *B. Segre*) » 657
- RIZZA G. B., Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa (pres. dal Socio *B. Segre*) » 662
- MARCHIONNA E., Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche. Nota III (pres. dal Socio *O. Chisini*) » 672
- EVANGELISTI G., Funzioni di trasferimento e caratteristiche di stabilità delle adduzioni idroelettriche. Nota I (pres. dal Corrisp. *G. Supino*) » 679
- STORCHI E., Sforzi plastici in una membrana piana di spessore variabile (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) » 685
- GOTUSSO G., Sulla tenacia dei sistemi meccanici in movimento (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) » 693
- GIANNUZZI M. A., Determinazione delle densità delle componenti di un sistema binario visuale, senza la conoscenza della parallasse. Nota II (pres. dal Socio *G. Armellini*) » 700
- CHIARA L., Limiti superiori della variazione dell'eccentricità nei sistemi binari di massa decrescente (pres. dal Socio *C. Mineo*) » 704
- ARTOM M. e GENTILE C., Spettrofotometro a filtri interferenziali (pres. dal Corrisp. *R. Deaglio*) » 709
- CARRÀ S. e SIMONETTA M., Ricerche sulla struttura elettronica dei derivati clorurati della naftalina. - Parte II: Costanti di dissociazione delle cloro-naftilammine (pres. dal Socio *L. Cambi*) » 713
- CARRÀ S., GIANINETTI E. e SIMONETTA M., Transizioni elettroniche π — π (singoletti) delle azone (pres. dal Socio *L. Cambi*) » 722
- PAGLIA E., Azione dell'acido cianidrico sui sali di Co^{III} : nitrico- Co^{III} -cianuri (pres. dal Socio *L. Cambi*) » 725
- BOYARSKY L. L., Sulla relazione tra frequenza di stimolo e fatica nella placca neuromotrice (pres. dal Socio *R. Margaria*) » 728
- BOYARSKY L. L. e BOYARSKY L. H., L'esistenza di un limite di frequenza nel passaggio di impulsi attraverso le sinapsi (pres. dal Socio *R. Margaria*) » 731

TURANO L., CURATOLO A. e SALOMONI E., Ricerche sulla Motilità dell'esofago Umano. - III. Movimenti passivi e peristalsi (pres. dal Corrip. <i>G. Amantea</i>)	Pag. 736
GUALTIEROTTI T., SPINELLI D. e FIORENTINI A., Regolazione del ritmo di scarica del motoneurone spinale per mezzo dell'inibizione antidromica di Renshaw (pres. dal Socio <i>R. Margaria</i>)	» 744
LIVREA G. e DE STEFANO F., Il comportamento dell'acqua del cuore e di alcuni altri organi del colombo bradicardico per inanizione assoluta o per malnutrizione orizantica (pres. dal Corrip. <i>G. Amantea</i>)	» 749
MARINOZZI V., Nuovi rilievi sulla fine struttura degli alveoli polmonari desunti dall'osservazione al microscopio elettronico di sezioni ultra sottili sottoposte ad impregnazione argentea (pres. dal Corrip. <i>G. Bompiani</i>) . . .	» 754
BENEDETTI E. L., Sulla presenza di granuli ferruginosi nell'Apparato di Golgi delle cellule eritroblastiche (pres. dal Corrip. <i>G. Bompiani</i>)	» 757
FALCONE G. e CAVALLO G., Sulla sensibilizzazione al calore da raggi ultravioletti di spore di <i>B. subtilis</i> (pres. dal Socio <i>L. Califano</i>)	» 759

COMMEMORAZIONI

CARRELLI A., Commemorazione del Socio Giancarlo Vallauri	» 764
Personale Accademico	» 771
Presentazione di libri	» 772
Presentazione di Note e Memorie	» 774
Comunicazioni varie	» 775
Temi di discussione	» 775
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 10 giugno 1958	» 776
Indice per Autori	» 781
Indice per materie	» 786
Indici dei fascicoli	» 791

